捷　徑

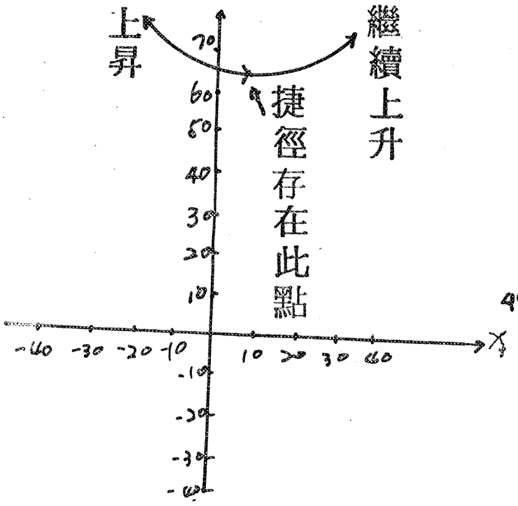
高中組數學第二名

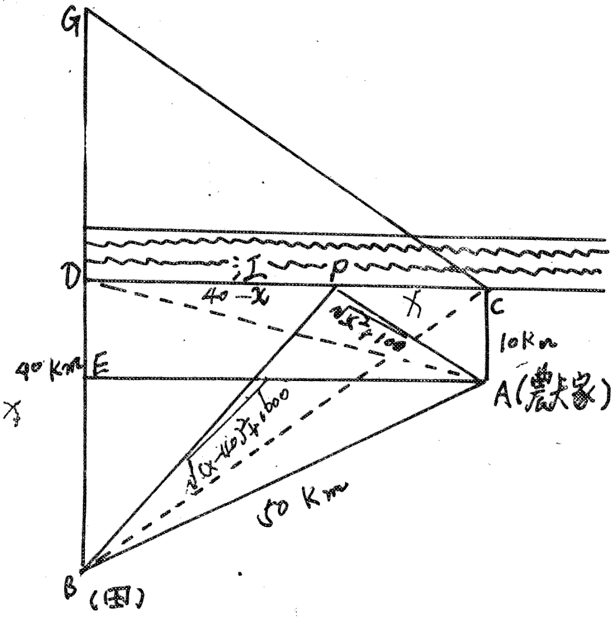
省立羅東高級中學　　作　者：黃　文　衡
指導老師：李樹德・潘俊益

一、緒論：

除非是散步解悶，可以漫不經心地隨意走，否則必有一個目標，並且要選擇一條達到目的的「捷徑」，這不是數學家的專門話題，而是你我現實的問題。如果世界到處都是一片沙漠，這問題也就沒什麼了。只是都市中街道交錯，高樓林立，有平交道、有紅綠灯，即使在郊外也是山巒起伏，小溪流水，把大地弄得「很不簡單」。如果對一個平常人來說，選擇短的路徑可爲他節省許多體力上的透支，但在「特殊情形」之下，時間所扮演的角色就是最重要的了。例如在軍事上行軍的路徑，飛機航路導向飛彈的路徑等等……。如果發生火災和交通事故，救火車和救護車的行徑更決定了生命和財產損失的多寡，和你切身關係密切的，更是不少，如果你早上起床晚了，抄個近路，可免遲到，上班、上學都很實用。

（參考圖一）話說有一農夫家住大江南面，日出而做，日入而息，清晨上田工作時必先到江邊（江水向東流）盥漱梳洗，回家時更要洗去一身汚垢，試問農夫在每天上田和回家的路徑，怎樣走法最短。





二、主題：

(1)比例計算法：

照題目，$\overline{AC}$＝10km，$\overline{BD}$＝40km，$\overline{AB}$＝50km，$\overline{AE} \parallel \overline{CD}$，$\overline{DE}$＝10，$\overline{BE}$＝30，△ABC由畢氏定理得$\overline{AE}=\overline{CD}$＝40 km，再用比例法，使$\overline{CP}:\overline{PD}=\overline{AC}:\overline{BD}$＝10：40，P點將40km距離分爲1：4的兩段$\overline{CP}$＝8 km，故農夫走的最短距離約爲64公里31公尺24.1公分。

(2)鏡面反照法：

假使沿河岸立起一面大鏡子，農夫在家門口，望見農田在鏡子裏影像在G點。（G在$\overline{BD}$延長線上，$\overline{BD}=\overline{DG}$）則P爲$\overline{AG}$與$\overline{CD}$交點。

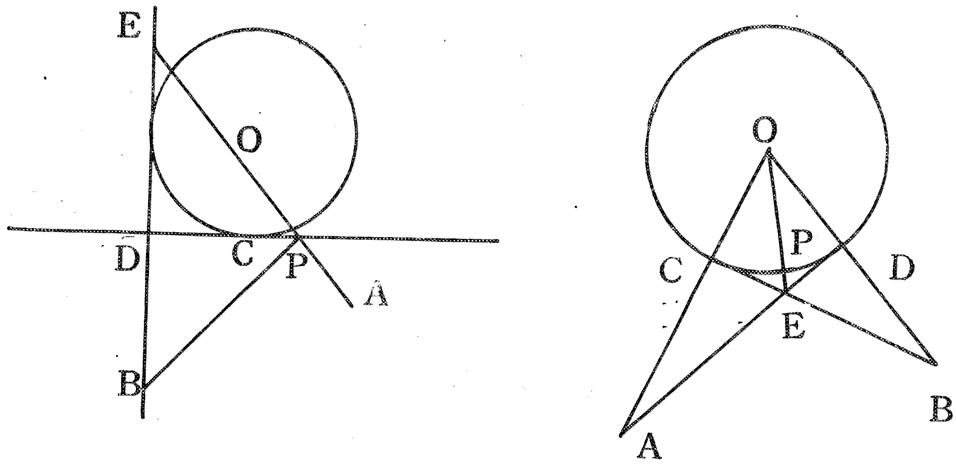
(3)對角線法：

ABCD 是梯形，連兩對角線相交在H點，由H點畫線垂直於河岸與CD的交點就是P。

農夫住在河邊「捷徑」較易求，如果是在湖邊，問題就兩樣了，爲求簡單，假設湖或池塘是正圓的，湖的直徑與湖心地位與起點終點都已確定了。（如圖）O是湖心，OC 是半徑，A是

起點，B是終點，假設DP是一面大鏡子，在湖邊立著，並且和圓相切，C是切點，DE垂直鏡面，被鏡平分於D點，E是B在鏡裏的影像，由A望E，視線在F點穿過鏡面，F與C如適巧重疊在一起，AF，BF 就是所求的最近路線。（鏡面需經適當地調整）

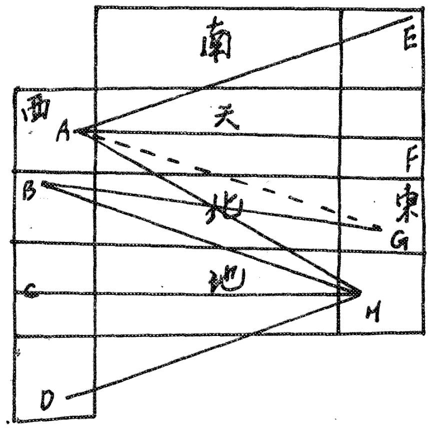
下面介紹一種更簡單而無需試驗的圖解法。O是湖心，AO，BO分別交圓於C，D，BC交AD 於E，EO 交圓於P則P即爲所求。



有一間大廳，東西長 50 尺，南北深 2 4 尺，廳內下有地板，上有天花板高 24 尺，在西牆上，離天花板 3 尺，離南牆 12 尺處爬著一隻蒼蠅，在東牆上離地板 2 尺，離北牆 10 尺之處，爬著一隻蜘蛛，這蜘蛛眼睛非常銳利，已看見幾丈外的蒼蠅，想順牆或天花板爬過抓來充飢。那蒼蠅也感覺靈敏，預知大禍將臨，但已嚇得動彈不得，在那裏等死，求蜘蛛爬行的最短路線和距離。

這座大廳可看作是個厚紙板盒子。它的前後左右上下六面，代表大廳的東西南北上下天花板，紙盒的六面可以展開攤平，但面與面的相關位置可能有好多種變化，如下圖南、天、北、地相連就是其中一種，如使南牆與天花板分開，結果天、北、地、南就相連了。東牆與西牆，可以隨便任它連著那一面。

將蒼蠅與蜘蛛的位置，用筆在左、右紙板上註明，在攤平的紙板上，將蒼蠅與蜘蛛所在的兩點，連成一條直線。這就是可能的最近路線。



如上圖中A、B、C、D代表西牆上的蒼蠅，在紙盒展開後幾個可能的位置，E、F、G、H代表東牆上的蜘蛛，東邊的一點與西邊的一點，所連成的線，代表可能的路線，但有些路線如CE很顯然是不會近的，所以也不必試驗了，現在試驗幾條可能的路線計算，其長短如下：

$AE^2 = 67^2 + 30^2 = 5389$，$AF^2 = 75^2 + 2^2 = 5629$

$AG^2 = 63^2 + 34^2 = 5125$，$AH^2 = 55^2 + 46^2 = 5141$

$BG^2 = 72^2 + 19^2 = 5545$，$BH^2 = 64^2 + 31^2 = 5057$

$CH^2 = 73^2 + 2^2 = 5333$，$DH^2 = 64^2 + 35^2 = 5321$

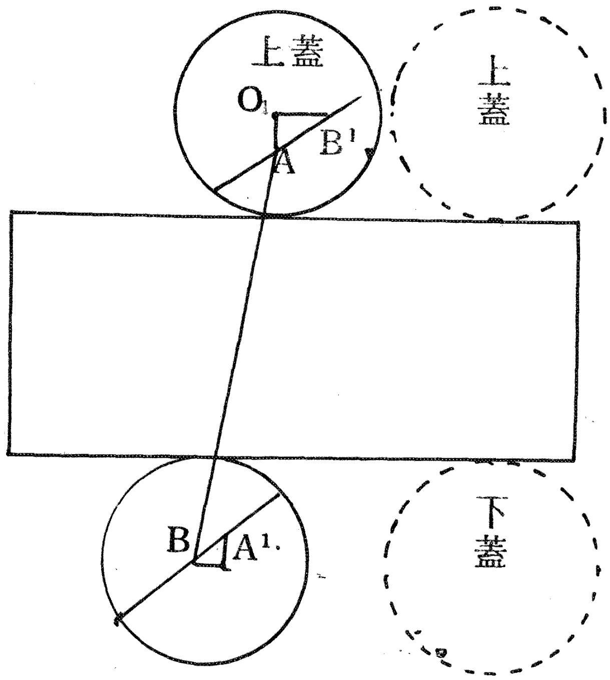
將距離計算出來：$AG = \sqrt{5125} = 71.11$（公尺）其餘都是較長的，可見最短距離是 71.11 公尺，蜘蛛要想速戰速決，它應該採AG路線從東牆爬上北牆，經天花板的一角而到西牆，再從天花板而降，就可吃到蒼蠅了。

將以上蜘蛛捉到蒼蠅的問題稍加變化，就可得到一個新問題，有一圓柱形空罐頭，半徑是5吋（直徑10吋），高 10吋，在頂上，圓心正南，離圓心2吋之處破一小孔，一隻螞蟻正在鑽進去，尋找食物，在罐內底有一粒殘餘的餅屑，正在圓心的西面相距3吋，螞蟻進洞，即望見美味在前，不勝欣喜，

便計劃從那裏爬下去享受，現在的問題就是要幫助這螞蟻，計劃一條最短的路線。

想解決此問題，可以襲用前題的方法，將罐頭展開，攤在一平面，在螞蟻、餅屑兩點之間，連成一條直線，就是最近的路線，罐的上蓋下底，是兩個直徑 10 吋的圓。罐頭的周圍是一圓筒，從任何一處剪開攤平，得一高 10 吋長 10π 吋的長方形，圓蓋圓底就分別附著在這長方形的上邊與下邊（參見下圖）進行到這裏，已知螞蟻吃餅和蜘蛛捉蒼蠅有幾點不同。在上圖中，可以看見東牆或西牆與南天北地幾面相接觸是一條直線，東西兩點的連線，必須經過這線，否則須將東西牆轉換一個地位，如由E連到B的直線，經過東牆與南牆的接觸線，但不經過西牆與北牆的接觸線，這條路線大概是不可能的。所以西牆應轉換地位，如B點轉到A，AE 連線經過了西天與東、南兩接觸面，AE 就是一條可能的線，再看下圖，圓和長方形相切時，只有一點相接觸，所以兩圓必須滾轉混合，使螞蟻、餅屑兩端點的連線正巧通過兩個切點，這才是一條可能的路線，再者，東西牆的地位各有許多變化。所以可能的路線，也只有顯然可見的少數幾條，不難一一算出比較而求得一條最近的路線，但在左圖中很難做到。上下兩圓保持與長方形相切，滾來滾去，各有無數不同的位置，正巧通過兩個切點的上下連線也可能有很多條，這些路線不像前題那樣顯而易見，要求它們位置長短，也是較繁難的。

要解此題比較簡單的方法，是用紙板作成下圖的模型來實驗在左下兩圓板區，螞蟻的餅屑與地位A與B各釘一只針，再用一只尺靠緊上下兩只針，如果尺的邊緣同時經過兩個切點C與D時，就可量出兩針之間的距離，兩圓的周圍與長方形上下兩邊，需要畫著度數湊合穿過兩切點的直線時，必須貼著長方形轉點而不可滑動，隨時注意所畫的度數，使圓邊上與直邊上的度數保持上下相應，就可免除錯誤了。



這樣的實驗幾回後可得如下的結果：將上下兩圓展開，如上圖以E南面爲起點，上圖須向西面轉 35° ，下圖須向西轉 75°，此時兩點的連線ABCD傾斜 70° ，正好通過上下兩切點C與D，此線的長度 16.3 吋强，這吋就是「捷徑」。直線實驗雖然可行，但也要從幾個可能路線中比較出一個較近的，一個稍欠正確的簡法（可名爲平面法）特點是簡單直接兩三下就可得近似路線，只可惜無理論根據，並且還有顯然的缺點。

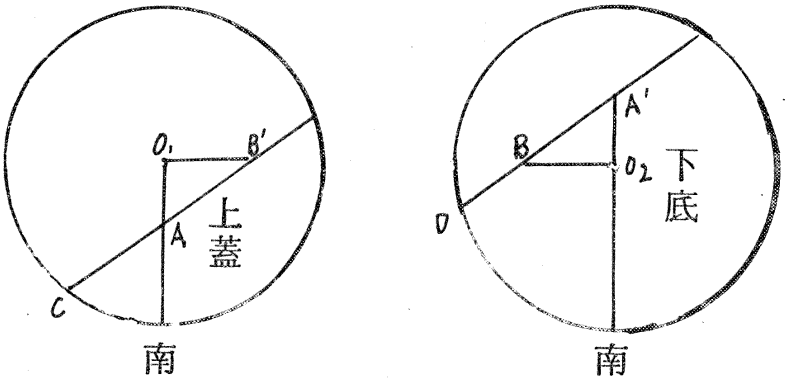
一個圓柱體，頂上有一點代表螞蟻，底下有一點代表餅屑，現在像切麵包一樣將圓柱剖開，這一刀要正好切過上下兩點，與圓柱中心（三點可決定一平面）刀切過的平面，與圓柱體表面相交的線，就代表螞蟻吃餅應爬的路線，這個平面與上下兩圓柱的上下兩圓的交線，是兩段互相平行的路線，兩段直線的求法可知（圖四）上面螞蟻在圓心南面A點，下面餅屑在圓心西面B點，在上面求 B^1 與B相對 $\overline{O_2B}=\overline{O_1B'}$ 連 $B'A$ 再延長AC，在下面求A與 A' 相對 $\overline{O_1A}=\overline{O_2A'}$ 連 $A'B$ 再延長BD在圓柱體上ACDB 就是所求的路線，三段長度相加就是所求

的距離，如小圓柱斜著被一平面切過，被切之處是一橢圓，所以CD是橢圓的一段，將圓柱展開之後，這一段距離雖已不是橢圓，但還不是直線，使距離短應將彎曲的CD路線，改爲在展開面上的直線，在圓柱面上是螺旋曲線，ACDB 路線的總距離$=\overline{AC}+\overline{CD}+\overline{DB}=3.61+10.52+2.22=16.35$（吋），平面法比直線實驗容易得多，但是前者並無理論根據，用平面法時圓柱的高低對於AC與BD兩段竟不發生影響，這是一個最明顯的錯誤，話雖如此用此簡法居然能得到巧合的結果，雖說是偶然，但也是有意思的。假如圓柱體是非常高，這問題倒是簡單的，因爲CD的距離和柱高事實上無法分別，所以自A點起背著圓心到C，由C再到D，再向著圓心到B，就是最近的路線。假如反過來說，圓柱的高度非常小，小到零，上蓋下底兩個圓非常接近近到互相緊貼，成爲一個圓，A、B已成爲這圓內兩點。此時題目性質變成了由螞蟻「從A點發出先到圓周，再至B點去吃餅」，而要找出一條最近的路線，所以此題又與前面的往返河邊問題類似。

某農夫住在圓形孤島上的A點，每天他要到島邊梳洗之後，再到B點工作，歇工回家之前，也要先到島邊洗刷一番，求他往返島邊的最近距離，這個最短距離的問題，螞蟻吃餅的平面法不能應用，直接實驗法和往返河邊的鏡面反照法，皆不能解決問題。因島邊如立起環狀的大鏡子，在A點可以從幾個不同的方向，都能望見B點的影像，所以先實驗得出幾個可能的路線，才能選取最短，對角線法用於往返河邊很正確，用於往返湖邊只是近似用法，如用於往返島邊，不甚正確，當A、B兩點相距較遠，離島邊較近，而離島中心距離大致相等時，用對角線法的結果，誤差最多，最適於此題的解法爲橢圓法。先在紙上畫一圓表示圓島，在圓內釘兩只針代表A、B兩點，用一根細紗線將兩端分繞在兩針上，中間的紗線要相當寬鬆，而且線長也可隨意改變，再用支鉛筆，兜緊畫個橢圓，改變紗長即能畫出大小不同而套在一起的橢圓，解決問題的橢圓，必

須完全包括在圓內，還要與圓相切，見圖(五)，這切點C決定了最短路線，畫這個橢圓的紗線長度$\overline{AC}+\overline{BC}$就是捷徑。

註：另一圖在下一頁

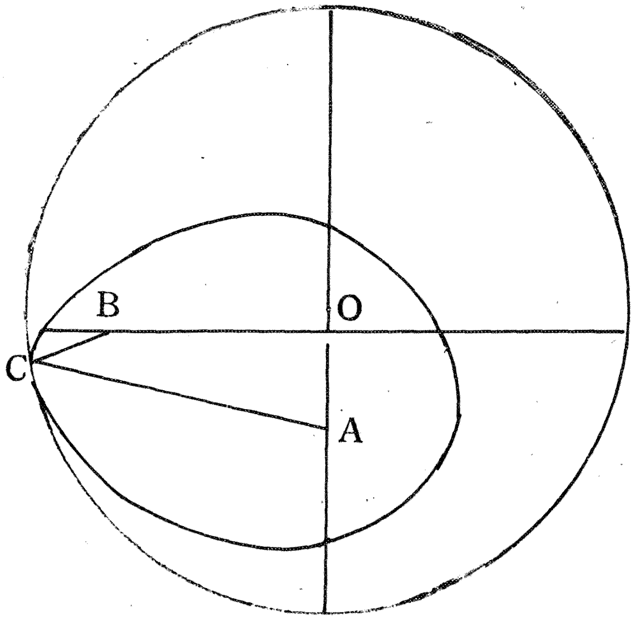


三、結論：

(1)這是一種極正確的圖解法，也能適用於往返湖邊、河邊等問題，應付此類問題，當然也能用解析幾何微積分的方法，但演算繁雜又難得結果，反不如畫一橢圓直接了當。

以A、B爲焦點，利用某一定長的細線，畫出橢圓，以$\overline{AB}$爲中心軸，使之旋爲橢圓體，設A表圓罐上的螞蟻，B表圓罐底之餅屑，在許多以AB爲焦點的橢圓體中，必有一個與上圓蓋相切，切點爲C，另有一橢圓體與下圓相切，切點爲D，求C、D兩點之後，連AC與BD，再將圓罐展開連CD，ACDB是螞蟻吃餅的最近路線AC＋CD＋DB就是捷徑之長，用橢圓體法求捷徑問題，較之「直線法」「平面法」合理而直接。

(2)在以上的討論中，都把地面當成水平的，而事實上，地球表面是有曲率的，如果要精密研討捷徑問題，所牽涉到球面幾何來解決，光線的行徑往往就是捷徑。故捷徑的數學理論可在光學中，推算光線走的路線。


B
O
C
A