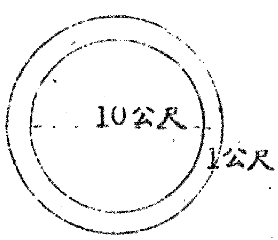
原理淺顯易懂的環形面積簡易算法

高小組數學第三名

苗栗縣建功國民小學　　作　　者：周 明 道等九名
指導老師：陳耀南・黃春芳
林峯嶽

一、發現問題：

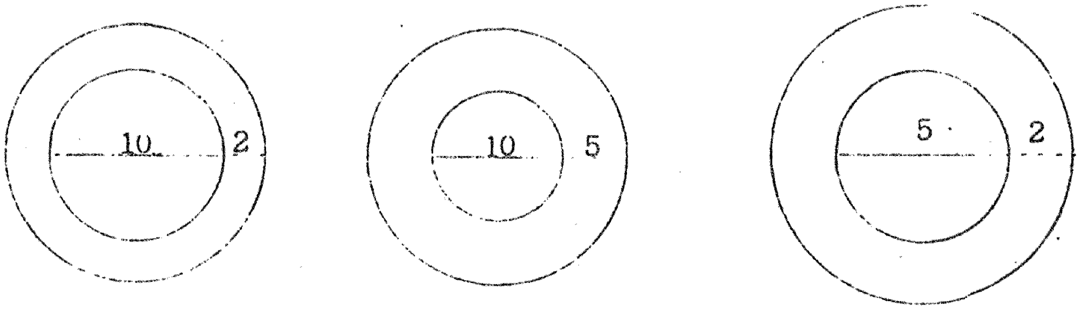
我們檢討數學課本十一册，練習十五，第四題：「圓池一個，直徑 10 公尺，在池的外圍築寬 1 公尺的路，算出路的面積是多少？」時，大家都應用大圓面積減去小圓面積的算法：$6^2 \times 3.14 - 5^2 \times 3.14 = 34.54$ 或 $(6^2 - 5^2) \times 3.14$ 來做。這時我問老師：「是不是可以用 $(10 + 1) \times 3.14 = 34.54$ 來做？」



不等老師的回答，王同學搶先說：「老師，我認爲這樣做只是一種巧合，因爲我用別的數字試過了，結果答案不同，況且也無法解釋它的理由！」老師聽了，告訴我們：「凡事在沒有得到充份理由來解釋以前，不要冒然就下斷語。這個問題旣能造成巧合，必定有它的道理在。」於是我們幾個喜歡數學的同學，便聚在一起研究到底能不能用 $(10 + 1) \times 3.14 = 34.54$，這種方式來做？又怎麼來解釋它的道理呢？

探求答案：

求環形面積我們已知道大圓面積減去小圓面積的一般算法，因此我們把幾個同學分成二組，第一組用一般算法。第二組用新的設想法來分別試算下列三個問題：



第一組

$10 \div 2 = 5$

$5 + 2 = 7$

$7 \times 7 \times 3.14 - 5 \times 5 \times 3.14 = 75.36$

$10 \div 2 = 5$

$5 + 5 = 10$

$10 \times 10 \times 3.14 - 5 \times 5 \times 3.14 = 235.5$

$5 \div 2 = 2.5$

$2.5 + 2 = 4.5$

$4.5 \times 4.5 \times 3.14 - 2.5 \times 2.5 \times 3.14 = 43.96$

第二組

$(10 + 2) \times 3.14 = 37.68$

$(10 + 5) \times 3.14 = 47.1$

$(5 + 2) \times 3.14 = 21.98$

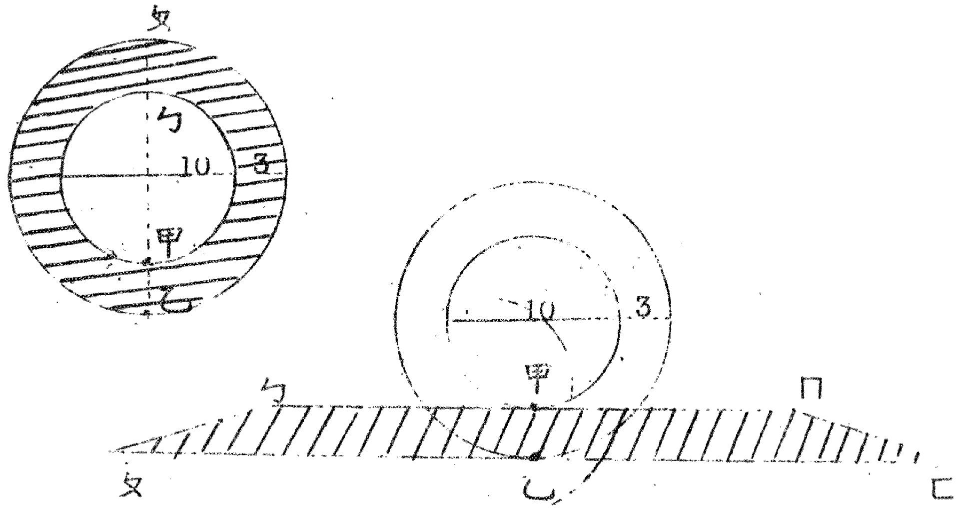
演算後，我們發現，用新設想法算得的結果與一般算法的結果不同。經過我們的分析比較後發現，用新的設想法要加乘上寬度，答案才會正確。這是什麼道理呢？

三、探討原理：

過去我們使用過或看過的一些求環形面積的方法，都是應用圓形面積的求法，或再以因式分解的方法加以簡化，但他的道理不是我們小學生能徹底瞭解的。因此我們捨去圓面積的應用方法

，另求一種淺顯易懂的方法，來解釋它的道理。

(一)



上圖之環形面積，以一般算法求得：

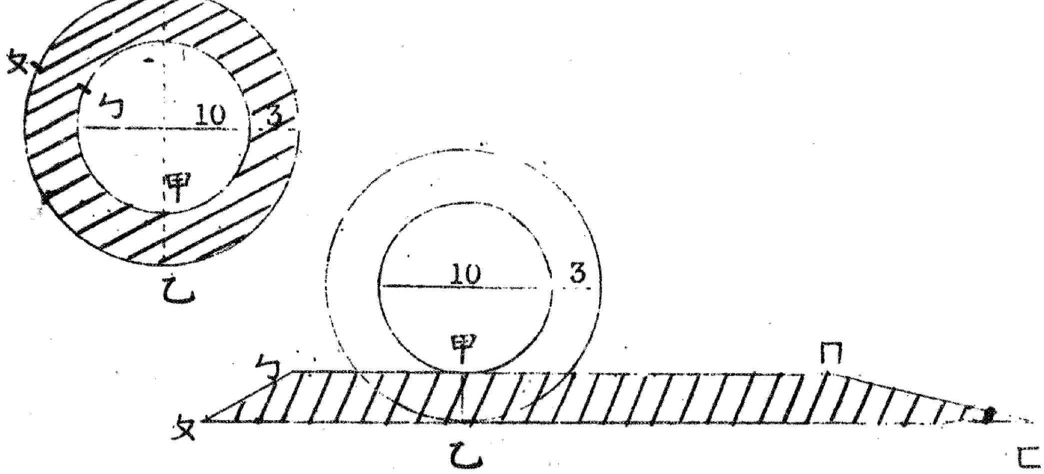
$8 \times 8 \times 3.14 - 5 \times 5 \times 3.14 = 122.46$

今如圖在通過圓心的直線上取甲、乙兩個定點，再從ㄅㄆ兩點切開，展開成梯形ㄅㄇㄈㄆ。這時上底ㄅㄇ應是內圓周長，下底ㄆㄈ則是外圓周長，因此梯形所含括的面積，應是環形的面積。梯形ㄅㄇㄈㄆ的面積是：

$$\frac{(\text{ㄅㄇ} + \text{ㄆㄈ}) \times 3}{2} = \frac{(10 \times 3.14 + 16 \times 3.14) \times 3}{2} = 122.46$$

可以把環形展開成梯形，再用梯形面積的算法，求環形面積。這是首先要瞭解的第一個觀念。

(二)

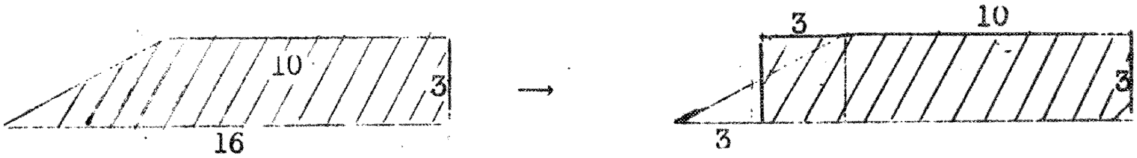


如圖在通過圓心的直線上取甲、乙兩個定點，在內圓圓周上截取弧甲ㄅ，等於內徑長，在外圓圓周上截取弧乙ㄆ，等於外徑長，從ㄅㄆ兩點切開，展開成梯形ㄅㄇㄈㄆ。梯形ㄅㄇㄈㄆ的上底ㄅㄇ即內圓周長爲ㄅ甲的3.14倍。下底ㄆㄈ即外圓周長，爲ㄆ乙的3.14倍。因此梯形ㄅㄇㄈㄆ的面積，應該是梯形ㄅ甲乙ㄆ面積的3.14倍。梯形ㄅ甲乙ㄆ的面積，除可用

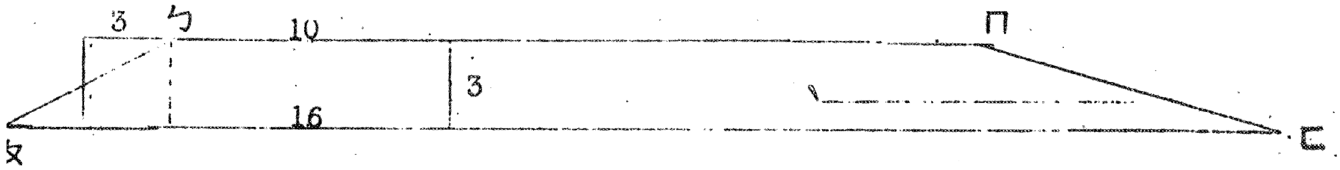
$\dfrac{(10+16)\times 3}{2}$ 求取外，還可利用和差算的應用：

〔10＋(16－10)÷2〕×3來計算，

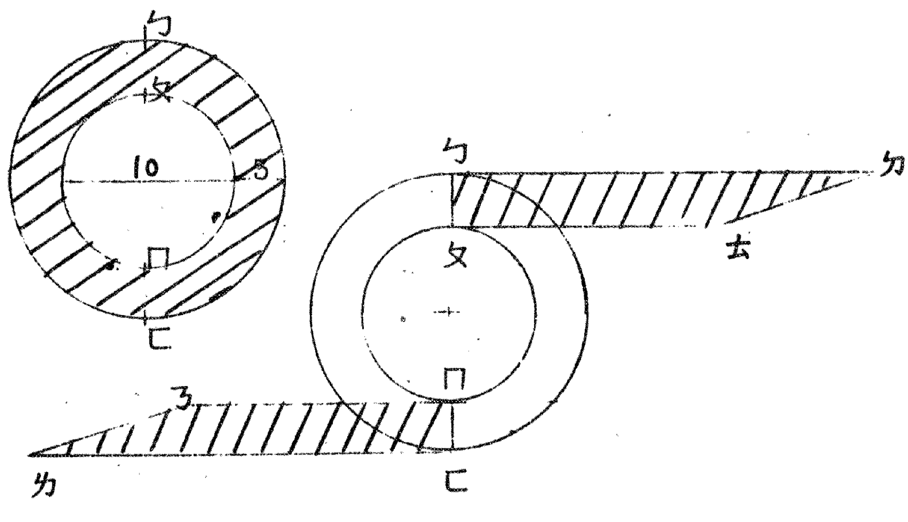
化簡即是(10＋3)×3

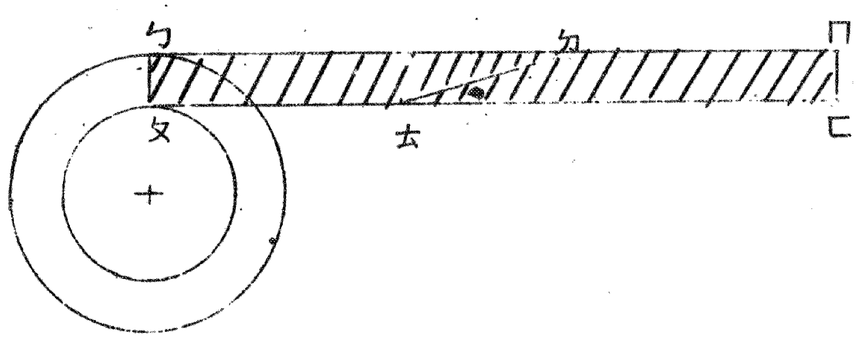


因此梯形ㄅㄇㄈㄆ的面積可用：(10＋3)×3×3.14 算出，而此面積即爲環形面積。



(三)





如圖在同一直徑上各取ㄅ、ㄆ、ㄇ、ㄈ四點，從四點切開，把環形展開成梯形ㄅㄉㄊㄆ與ㄋㄇㄈㄉ。則ㄅㄉ、ㄉㄈ的長同爲外圓周長的一半，ㄆㄊ，ㄋㄇ的長則同爲內圓周長的一半，其面積則分別爲：

$$\frac{(8\times3.14+5\times3.14)\times3}{2} \quad 與$$

$$\frac{(5\times3.14+8\times3.14)\times3}{2}$$

若將梯形ㄋㄇㄈㄉ移到ㄅㄉㄊㄆ上，則併成長方形ㄅㄇㄈㄆ，其面積將成爲：

$$\frac{(8\times3.14+5\times3.14)\times3}{2}+\frac{(5\times3.14+8\times3.14)\times3}{2}$$

此長方形之面積，即爲環形面積。

四、歸納公式：

將前述三種方法，計算歸納後得：

㈠ $\frac{(10\times3.14+16\times3.14)\times3}{2}$

$=\frac{(10+16)\times3.14\times3}{2}=\frac{26\times3.14\times3}{2}$

$=13\times3.14\times3$

㈡ $(10+3)\times3\times3.14=13\times3\times3.14$

(三) $\frac{(8\times3.14+5\times3.14)\times3}{2}+\frac{(5\times3.14+8\times3.14)\times3}{2}$

$=\frac{(8+5)\times3.14\times3}{2}+\frac{(8+5)\times3.14\times3}{2}$

$=\frac{(8+5)\times3.14\times3\times2}{2}=(8+5)\times3.14\times3$

$=13\times3.14\times3$

三種方法演算到後來都成 $13\times3\times3.14$，爲內徑與寬的和×寬×3.14。而以第二種方法，從一開始就能完全切合探求答案所得結果的要求。

於是我們歸納出簡易的公式爲：

環形面積＝（內徑＋寬）×寬×圓周率。

也以第二種方法來解釋公式的原理最爲淺顯易懂。