堆垛問題的解法

國中組數學第三名

屏東縣立明正國中　　作　者：鍾佳濱．黃仲良
指導老師：黃　春　成

一、研究動機：

老夫子向大蕃薯買雞蛋，一不小心竟把堆垛在桌上的雞蛋，翻滾到地上砸碎了。老夫子說，只要大蕃薯能說出雞蛋的總數，他願意照價賠錢，這下子大蕃薯的頭更大了，應該怎麼計算呢？

二、研究問題：

㈠圓球體和正方體的堆垛有那幾種型式。

㈡堆垛的各層個數和層數的關係。

㈢探討堆垛總數的計算公式。

三、研究內容：

㈠圓球體的堆垛可分為四種型式：

(1)各層都排成正方形，頂層只放一個，把它稱為正方錐型。

(2)各層都排成正三角形，頂層只放一個，把它稱為正三角錐型。

(3)各層都排成矩形，頂層為一排，應放二個以上，把它稱為等腰三角梯型。

(4)各層都排成矩形，頂層有二排以上，每排都放三個以上，稱它為等腰梯型。

㈡正方體的堆垛型式有很多變化，舉出六種基本的型式，如下圖（略）

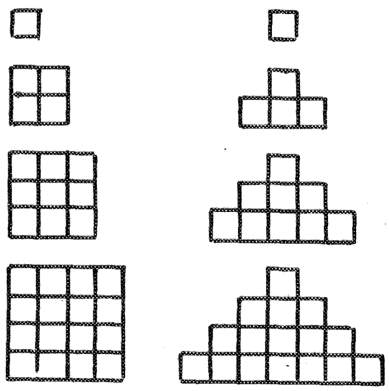
㈢求正方錐型堆垛的總數

(1)四層的堆垛

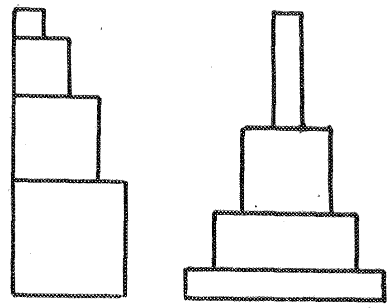
方格拼排形式　　　方格拼合形式

層次	個數
1	1
2	4
3	9
4	16

第一式　第二式



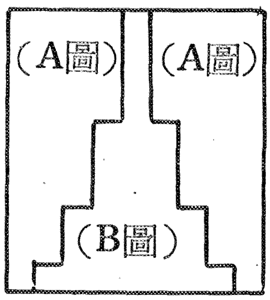
第一式　第二式



（A圖）　（B圖）

總數 30

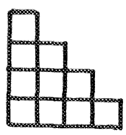
由兩個A圖和一個B圖可拼合成C圖



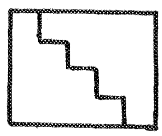
C　圖

（$1+2+3+4$）用方格拼排成D圖

兩個D圖拼合成E圖



D圖



E圖

由E圖得知　$1+2+3+4=\frac{4(4+1)}{2}$

由C圖得知

格數相當於總數的三倍

$$1+4+9+16=(2\times4+1)\times(1+2+3+4)\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{2\times4+1}{1}\times\frac{4(4+1)}{2}\times\frac{1}{3}$$

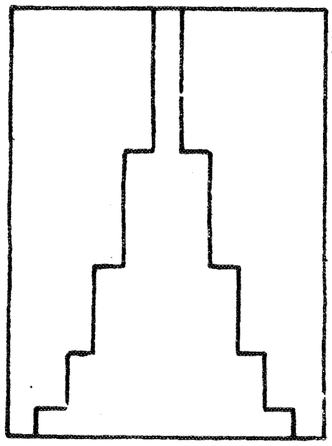
(2)設 n 表示層數　S_n 表示總數

則 $S_n = \frac{2n+1}{1} \times \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{1}{3}$

$$= \frac{n}{1 \times 2 \times 3} \cdot (n+1)(2n+1)$$

(3)驗證

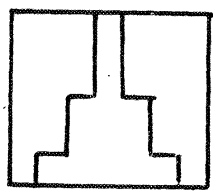
(a)五層的堆垛



$$\frac{5(5+1)}{1\times2\times3}\times(2\times5+1)$$

$$= 55$$

(b)三層的堆垛



$$\frac{3(3+1)}{1\times2\times3}\times(2\times3+1)=14$$

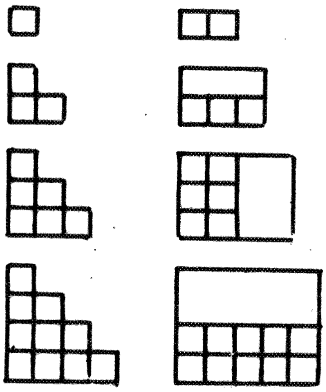
(四)求三角錐型堆垛的總數

(1)四層的堆垛

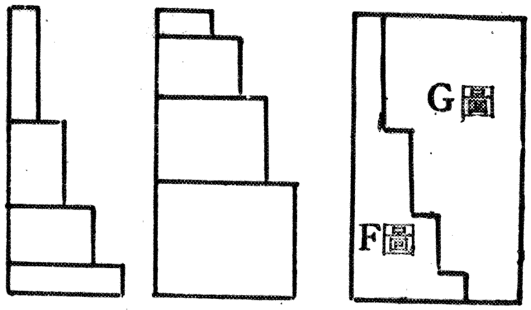
方格拼排形式　　　　方格拼合形式

層次	個數
1	1
2	3
3	6
4	10

方格拼排形式：第一式　第二式



方格拼合形式：第一式　第二式



F 圖　　G 圖　　H 圖

總數 20

H圖相當於總數的三倍。

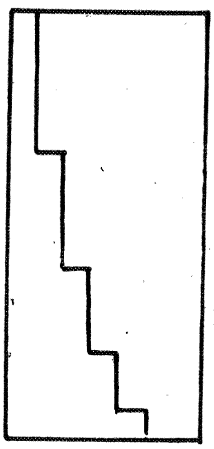
由H圖得知$(1+3+6+10)=(4+2)\times\frac{4(4+1)}{2}\times\frac{1}{3}$

(2)設 n 表示層數　S_n 表示總數

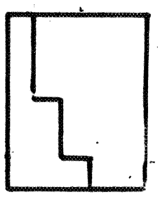
則$S_n=\frac{n}{1\times2\times3}\cdot(n+1)(n+2)$

(3)驗證

(a)五層的堆垛



(b)三層的堆垛



$\frac{3}{1\times2\times3}\cdot(3+1)(3+2)=10$

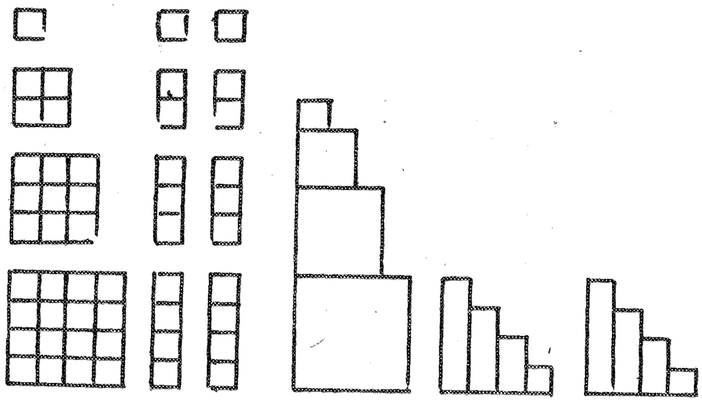
$\frac{5}{1\times2\times3}\cdot(5+1)(5+2)=35$

(五)求等腰三角梯形堆垛的總數

(1)四層的堆垛，頂層有三個

層次	個數
1	3
2	8
3	15
4	24

方格拼排形式



總數 50

由上圖得知 $3+8+15+24$

$$=(1+4+9+16)+(1+2+3+4)\times 2$$

$$=\frac{4(4+1)(2\times 4+1)}{1\times 2\times 3}+\frac{4(4+1)}{2}\times 2$$

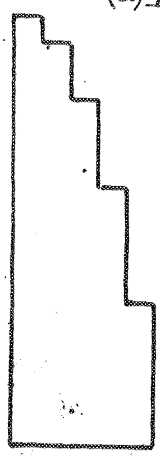
(2)設 n 表示層數，a 表示頂層個數，S_n 表示總數

$$\text{則}S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{1\times 2\times 3}+\frac{n(n+1)}{2}\times(a-1)$$

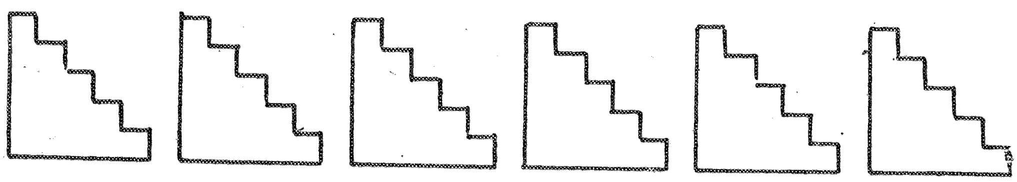
$$=\frac{n}{1\times 2\times 3}\cdot(n+1)(2n-2+3a)$$

(3)驗證：

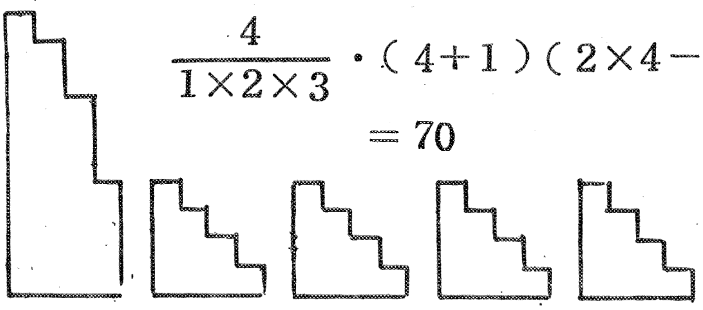
(a)五層的堆垛，頂層有七個



$$\frac{5}{1\times 2\times 3}\cdot(5+1)(2\times 5-2+3\times 7)=145$$



(b)四層的堆垛，頂層有五個

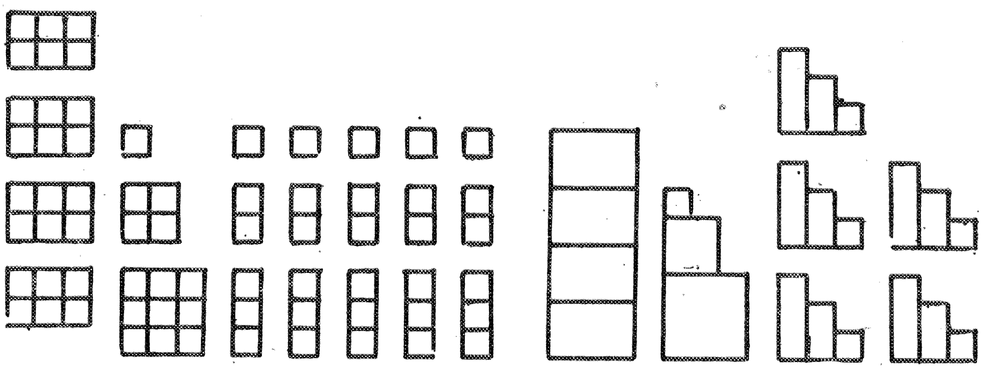


$$\frac{4}{1\times2\times3}\cdot(4+1)(2\times4-2+3\times5)$$
$$=70$$

㈥求等腰梯型堆垛的總數

(1)四層的堆垛，頂層有三排，每排有二個

層次	個數
1	6
2	12
3	20
4	30



總數 68

由上圖得知 $6+12+20+30$

$$=(3\times2\times4)+\frac{3(3+1)(2\times3+1)}{1\times2\times3}$$
$$+\frac{3(3+1)}{2}\times5$$
$$=68$$

(2)設 a 表示頂層排數，b 表示頂層各排個數，n 表示層數，

S_n 表示總數

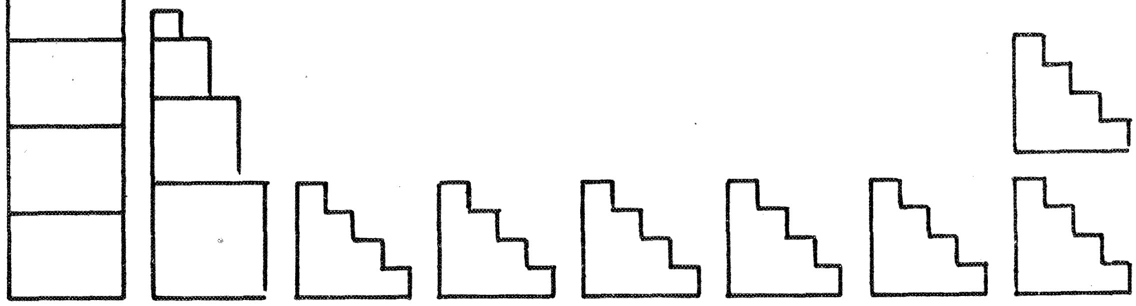
$$\text{則 } S_n=n\cdot a\cdot b+\frac{(n-1)(n-1+1)[2(n-1)+1]}{1\times2\times3}$$
$$+\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}\times(a+b)$$

$$=\frac{n}{1\times2\times3}\times\{6ab+(n-1)(2n-1)+3(n-1)(a+b)\}$$

(3)驗證：

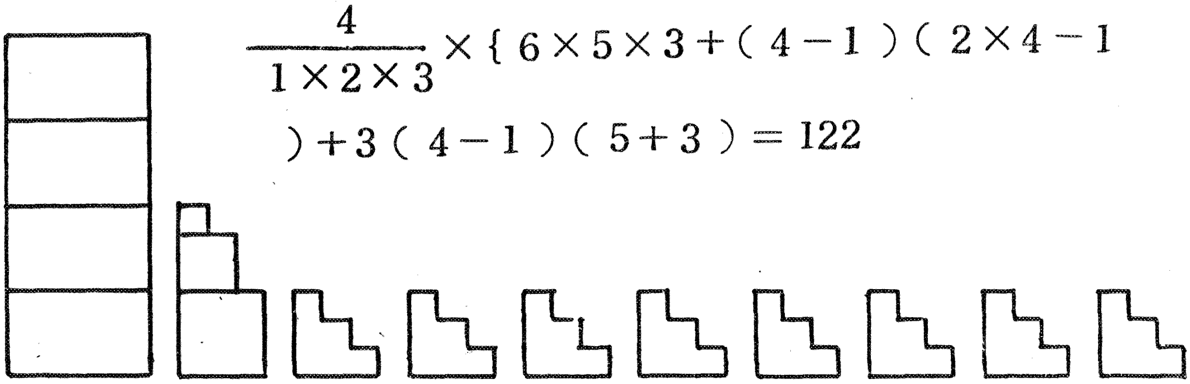
(a)五層的堆垛，頂層有四排，每排有三個

$$\frac{5}{1\times2\times3}\times\{6\times4\times3+(5-1)(2\times5-1)+3(5-1)(4+3)\}=160$$



(b)四層的堆垛，頂層有五排，每排有三個

$$\frac{4}{1\times2\times3}\times\{6\times5\times3+(4-1)(2\times4-1)+3(4-1)(5+3)\}=122$$

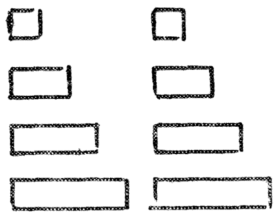


(七)求正方體堆垛第一型的總數

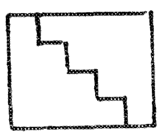
(1)四層的堆垛

層次	個數
1	2
2	4
3	6
4	8
總數	20

方格拼排形式



方格拼合形式



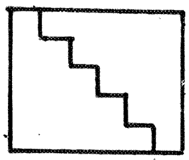
由上圖得知　$2+4+6+8=4(4+1)=20$

(2)設 n 表示層數，S_n 表示總數

則　$S_n=n(n+1)$

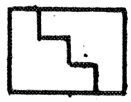
(3)驗證：

(a)五層堆垛



$5\times(5+1)=30$

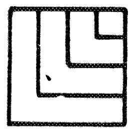
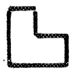
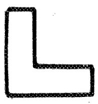
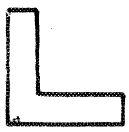
(b)三層堆垛



$3\times(3+1)=12$

(八)求正方體堆垛第二型的總數

(1)四層的堆垛

層次	個數	方格拼排形式	方格拼合形式
1	1		
2	3		
3	5		
4	7		
總數	16		

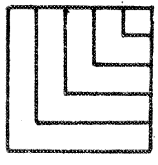
由上圖得知　$1+3+5+7=4\times4=16$

(2)設 n 表示層數，S_n 表示總數

則　$S_n=n^2$

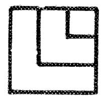
(3)驗證：

(a)五層的堆垛



$5\times5=25$

(b)三層的堆垛



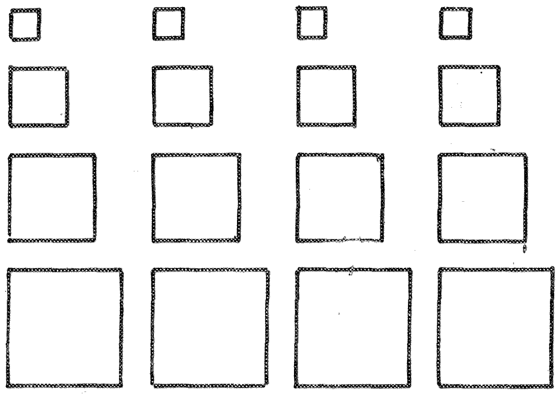
$3\times3=9$

(九)求正方體堆垛第三型的總數

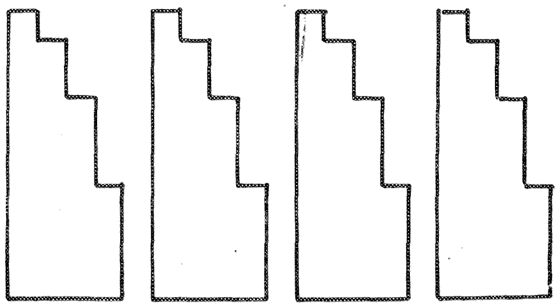
(1)四層的堆垛

層次	個數
1	4
2	16
3	36
4	64
總數	120

方格拼排形式



方格拼合形式



由上圖得知 $4+8+36+64=(1+4+9+16)\times 4$

$$=\frac{4(4+1)(2\times 4+1)}{6}\times 4$$

$$=120$$

(2)設 n 表示層數，S_n 表示總數

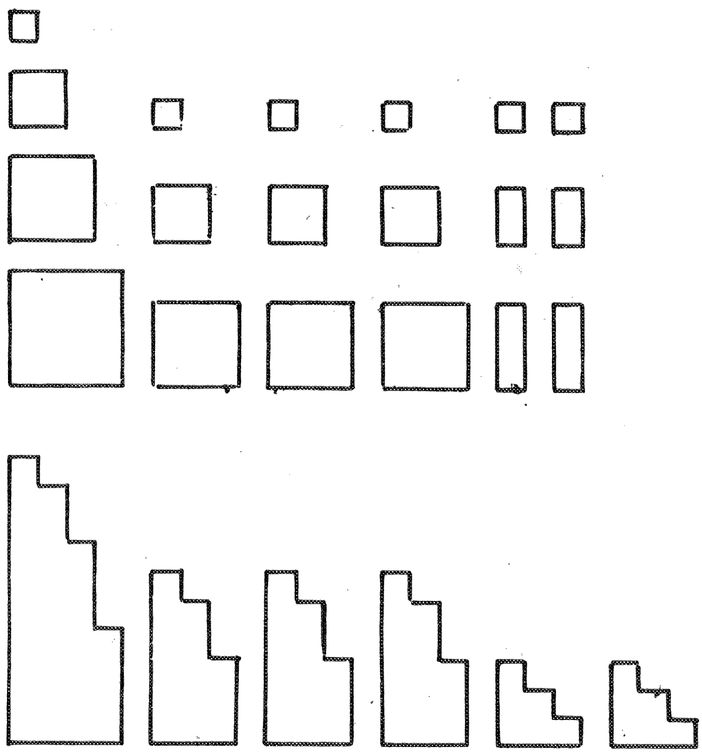
$$S_n=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\times 4$$

(3)驗證：（略）

(十)求正方體堆垛第四型的總數

(1)四層的堆垛

層次	個數	方格拼排形式
1	1	
2	9	
3	25	
4	49	
總數	84	



由上圖得知

$1+9+25+49$

$=(1+4+9+16)+(1+4+9)\times 3+(1+2+3)\times 2$

$=\dfrac{4(4+1)(2\times 4+1)}{6}+\dfrac{3(3+1)(2\times 3+1)}{6}\times 3+\dfrac{3(3+1)}{2}\times 2$

$=84$

(2)設 n 表示層數，S_n 表示總數

則 $S_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\dfrac{(n-1)(n-1+1)[2(n-1)+1]}{6}\times 3+\dfrac{(n-1)(n-1+1)}{2}\times 2$

$$=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)+\frac{n}{6}(n-1)(2n-1)\times 3$$

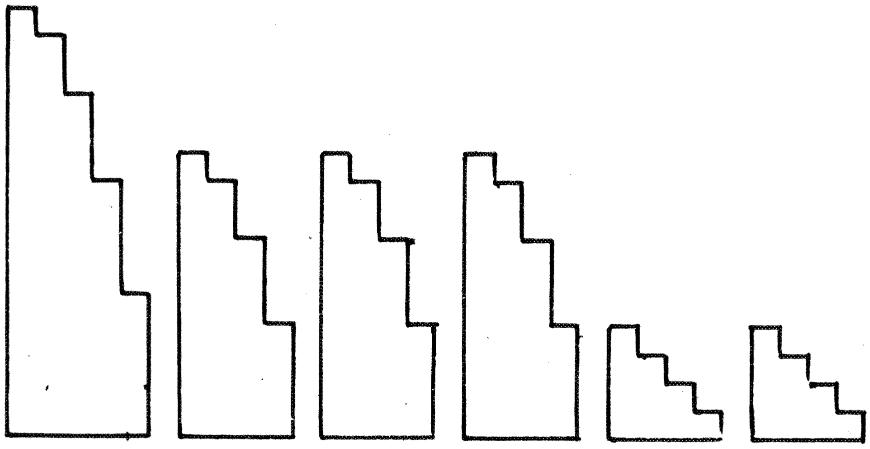
$$+n(n-1)$$

$$=\frac{n}{6}[(n+1)(2n+1)+3(n-1)(2n-1)$$

$$+6(n-1)]$$

(3)驗證

(a)五層的堆垛



$$\frac{5}{6}[(5+1)(2\times 5+1)+3(5-1)(2\times 5$$

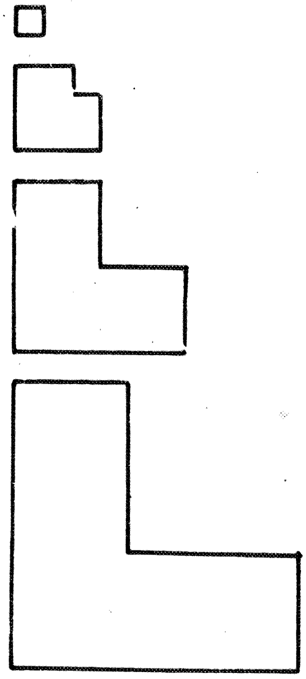
$$-1)+6(5-1)]=165$$

(十一)求正方體堆垛第五型的總數

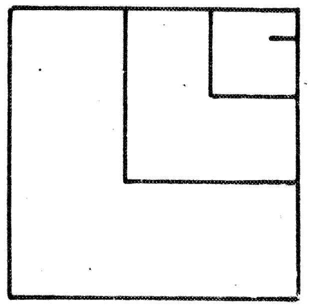
(1)四層的堆垛

層次	個數
1	1
2	8
3	27
4	64
總數	100

方格拼排形式



方格拼合形式



由上圖得知

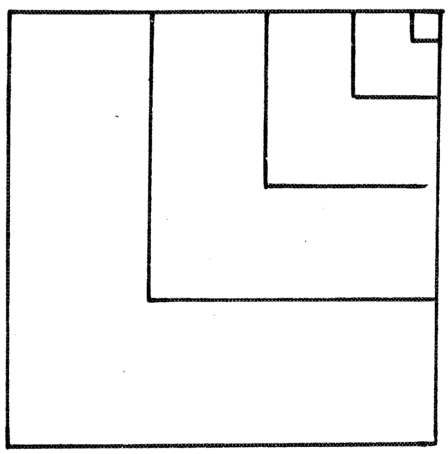
$$1+8+27+64=(1+2+3+4)(1+2+3+4)$$
$$=\frac{4(4+1)}{2}\times\frac{4(4+1)}{2}$$

(2)設 n 表示層數，S_n 表示總數

則 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}$

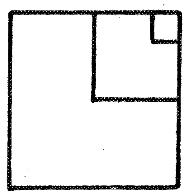
(3)驗證

(a)五層的堆垛



$\leftarrow \frac{5(5+1)}{2}\times\frac{5(5+1)}{2}=225$

(b) 三層的堆垛



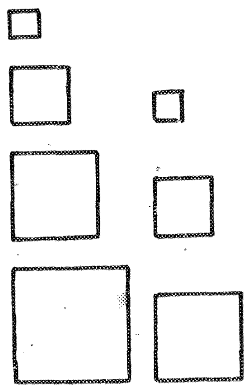
$\uparrow \frac{3(3+1)}{2}\times\frac{3(3+1)}{2}$

$=36$

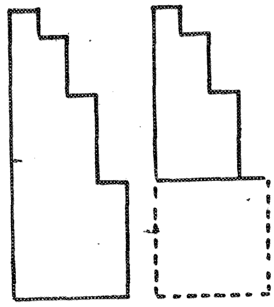
㈢求正方體堆垛第六型的總數

(1)四層的堆垛

層次	個數	方格拼排形式
1	1	
2	5	
3	13	
4	25	



方格拼合形式



總數 44

由上圖得知

$$1+5+13+25=(1+4+9+16)\times 2-16$$

$$=\frac{4(4+1)(2\times 4+1)}{6}\times 2-(4\times 4)$$

$$=44$$

(2)設 n 表示層數，S_n 表示總數

$$\text{則 } S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\times 2-n^2$$

(3)驗證：（略）

四、研究心得：

大蕃薯的煩惱，給了我們研究的靈感，雖然我們研究的結果，未必能解決大蕃薯的難題。然而，我們不但找到了堆垛問題的解法，同時還發現了有趣的方程式，心裏感到無限的興奮，更加深了我們研究數學問題的興趣和信心。

有趣的方程式

(1) $1+2+3\cdots\cdots\cdots+n=\frac{n}{2}\cdot(n+1)$

(2) $1^2+2^2+3^2 \cdots\cdots+n^2=\frac{n}{1\times2\times3}\cdot(n+1)(2n+1)$

(3) $1+(1+2)+(1+2+3)\cdots\cdots+(1+2+3+\cdots\cdots+n)=\frac{n}{1\times2\times3}(n+1)(n+2)+[n^2+na]$

(4) $(1^2+a)+(2^2+2a)+(3^2+3a)$

$=\frac{n}{1\times2\times3}(n+1)(2n-2+3a)$

(5) $a\cdot b+(a+1)(b+1)+(a+2)(b+2)+\cdots\cdots(a+n-1)(b+n-1)$

$=\frac{n}{1\times2\times3}\times\{6ab+(n-1)(2n-1)+3(n-1)(a+b)\}$

(6) $2+4+6+\cdots\cdots+2n=n(n+1)$

(7) $1+3+5+\cdots\cdots(2n-1)=n^2$

(8) $2^2+4^2+6^2+\cdots\cdots\cdots+(2n)^2$

$=[\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)]\times4$

(9) $1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2=\frac{n}{6}[(n+1)(2n+1)+3(n-1)(2n-1)+6(n-1)]$

(10) $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=[\frac{n(n+1)}{2}]^2$

(11) $1+(1+4\times1)+[1+4(1+2)]+[1+4(1+2+3)]+\cdots\cdots+[1+4(1+2+3\cdots\cdots+n-1)]=\frac{n}{3}(n+1)(2n+1)-n^2$