係數不定時方程式根範圍的最新解法

國中教師組數學第二名

桃園縣立壽山國民中學　　　　作　者：石　靜　淑

一、動機和目的：

方程式根的解應用在科學、工程及經濟學上是非常廣泛的，例如在解微分方程，解動態系統輸出的方程式或成本利潤的分析等，都要利用到方程式的根，這些都是數學最基本的利用。

目前中學的數學教學，對於方程式根的解都是就已知的方程式，利用數學方法或公式來解，但實際上方程式的係數並不是已知，必須由讀者按問題的需要自己去找尋，當方程式得到以後，才可用基本的方法，或由計算機來解其根。這裏所要考慮到的是，當讀者尋找方程式，因所利用測量儀器精確與否，便使方程式和實際上眞正的係數有所差別；例如測量儀器是一根尺，而所要量的長度是方程式中的一個係數，若尺的刻度不精密，誤差就大，尺的刻度精密誤差就小，但總是會有誤差存在，這是一個最簡單的例子，也就是中學的數學及物理教科書上爲什麼會有「有效數字」的介紹。因此，在實際的情況下方程式的係數是不確定的；換言之，方程式中的係數只是知道在一個範圍內，而不知其眞正之値。

本文爲解此種方程式的根所近似的範圍，下面所解的方程式有(1)線性聯立方程式，(2)一元 n 次方程式。本文的目的有三：(1)介紹實際上方程式和理論上方程式的差別，(2)介紹學生對於不等式及(3)斜率的應用。

二、線性聯立方程式（多元一次聯立方程式）係數不確定時根的範圍

一般多元一次聯立方程式可以寫成爲：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots\cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

若用矩陣形式表示則可另寫成：

$$Ax = b \tag{2}$$

上式中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_1 \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_1 \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

國中數學課本已談及如何解多元一次聯立方程式，高中課本亦有用矩陣的解法，因此(2)式之解可以爲：

$$x = A^{-1}b$$

但若考慮到係數不確定的問題時，(1)式必須寫爲

$$\begin{cases} (a_{11}+\Delta a_{11})(x_1+\Delta x_1) + (a_{12}+\Delta a_{12})(x_2+\Delta x_2) + \cdots \\ \quad + (a_{1n}+\Delta a_{1n})(x_n+\Delta x_n) = b_1 + \Delta b_1 \\ (a_{21}+\Delta a_{21})(x_1+\Delta x_1) + (a_{22}+\Delta a_{22})(x_2+\Delta x_2) + \cdots \\ \quad + (a_{2n}+\Delta a_{2n})(x_n+\Delta x_n) = b_2 + \Delta b_2 \\ \qquad\quad \vdots \\ (a_{n1}+\Delta a_{n1})(x_1+\Delta x_1) + (a_{n2}+\Delta a_{n2})(x_2+\Delta x_2) + \cdots \\ \quad + (a_{nn}+\Delta a_{nn})(x_n+\Delta x_n) = b_n + \Delta b_n \end{cases} \tag{4}$$

上式中 Δa_{ij}^{i} 和 Δb_i 便是不確定之值，通常 $|a_{ij}| \gg |\Delta a_{ij}|$，$|b_i| \gg |\Delta b_i|$ 。同理(4)式可寫爲

$$(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b + \Delta b$$

而式中

$$\Delta A=\begin{pmatrix}\Delta a_{11} & \Delta a_{12} & \cdots & \Delta a_{1n}\\ \Delta a_{21} & \Delta a_{22} & \cdots & \Delta a_{2n}\\ \vdots & & & n\\ \Delta a_{n1} & \Delta a_{n2} & \cdots & \Delta a_{nn}\end{pmatrix}_{1} \qquad \Delta x=\begin{pmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\\ \vdots\\ \Delta x_n\end{pmatrix}_{1}$$

$$\Delta b=\begin{pmatrix}\Delta b_1\\ \Delta b_2\\ \vdots\\ \Delta b_n\end{pmatrix}$$

因爲 ΔA.，Δx 爲很小之數目可以忽略，(5)式減掉(2)式得

$$A\,\Delta x=\Delta b-\Delta Ax \tag{6}$$

根的誤差之解爲

$$\Delta x=A^{-1}\,(\,\Delta b-\Delta Ax\,) \tag{7}$$

而根由係數誤差所產生之範圍可利用不等式的特性從(7)式中找出，也就是將(7)式中每個數目的負號變正而求得 Δx 的值，而此值便就是誤差的絕對值。例 2 便就是找出根範圍的典型例子。首先我們先介紹例 1 以了解(7)式之存在。

例 1：聯立方程式 $\begin{cases}x_1+2x_2=3\\ x_1+x_2=2\end{cases}$ 的根爲 $x_1=1$，$x_2=1$

用(7)式另一組聯立方程式 $\begin{cases}1.01y_1+2y_2=3.02\\ 1.01y_1+1.01y_2=2.01\end{cases}$

之根？　　解：從題中可知：

$$\Delta A=\begin{pmatrix}0.01 & 0\\ 0.01 & 0.01\end{pmatrix} \qquad \Delta b=\begin{pmatrix}0.02\\ 0.01\end{pmatrix} \qquad A^{1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

利用(7)式得

$$\begin{pmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}0.02\\ 0.01\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0.01 & 1\\ 0.01 & 0.01\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-0.03\\0.02\end{pmatrix}$$

則

$$y_1 = \Delta x_1 + x_1 = 0.97$$

$$y_2 = \Delta x_2 + x_2 = 1.02$$

但若直接解根可得 $y_1 = 0.9699$　$y_2 = 1.020202$，與所得之結果非常接近，因此可知(7)式是對的。

例 2：在上例中通常 ΔA 是用絕對值來表示其係數的誤差。若

$$0.01 \geq |\Delta a_{11}| \qquad 0 = |\Delta a_{12}|$$

$$0.01 \geq |\Delta a_{21}| \qquad 0.01 \geq |\Delta a_{22}|$$

$$0.02 \geq |\Delta b_1| \qquad 0.02 \geq |\Delta b_2|$$

則最大誤差範圍為將(7)式中所有負號改為正號。

得

$$\Delta x = \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}0.02\\0.01\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0.01 & 0\\0.01 & 0.01\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}0.09\\0.06\end{pmatrix}$$

因此兩根之範圍為

$$1 - 0.09 \leq x_1 \leq 1 + 0.09 \Rightarrow 0.91 \leq x_1 \leq 1.09$$

$$1 - 0.06 \leq x_2 \leq 1 + 0.06 \Rightarrow 0.94 \leq x_2 \leq 1.06$$

三、一元 n 次方程式係數不確定時根的範圍：

一般理論上的一元 n 次方程式形式如下：

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (8)$$

這裏的係數 a_i 均為實數，又因(8)式的根可以解出（如用電子計算機解之，所以假設(8)式的根 r_1，r_2 …… r_n 為已知，當然此根可以實數或複數。但在實際的情況下必須考慮方程式係數之誤差，因此(8)式應寫為

$$f_1(x) = x^n + (a_{n-1} + \Delta a_{n-1})x^{n-1} + (a_{n-2} + \Delta a_{n-2})x^{n-2} +$$

$$\cdots\cdots + (a_0 + \Delta a_0)$$
$$= f(x) + (\Delta a_{n-1} x^{n-1} + \Delta a_{n-2} x^{n-2} + \cdots\cdots + \Delta a_0)$$
$$= 0 \tag{9}$$

Δa_i 爲係數的誤差，只知其範圍而不知其眞正值，且在實際的情況下 $|a_i| \gg |\Delta a_i|$ 。因爲 Δa_i 爲一個範圍，因此(9)式的根也是在一個範圍內，下面也就是找範圍的方法。

假設在圖 1 中實線爲 f (x)之圖形，虛線爲 $f_1(x)$ 之圖形， f (x)交 x 軸於 B 點，也就是其根 r_i ， $f_1(x)$ 交 x 軸於 C 點其根也就是 $r_i - \Delta r_i$ 假設此實線和虛線兩個圖形在 x 軸附近爲平行（事實上並非平行，只是接近於平行而已），而 A 點離 x 軸的高度也可以認爲 $\Delta a_{n-1} r_i^{n-1} + \Delta a_{n-2} r_i^{n-2} + \cdots\cdots + \Delta a_0$ （事實上只是趨近於）而線條 $\overline{AC}$ 之斜率爲 f(x)之導數，取 r_i 值，得

$$f'(r_i) = n r_i^{n-1} + (n-1) a_{n-1} r_i^{n-2} + \cdots\cdots + a_1$$

在 A B C 三角形中

$$\Delta r_i = \overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{f'(r_i)}$$

所以 Δr_i 便是根的變動值，而 $r_i - \Delta r_i$ 便是(9)式的根。

若要求得根的最大範圍時，可將(10)式利用不等式特性可得

$$|\Delta r_i| \le \frac{|\Delta a_{n-1} r_i^{n-1}| + |\Delta a_{n-2} r_i^{n-2}| + \cdots\cdots + |a_0|}{|f'(r_i)|}$$

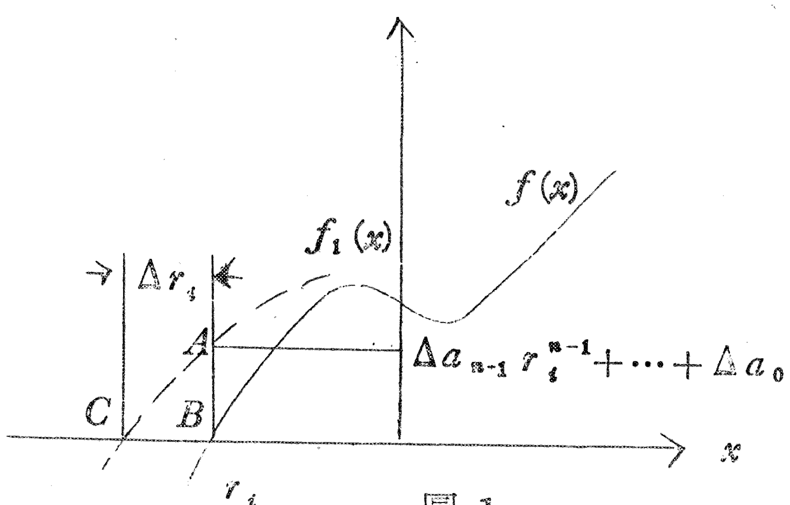

圖 1

上面的式子便是我們的結果。

下面介紹一個簡單的例子以運用(11)式而得到根的範圍。

例3：

$f(x)=x^2+3x+2=0$ 之兩根爲 $r_1=-1$，$r_2=-2$

在實際情況下必須考慮到誤差的係數，則誤差之方程式爲

$f_1(x)=x^2+(3+\Delta a_1)x+(2+\Delta a_0)$ 且已知

$0.02\geq|\Delta a_1|\qquad 0.0301\geq|\Delta a_0|$

利用(11)式求得

$$|\Delta r_1|\leq\frac{|\Delta a_1 r_1|+|\Delta a_0 r_1|}{|f'(r_1)|}$$

$$=\frac{|0.02(-1)|+|0.0301|}{1}=0.0501$$

$$|\Delta r_2|\leq\frac{|\Delta a_1 r_2|+|\Delta a_0 r_2|}{|f'(r_2)|}$$

$$=\frac{|0.02(-2)|+|0.0301|}{1}=0.0701$$

因此 $f_1(x)=0$ 之兩個根的範圍爲

$$-1-0.0501\leq r_1'\leq-1+0.0501\quad\Rightarrow$$
$$-1.0501\leq r_1'\leq-0.9499$$

$$-2-0.0701\leq r_2'\leq-2+0.0701\quad\Rightarrow$$
$$-2.0701\leq r_2'\leq-1.9299$$

如此根的範圍也就被求出來了。

四、結　論：

本文提出係數不定的方程式解法，根的範圍可以被求出來，由例子證明此一近似解法的精確性是相當良好的。

比起參考資料所列的方法，本法實較之爲簡單，且可省掉許多計算上的不便。