等差變數多項式之定理的推廣與應用

高中組數學第三名

省立臺東高級中學

作　　者：陳　明　賢

指導老師：林　弘　光

一、前言

在去年，我曾以「有關整變數多項式之定理」爲題（現更名爲「等差變數多項式之定理」）參加第十八屆全國中小學科學展覽倖獲全國高中學生組第一名，後來幾經研究又得到了一些結果，並在其推廣探討中，又獲得更進一步的發現。

在「有關整變數多項式定理」一文中，我所探討的皆限制於單變數多項式，舉凡一切的性質、定理等均建立在單一變數多項式函數之上。因是，我們便有了疑問，是否這種關係也存在於二變數、三變數……，甚至多變數多項式之中呢？這是個很有趣的猜測。因此，下面我們先回憶一下以前的資料，作全盤的了解，再繼續探討剛才所提出的新猜測。

二、「有關整變數多項式之定理」的回顧

我們注意觀察下表：（表中第 i 數列各項均爲第（$i-1$）數列相鄰兩項差）

$$f(x)=2x^3-8x+10$$

…… $f(-4)$, $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ ……

第一數列……　-86　-20　10　14　10　4　10　40　106 ……

第二數列……　66　30　6　-6　-6　6　30　66 ……

第三數列……　-36　-24　-12　0　12　24　36 ……

※第三數列成一等差數列且其公差 $d=12=2\times(3!)$=領導係數×(次數!)

經多次試驗別的多項式均有（※）之結果。因此我們便產生了一個疑問：

對於 $\forall f(x)\in R(x)$，領導係數 $= a_n$，$\deg(f(x))=n$（$n\in N$），其第 n 數列必成等差數列嗎？若是，其公差必等於 $a_n(n!)$ 嗎？

對於這個問題，下面將介紹一套巧妙的解決方法，雖是迂迴曲折，但由此可獲得一些「副產品」。

㈠多項式定值定理：

本節主要在說明「多項式定值定理」（定理一）。這個定理是在尋求解答前述猜測過程中發現的，是證實猜測所須的重要定理。至於本定理的應用，將在第四章中論及，下面我們提出定理敘述並證明之。

【定理一】——多項式定值定理

若 $f(x)$ 爲一實係數多項式，$\deg(f(x))=n$，領導係數爲 a_n，$m\in R$，則

$$\binom{n}{n}f(m+n\triangle x)-\binom{n}{n-1}f(m+(n-1)\triangle x)+\binom{n}{n-2}f(m+(n-2)\triangle x)-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{1}f(m+\triangle x)+(-1)^n\binom{n}{0}f(m)=a_n\cdot(\triangle x)^n\cdot(n!)$$

【證明】：由插值法可知（略）

【系】——「多項式定值定理」$\triangle x=1$ 之特殊形式

若 $f(x)\in R[x]$，$\deg(f(x))=n$，領導係數爲 a_n，

$$\text{則}\binom{n}{n}f(r+n)-\binom{n}{n-1}f(r+n-1)+\binom{n}{n-2}f(r+n-2)-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{1}f(r+1)+(-1)^n\binom{n}{0}f(r)$$

㈡巴斯卡定理的應用

下面的定理（定理二）可說明巴斯卡定理的應用，這個輔助定理對於證實前言之猜測極為重要，因此，必須將它提出來說明。

【定理二】

$$\left[\binom{k}{k}a_{k+1}-\binom{k}{k-1}a_k+\binom{k}{k-2}a_{k-1}-\cdots\cdots+(-1)^{k-1}\binom{k}{1}a_2+(-1)^k\binom{k}{0}a_1\right]-\left[\binom{k}{k}a_k-\binom{k}{k-1}a_{k-1}+\binom{k}{k-2}a_{k-2}-\cdots\cdots+(-1)^{k-1}\binom{k}{1}a_1+(-1)^k\binom{k}{0}a_0\right]=\binom{k+1}{k+1}a_{k+1}-\binom{k+1}{k}a_k+\binom{k+1}{k-1}a_{k-1}-\cdots\cdots+(-1)^k\binom{k+1}{1}a_1+(-1)^{k+1}\binom{k+1}{0}a_0$$

【證明】：原式經合併後得（略）

㈢多項式差階定理

本節主要目的在證實前述的猜測（多項式差階定理），並討論其有關性質。在敘述此定理之前，我們先定義一些符號，以便於了解與解釋。

$D_{(1)}$ 為原多項式以整數代入依序排列而成的數列，叫做第一差階數列。

$D_{(2)}$ 為 $D_{(1)}$ 中相鄰兩項之差（後減前）所成的數列，叫做第二差階數列。

$D_{(3)}$ 為 $D_{(2)}$ 中相鄰兩項之差（後減前）所成的數列，叫做第三差階數列。

……………………………………………………………………

$D_{(n)}$ 為 $D_{(n-1)}$（$n\geq 2$）中相鄰兩項之差（後減前）所

成的數列，叫做第 n 差階數列。

現在我們就來說明這個定理的敘述。

【定理三】：多項式差階定理

一多項式 $f(x) \in R[x]$ ，$\deg(f(x)) = n$ ($n \in N$)，領導係數為 a_n ，則 $D_{(n)}$ 必為等差數列且公差 $d = a_n(n!)$

【證明】：我們看看 $D_{(1)}$ 之各項 （略）

【定理四】：多項式差階定理的推廣

一多項式 $f(x) \in R[x]$ ，$\deg(f(x)) = n$ ($n \in N$)，領導係數為 a_n ，則 $D_{(n)}$ 必為一等差數列且公差 $d = a_n(n!)(\triangle x)^n$

以上所述是原「有關整變數多項式之定理」一文的主要部分，至於其餘關於其應用方面者，我將它調整到第四章一併討論。到此，我們已將本章前面所提及的猜測予以證實成立。由這個漂亮的結果，使我們了解大自然的安排是何等的巧妙啊！然而，上面的「多項式定值定理」及「多項式差階定理」所講的只在 f(x) 這單變數多項式而已，範圍極其狹隘。假使這類結果也存在二變數、三變數……甚至多變數多項式，那大自然的安排不就更巧妙，更嘆為觀止？

三、等差變數多項式諸定理之再推廣

前章討論了，當 f(x)這多項式的變數值成等差時，存在「多項式定值定理」與「多項式差階定理」。由是我們又產生了一個新問題，這個結果可否擴充至 $f(x,y)$ ，$f(x,y,z)$ ，……，甚至於 $f(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_m)$ 等多變數多項式上呢？也就是說，在 $f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_m)$ 中，每一個變數 x_i （ $1 \leqslant i \leqslant m$ ，$i \in N$ ）同時各以一等差數列中的對應項代入，依序求得的一多項式函數值所成的數列，是否也能有類似「多項式定值定理」與「多項式差階定理」的結果呢？

㈠多項式差階定理之擴充

吾人仿照前章再做一表如下： $f(x,y) = 3x^3 + x^2y - y^2$

$x = \cdots\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots$

$\quad\quad\quad\;\; \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \;\; \updownarrow \;\; \updownarrow \;\; \updownarrow$

$y = \cdots\cdots, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, \cdots\cdots$

“$\updownarrow$” 上下所指之 x，y 值即 x，y 之對應項

	……	f(-3,6),	f(-2,5),	f(-1,4),	f(0,3),	f(1,2),	f(2,1),	f(3,0) ……
		‖	‖	‖	‖	‖	‖	‖
$D_{(1)}$	……	-63	-29	-15	-9	1	27	81 ……
$D_{(2)}$	……	34	14	6	10	26	54 ……	
$D_{(3)}$	……	-20	-8	4	16	28 ……		

※ $D_{(3)}$ 成一等差數列，且公差 $d = 12$

我們發現了 $D_{(3)}$ 成等差數列。現在，再觀察公差與原多項式之關係，仿照前例，我們找到其最高次項爲 $3x^3$ 與 x^2y（次數爲 3）：x^3 之係數爲 3，且其變數 x 值的公差 $\triangle x = 1$，故得

$$(\text{係數}) \times (\text{次數}!) \times (\triangle x)^{\text{次數}} = 3 \times (3!) \times (1)^3 = 18 \cdots\cdots ①$$

x^2y 之係數爲 1，且 x 變數之公差 $\triangle x = 1$，y 變數之公差 $\triangle y = -1$，故得

$$(\text{係數}) \times (\text{次數}!) \times (\triangle x)^{x\text{之次數}} (\triangle y)^{y\text{之次數}}$$

$$= 1 \times (3!) \times (1)^2 \times (-1)^1 = -6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

將①與②相加得 $18 - 6 = 12$，此值恰等於上表第三列之公差！

爲了便於說明，我們有如下的定義：

【定義：】：多項式 $f(x_1, x_2, x_3 \cdots\cdots x_m) = A x_1^{h1} x_2^{h2} x_3^{h3} \cdots\cdots x_m^{hm}$，其變數 x_1 之公差爲 $\triangle x_1$，變數 x_2 之公差爲 $\triangle x_2$ ……，變數 x_m 之公差爲 $\triangle x_m$，且 $h_1 + h_2 + h_3 + \cdots\cdots + h_m = n$（次數）

Φ僅指最高次項，如①式與②式者稱之。若最高次項有 t 個，則令其各爲Φ_1，Φ_2，Φ_3，……，Φ_t 而各Φ_i（$1 \leqslant i \leqslant t$，$i \in N$）之和定義爲$\Sigma\Phi$。因此，吾人再建立起一個更廣泛的猜測：

對於$\forall$多項式 $f(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_m) \in R[x]$ 最高次爲 n，且 x_1，x_2，x_3，……，x_m 各有其成等差數列的變數值（$x_1 \in S_1$，$x_2 \in S_2$，……$x_m \in S_m$，S_1，S_2，S_3，……，S_m 均成AP），則其$D_{(n)}$必成等差數列，且公差必爲$\Sigma\Phi$。

經過多次地試驗，都符合了上面的猜測。至於要證明這項猜測，吾人尚需利用第二章所討論的建立在單變數多項式 f(x) 上的「多項式定值定理」及「多項式差階定理」。不過，在證明之前，先作一些說明，以便利討論與了解。

在 $f(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_m)$ 之m變數多項式中，令S_1，S_2，S_3，……S_m各表公差爲$\triangle x_1$，$\triangle x_2$，$\triangle x_3$………，$\triangle x_m$ 之等差數列，且令

$$x_1 = \alpha_1 + \triangle x_1 R \quad (\alpha_1 + \triangle x_1 R \in S_1, R \in Z)$$
$$x_2 = \alpha_2 + \triangle x_2 R \quad (\alpha_2 + \triangle x_2 R \in S_2, R \in Z)$$
$$x_3 = \alpha_3 + \triangle x_3 R \quad (\alpha_3 + \triangle x_3 R \in S_3, R \in Z)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_m = \alpha_m + \triangle x_m R \quad (\alpha_m + \triangle x_m R \in S_m, R \in Z)$$

※爲方便起見，簡稱此狀況爲V.A.P狀況。

且吾人定義，在 x_1，x_2，x_3，……x_m之值中，凡R值相同者稱爲對應項，即欲同時代入 $f(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_m)$中的 x_1，x_2，x_3，……，x_m 之值。例如$\alpha_1 + \triangle x_1$，$\alpha_2 + \triangle x_2$，$\alpha_3 + \triangle x_3$，……，$\alpha_m + \triangle x_m$ 等是。下面我們就證明前面所說的新猜測。

【定理五】：多項式差階數列定理（推廣至多變數多項式）

一多項式 $f(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_m) \in R[x]$，最高次爲n（$n \in N$），則在「V.A.P」狀況中$D_{(n)}$ 必爲等

差數列，且公差爲 $d=\Sigma\Phi$。

【證明】：略

(二)多項式定值定理之再擴充

「多項式差階定理」可由單變數擴充至多變數，前面已經證實了這項事實；但對於「多項式定值定理」又如何呢？實際上，「多項式定值定理」在多變數多項函數中同樣也成立。至於定理擴充的證明，仍需應用單變數情況之定理一。下面我們提出這個定理之敍述與證明。

【定理六】：多項式定值定理（由單變數擴充至多變數）

設 $f(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_m) \in R[x]$，最高次項爲 n，變數在「V.A.P.」之狀況下，則

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{n-j}f(\alpha_1+(n-j)\triangle x_1, \alpha_2+(n-j)\triangle x_2, \alpha_3+(n-j)\triangle x_3, \cdots\cdots, \alpha_m+(n-j)\triangle x_m)=\Sigma\Phi$$

【證明】：略

四、等差變數多項式諸定理之應用

(一)利用「多項式定值定理」簡化計算

「多項式定值定理」的用處之一，就是可在已知條件極少的情況下，迅速地解出問題，較之以未定係數法或其他方法簡化得多。就如下面的例子：

例：一 $f(x,y)$ 之多項式，其次數爲3，且 $f(0,3)=-9$，$f(1,2)=1$，$f(2,1)=27$，$f(3,0)=81$，試求 $f(-1,4)=$？

解：從擴充後「多項式定值定理」可得

$$\Sigma\Phi=\binom{3}{3}f(3,0)-\binom{3}{2}f(2,1)+\binom{3}{1}f(1,2)-f(0,3)=12$$

又 $\binom{3}{3}f(2,1)-\binom{3}{2}f(1,2)+\binom{3}{1}f(0,3)-$

$f(-1,4)=\Sigma\Phi=12$

$\therefore 27-3-27-f(-1,4)=12,$

$\therefore f(-1,4)=-15$

此例若以未定係數法解，則其繁雜可想而知。

(二)「多項式定理」與整值多項式

利用多項式定值定理也可以證明一些有關整值多項式的性質。當變數群 x_1，x_2，x_3，……，x_m 爲整數時 $f(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_m)$ 之值恒爲整數，則此種多項式稱爲「整值多項式」例如：

$$\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}-3,\ \frac{x^2-x+y^2+y}{2},\ \cdots\cdots$$

和一切整係數多項式都是整值多項式。

下面我們將證明一個關於整值多項式的定理，此定理僅限於單變數多項式，至於多變數者，還沒探討出其一般形式。

【定理七】：若一多項式 $f(x)$，$\deg(f(x))=n$，對於連續 $n+1$ 個整數，多項式值恒爲整數，則此多項式必爲整值多項式。

【證明】：略

【系】：設 $f(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_m)$ 爲一個 n 次整值多項式，則 $(n!)\sum_{i=1}^{t} A_i$ 必爲整數。（A_1，A_2，……，A_t 爲所有最高次項係數）

(三)「多項式差階定理」與映成函數個數問題：

若 A，B 二數集合，$n(A)=m$，$n(B)=n$，則由 A 映成 B 之函數個數有 $\binom{n}{n}n^m-\binom{n}{n-1}(n-1)^m+\binom{n}{n-2}(n-2)^m-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{1}(1)^m+(-1)^n\binom{n}{0}(0)^n$

吾人設 $f(x)=x^m$，則上式可改爲

$$\binom{n}{n}f(n)-\binom{n}{n-1}f(n-1)+\binom{n}{n-2}f(n-2)-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{1}f(1)+(-1)^{n}\binom{n}{0}(0)^{m}$$

從二～(三)中觀察知上式即 $D_{(n+1)}$ 中之"中中項"（$\triangle x=1$）

$D_{(1)}$…… f(-3)　f(-2)　f(-1)　f(0)　f(1)　f(2)　f(3)

$D_{(2)}$…… f(-2)-f(-3), f(-1)-f(-2), f(1)-f(-1), f(1)-f(0) f(2)-f(1), f(3)-f(2)

$D_{(3)}$ ………………………… f(2)-2f(1)+f(0)←中央項

所以要求映成函數個數可以利用如此差階表示爲之。

映成函數的求法有如下性質：（下列之 $D_{(i)}$ 均指 $\triangle x=1$ 而言）

(1)若 $n<m$：映成函數個數爲 $D_{(n+1)}$ 之中央項。

(2)若 $n=m$：則映成函數個數爲 $D_{(n+1)}$（即 $D_{(m+1)}$）之中央項，由「多項式差階定理」可知 $D_{(m+1)}$ 各項爲 $D_{(m)}$ 相鄰兩項差，而 $D_{(m)}$ 成等差數列，故 $D_{(m+1)}$ 各項均相等，即 $D_{(m)}$ 之公差（$m!$）。故 $n=m$ 情況下，映成函數個數爲 $m!$。

(3)若 $n>m$：則映成函數個數爲 $D_{(n+1)}$，但 $D_{(m+1)}$ 各項爲 $m!$，故 $D_{(m+j)}$（$j>1$）之各項均爲0，故 $D_{(n+1)}$ 之各項均爲零，因此映成函數個數爲0。此與「變數值之個數小於像之個數時則無映成函數」符合。

因此，以多項式差階定理及差階表來判斷或求映成函數個數不失爲一種簡便的方法，且可免記憶之繁瑣與混淆。

(四)「多項式差階定理」之應用

多項式差階定理中，若吾人令 $\triangle x=1$，則 $D_{(n)}$ 之公差爲 $a_n(n!)$，其中 A_1，A_2，……，A_t 爲最高次項（n 次）之係數，吾人利用此一事實可判斷一數列之通項表成多項式時之次數與領導係數，看看下面的例子：如一數列……3，1，0，0，1，3，6……則由差階定理知

$$D_{(1)} \cdots\cdots \ 3,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 3,\ 6 \cdots\cdots$$

$$D_{(2)} \cdots\cdots \ -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \cdots\cdots$$

在$D_{(2)}$時成等差，故最高次項爲2，又$D_{(2)}$公差爲1，所以領導係數$=\dfrac{1}{2!}=\dfrac{1}{2}$。根據這個方法，我們可以推算$\sum\limits_{R=1}^{n} k^m$之次數與領導係數。令$f_n=\Sigma_{k=1}^{n} k^m$，故

$$\begin{array}{lccccc}
 & f(1), & f(2), & f(3), & \cdots\cdots, & f(n) & f(n+1) \\
 & \| & \| & \| & & \| & \\
D_{(1)} & 1^m & 1^m+2^m & 1^m+2^m+3^m & & 1^m+2^m+3^m+\cdots+n^m & 1^m+2^m+3^m+\cdots n^m+(n+1)^m \\
D_{(2)} & & 2^m & 3^m & 4^m & & (n+1)^m
\end{array}$$

因$D_{(2)}$之通式爲$(n+1)^m$，故$(n+1)^m$之$D_{(m)}$成等差，且公差爲$m!$，亦卽$f(n)$，$D_{(m+1)}$成等差，且公差爲$m!$，因此$f(n)$之次數爲$m+1$，領導係數爲

$$\frac{m!}{(m+1)!}=\frac{1}{m+1}\text{。}$$

五、結語

到目前爲止，「多項式定值定理」與「多項式差階定理」自單變數推廣至多變數，已使此二定理達到了顚峯。由這些定理確實使我們感嘆造物者之奧妙，充分表現了大自然造數之神奇，使人嘆爲觀止。當然，在數學上，仍有許多理論同樣地奇妙，諸如高斯的「若Fermat數爲素數，則正F_n邊形可用圓規及直尺作出。」「拋物面與橢圓面之反射」……等，都是很有名的定理，在幾何學與光學中，有其特殊而重要的應用。當然，科學，尤其是數學，並不完全爲求實用而發展的，“好奇心之使然”在西洋科學的發展史上，早已形成一個不可忽視的推動力。老子說：「無用之用」現代的人說「爲學問而學問」，都是說明一件事：學

問並非以有實用價値爲目的，往往一般人認爲最沒有用的事物，却常常發揮令人爲之探舌的功效。我之於研究「等差變數多項式之定理」，目的亦在於此。