有趣的分液法

國中組數學第三名

台北縣立中和國民中學　　　　作　　者：劉敬德、楊小天
李霖鴻、江宗榮
指導老師：張木濱、李季芳

一、研究動機：

從國二開始，因爲經常在實驗室裏做化學實驗，發現實驗室裡，有很多大小不同的只知容量，但無刻度之燒杯，有一次興致一來想利用這些大小不同的燒杯，來平分一個注滿液體的燒杯中溶液，於是激發了我們研究如何在量計工具不足的情況下來分裝液體。

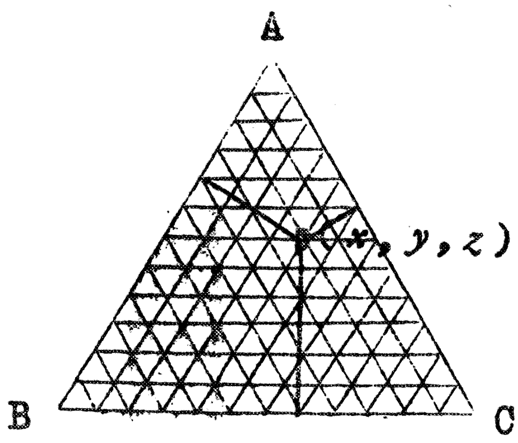
二、問題：

今有12c.c.之燒杯，裝滿液體及有9c.c.及5c.c.容量之空燒杯，如何能將該液體分成兩相等部分？（註只知杯容量但無刻度）在此我們能計量出只是12c.c.，9c.c.，5c.c.，或者由任二瓶中傾倒所能計量出者，例如 $12-9=3$，$12-5=7$，$9-5=4$ 或 $[5-(9-7)]=3$ 等度量。

三、研究：

當在傾倒時三瓶液體不斷改變，所以我們就想利用三個未知數X、Y、Z來表示其改變的情形，在國二時，我們學過平面的直角坐標，但其只有兩個未知數X、Y，而且我們聽老師說，平面直角坐標系是由直線坐標系推廣而成的。於是我們也推廣一個含有三元未知數的坐標系，終於我們在不斷的研究下發現有一種三元坐標系，它能解決我們的問題，現敘述如下：

此坐標系的三軸X、Y、Z軸分別爲等邊三角形的三邊，然後再用三系平行線，將平面分成小的等邊三角形嵌成圖。如圖：



若此之三角形ABC平面中具邊長a及高h，一點p之三元坐標值定義爲p與三邊$\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$之距離x、y、z，當p在三角形以內時，視爲正值。

乃稱p點坐標爲(x、y、z)。

∵(△PBC之面積)+(△PCA之面積)+(△PAB之面積)=(△ABC之面積)

$$\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}ay+\frac{1}{2}az=\frac{1}{2}ah$$

$\therefore x+y+z=h$

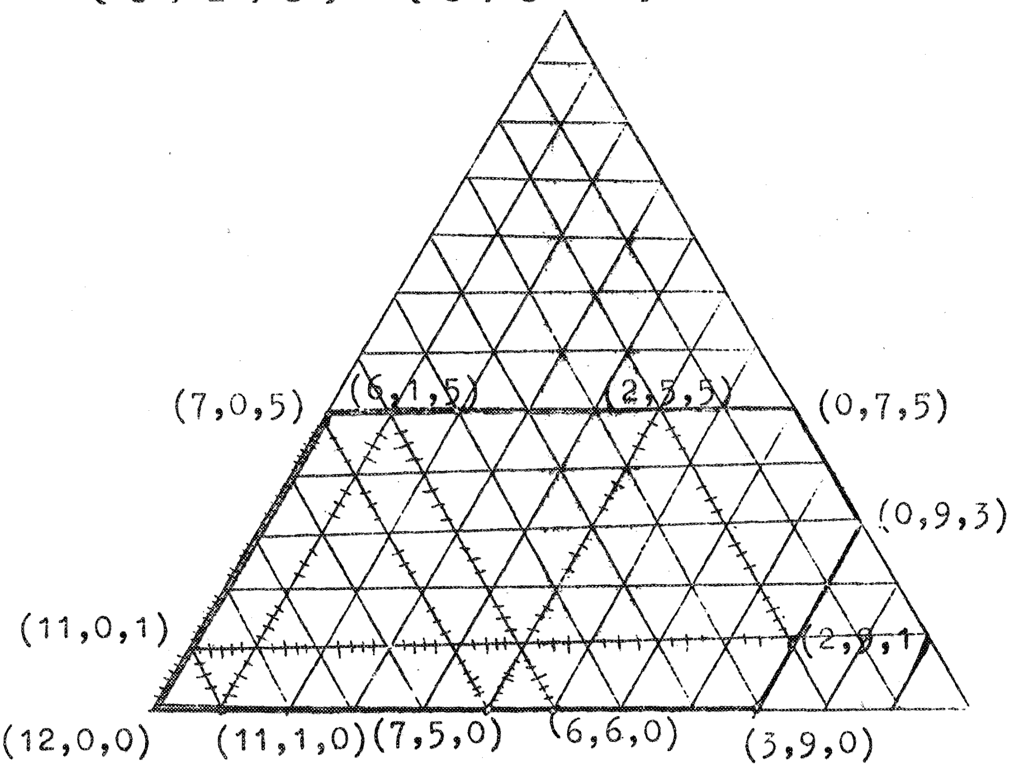
$\overleftrightarrow{BC}$ 邊之方程式爲 $x=0$

$\overleftrightarrow{AC}$ 邊之方程式爲 $y=0$

$\overleftrightarrow{AB}$ 邊之方程式爲 $z=0$

而諸頂點A，B，C有坐標值(h，o，o)，(o，h，o)，(o，o，h)點Q(x，y，z)沿平行線系運動時，有一變數保持不動，其他二變數一增一減，但$x+y+z=h$恒保持一個定值。(表任何情勢下，三個變量，有一常數和)。所以我們假如要把h cc.液體分裝在三個容器裏並設三容器容量分別爲a，b，c，cc.，且$a>b>c$，並把問數表爲〔h，a，b，c〕，點Q(x，y，z)分別表示三個容器在傾倒過程中之變化量，現在對於傾倒方式：

是一瓶保持不動，另二瓶不是倒空就是注滿，且三瓶中液體總量恒保持定值。此三元坐標系在三角形內的（ x ， y ， z ）坐標，$x+y+z=h$，每一點Q（ x ， y ， z ）沿平行線運動有一變數不變，另二變數一增一減。此與三瓶傾倒方式非常符合，所以三瓶變化量（ x ， y ， z ）將被限爲 $o \leq x \leq a$ ，$o \leq y \leq b$ ，$o \leq z \leq c$ ，也就是變化量（ x ， y ， z ）將由 $x=o$ ，$x=a$ ，$y=o$ ，$y=b$ ，$z=o$ ，$z=c$ ，六線所界。由是我們可適當選六線所成頂點之一做爲出發點，每次沿一直線前進至六線邊或頂點才改變另一條直線前進（其理由：沿一直線進行表示其傾倒方式爲一瓶保持不動，其他二瓶傾倒一增一減，在直線進行表示傾倒動作在進行）然後至六線邊或其頂點方改變另一直線進行（其理由：爲容器無刻度須倒空或注滿，表示至 $x=o$ 或 a ，y $=o$ 或 b ，$z=o$ 或 c 之任一線才能量出度量）如此繼續進行至止於所要求之點，且此點必須在六線邊上。
例如此問題首由頂點：
（ 12 ， 0 ， 0 ）→（ 7 ， 0 ， 5 ）→（ 7 ， 5 ， 0 ）→（ 2 ，5 ， 5 ）→（ 2 ， 9 ， 1 ）→（ 11 ， 0 ， 1 ）→（ 11 ， 1 ， 0 ）→（ 6 ， 1 ， 5 ）→（ 6 ， 6 ， 0 ）



解釋如下：

①（12，0，0）→（7，0，5）

表示將第三瓶注滿，第一瓶剩7 c.c.

②（7，0，5）→（7，5，0）

表示將第三瓶全倒入第二瓶。

③（7，5，0）→（2，5，5）

表示將第三瓶注滿，第一瓶剩2 c.c.

④（2，5，5）→（2，9，1）

表示將第二瓶注滿，第三瓶剩1 c.c.。

⑤（2，9，1）→（11，0，1）

表示將第二瓶全倒入第一瓶。

⑥（11，0，1）→（11，1，0）

表示將第三瓶全倒入第二瓶。

⑦（11，1，0）→（6，1，5）

表示將第三瓶注滿，第一瓶剩6 c.c.

⑧（6，1，5）→（6，6，0）

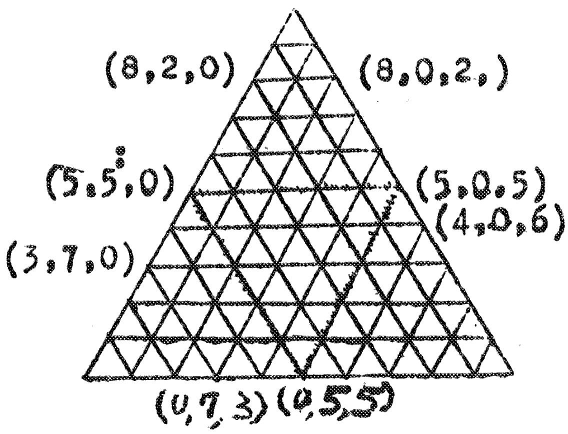
表示將第三瓶全倒入第二瓶。

例：〔h，a，b，c〕=〔10，8，7，6〕時，其圖形為：

$o \leq x \leq 8$

$o \leq y \leq 7$

$o \leq z \leq 6$



因三點（o，5，5），（5，0，5），（5，5，0）形成一三角路線進行環繞，而不能由任一其它路線進入，即表示本問題不能用8，7，6，三種度量容器來平分10 c.c.液體。亦即 h

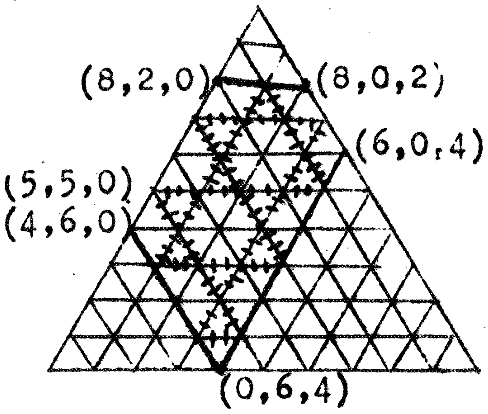
＝2d≧a＞b＞c＞d時（d，d，o），（o，d，d），（d，o，d）在所界邊上形成一三角路線進行環繞而不能由任一其它路線進入。此問題便不能解決。

例如：〔10，8，6，4〕中，其中路線之前往（5，5，0）者，我逆著推求其路線，形成一小等邊三角形，及正六角形之形態，且逆推到最後一條路線又回到（5，5，0），此表示奇數，從不能用全爲偶數之瓶量計。

$0 \leq x \leq 8$

$0 \leq y \leq 6$

$0 \leq z \leq 4$



四、結論：

由六線所界頂點爲起點（x，y，z），開始沿直線系運動，假如不能到達（d，d，o）表示不能平分此液體，其法可由如下：（d，d，o）在界線之點逆求其所來的全部路線如果形成一個循環路線，表示無解。