

循環小數與真分數間的有趣問題

高小組數學第二名

花蓮縣瑞穗國民小學

作者：陳 瑤·簡志宏

指導老師：康 振 豐

一、我們的動機：

上學期數學課老師講到循環小數的單元時我們在演算過程中發現了一些有趣的問題，如：

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857} \quad \frac{3}{7} = 0.\overline{428571} \quad \frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$$

……………這樣的一組有規律的數字排列，我們請教於數學老師，老師告訴我們：「分母與小數的換算中可能還有另一些有趣的數字排列與有規律性的問題」。他要我們在寒假中把可能的真分數都化爲小數，再看看它們的變化如何。

二、我們想知道的問題：

小數有兩種，就是有限小數與無限小數，而無限小數又可分爲純循環小數與混循環小數兩種。

1. 分母在何種情況之下能化爲有限小數？
2. 分母在何種情況之下能化爲循環小數？
3. 怎樣的分母能化爲純循環小數？
4. 怎樣的分母能化爲混循環小數？
5. 以質數爲分母的分數和以合數爲分母的分數所化成的小數有何不同的地方？
6. 真分數化爲小數時那些有規律性可循？

三、我們的做法：

寒假中我們計算了很多分數化小數的結果，從分母是2的分數到分母是100的分數都化爲小數，並且按順序把它排列在表上，這時我們發現了循環小數都是同一組的數字，按照不同的排列，有限小數的小數位和它分母的大小有一定的關係。

四、老師的指導

我們把演算的結果拿來請教老師，老師要我們把分母分爲四種類型：

1. 分母是質因數2、5或是2與5的乘積的分數。
 2. 分母是2、5與其它質數乘積的分數。
 3. 分母的質因數乘積不含2、5兩種質數的分數。
 4. 分母的質因數乘積不含2、5而爲3的倍數的分數。
- 我們按照老師的分類，再把計算結果重新排列於表上。

五、演算結果的分類與整理：（從略）

六、我們的發現：

1. 分母是質因數2、5或是2與5乘積的分數所化成的小數都爲有限小數而它的小數位數決定於2、5的指數上，例如：

$$(1) \frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = 0.375 \quad \text{分母 } 8 = 2^3, 2 \text{ 的指數是 } 3 \text{ 所以有 } 3 \text{ 位小數。}$$

$$(2) \frac{7}{625} = \frac{7}{5^4} = 0.0112 \quad \text{分母 } 6.25 = 5^4, 5 \text{ 的指數是 } 4 \text{ 所以有 } 4 \text{ 位小數。}$$

$$(3) \frac{1}{200} = \frac{1}{2^3 \times 5^2} = 0.005 \quad 200 = 2^3 \times 5^2, 2 \text{ 的指數是 } 3, 5 \text{ 的指數 } 2, \text{ 它們最高的指數是 } 3 \text{ 所以有 } 3 \text{ 位小數。}$$

2. 分母是2、5與其它質數乘積的分數時所化成的小數爲混循環小數，這些小數不循環的位數也決定在分母質因數乘積2、5的指數上，如果最高指數是2就有2位不循環而它後面的循環數字與這一分數分母的另一個質因數所成的分數有相同的地方，

例如：

$$(1) \frac{5}{24} = \frac{5}{2^3 \times 3} = 0.208\overline{3}, \text{ 分母 } 24 = 2^3 \times 3, 2 \text{ 的指}$$

數是 3 所以有 3 位小數不循環。

$$(2) \frac{4}{35} = \frac{4}{5^1 \times 7} = 0.114285\overline{7}, \text{ 分母 } 35 = 5^1 \times 7, 5 \text{ 的}$$

指數是 1 所以有 1 位小數不循環。

$$(3) \frac{5}{60} = \frac{5}{2^2 \times 5^1 \times 3} = 0.08\overline{3}, \text{ 分母 } 60 = 2^2 \times 5^1 \times 3$$

2 的指數是 2、5 的指數是 1 它們的指數最高是 2 所以有 2 位小數不循環。

3. 分母的質因數乘積不含 2、5 兩質因數的分數所化成的小數為純循環小數，它們循環的數字都是一組或兩組數字以不同的排列順序而循環，而循環位數在十位以上的數，它的小數位數大多是分母減 1 所得的數，就是它的小數位。

七、我們的收穫：

- 1 經過我們分類整理所發現的結果，我們覺得某一類型的分數都有它們共同的特性，今後我們在計算分數化小數的算式中，只要注意它們的特性，就可知道它們正確與否省掉了重新驗算的一層麻煩。
- 2 老師告訴我們現在他批改分數與小數的化法的算式時，再也不必先行計算了，只要依照以上的四點發現，就可以批改試卷了。