

# 固體彈性的研究

## 國中組物理第二名

高雄縣立阿蓮國中

作者：卓美賢·李世文

指導老師：黃鐸棣·李 暄

### 一、動 機：

(一)在物理課本第一冊第五章中談到彈性問題，內中虎克定律令人很感興趣，但不夠完整。例如(1)螺旋彈簧的半徑對形變的變化如何？(2)壓縮及彎曲扭轉是否也能適用虎克定律？(3)如何製作儀器來測定各種彈性限度或常數。

(二)在同書第四章中我們已學會了力矩的計算，把他用在彎曲與扭轉形變上是很適合的。

(三)在化學課本第一、二冊中我們又學到了亞佛加厥常數是否可把彈性實驗的結果用來計算晶格間的關係。

(四)我們又學過改變變因、控制變因等實驗方法，正好藉此實用一下。

### 二、原理依據：

(一)虎克定律：彈性體在彈性限度內，其因受外力 $F$ 所產生的形變量 $\Delta l$ 與所受外力成正比( $\Delta l_1 : \Delta l_2 = F_1 : F_2$ )，可用以測定伸長壓縮形變與外力的關係。

(二)力矩 $M = \text{力 } F \times \text{力臂 } l$ ，可用來測定彎曲及扭轉形變。

### 三、實驗儀器設計製作：

(一)構造：如圖(1)

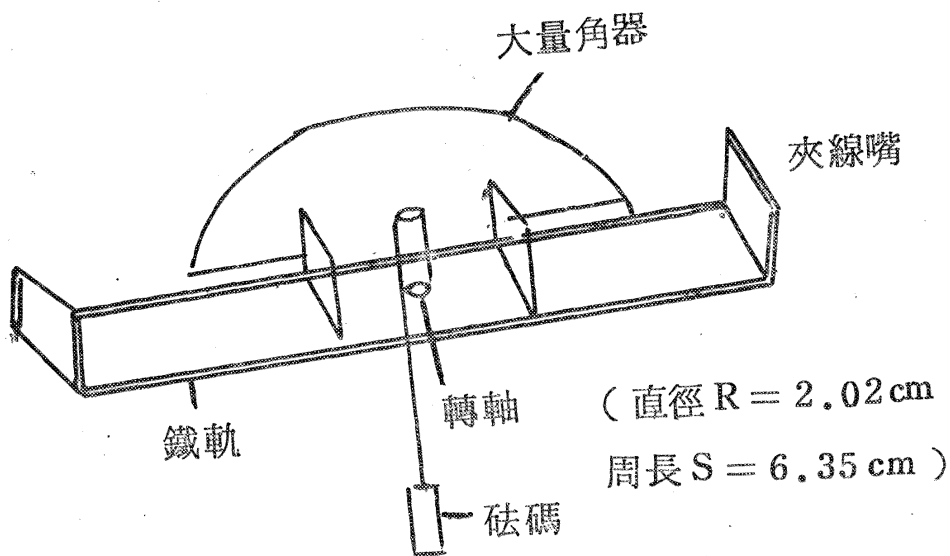


圖 (1)

(一)用法：(略)

(二)誤差：

①求轉軸的最大靜摩擦力，以彈簧拉引轉軸，知其最大摩擦力

約為  $14 \text{ gw}$ ，而轉軸的重量為  $330 \text{ gw}$ ，故靜摩擦係數  $\mu =$

$\frac{F}{W} = 0.042$ 。所以當在使用本儀器時，若所加之力小於  $14$

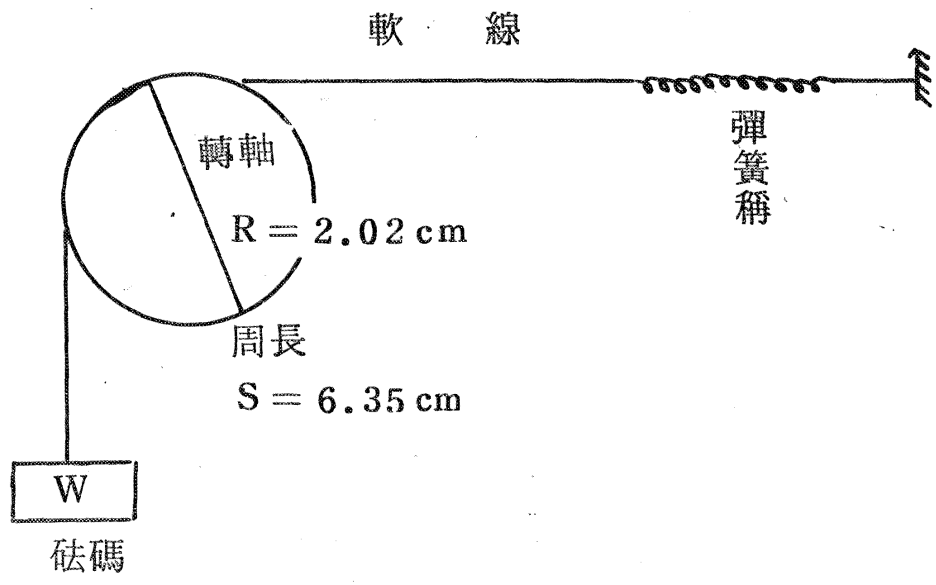
$\text{gw}$ ，則不能使用。

②任何實驗完成後，轉軸必定是處於靜止平衡狀態，所以應把靜止平衡時的力關係，以實驗求證之。

### 實驗 I

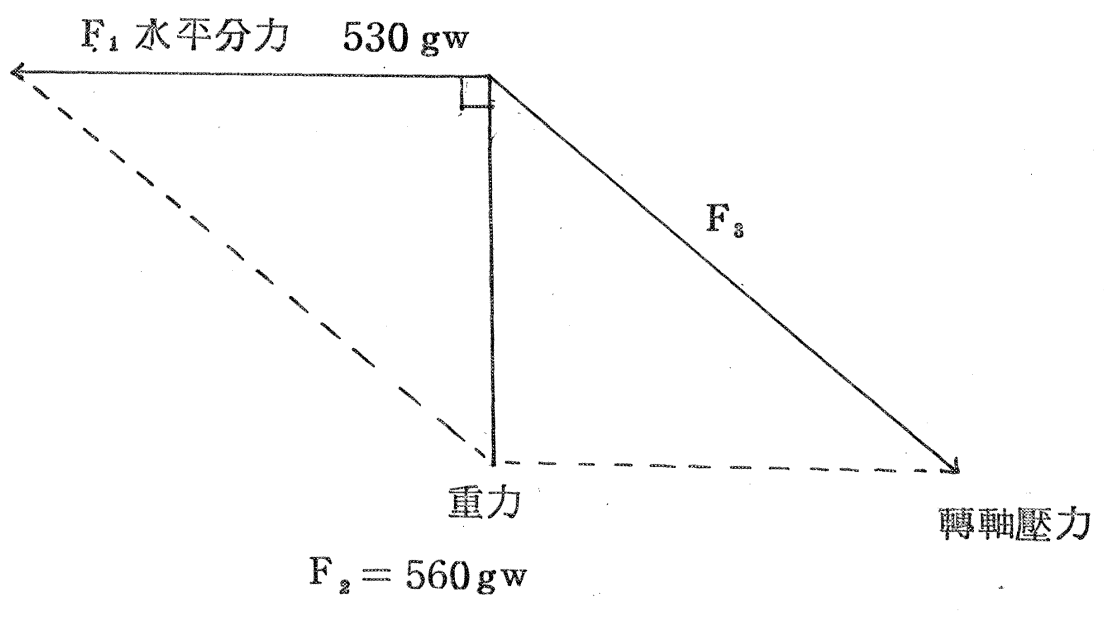
1 目的：求重力之分解比值。

2 操作：以彈簧秤測定重力的水平分力如圖(2)。



圖(2) 求重力的水平分力

3. 結果：(1)紀錄：略  
 (2)重力分解的力圖如圖(3)。



圖(3) 重力分解力圖

$$(3) \therefore F_1 = \frac{530}{560} \times F_2 = 0.95 F_2$$

◎以實驗求楊氏係數 Y ( Young's modalus )

實驗 II

1 設計：

(1)控制因素

(a)英國製Eagle 鋼絲。

(b)鋼絲直徑  $t = 0.0342 \text{ cm}$ ，截面積  $A = 0.00092 \text{ cm}^2$

(c)鋼絲原長  $\ell_0 = 100 \text{ cm}$ 。

(d)室溫。

(2)改變因素：在不同的重力下求鋼絲的形變量代入

$$Y = \frac{F/A}{\Delta \ell / \ell_0}。$$

2.操作：把鋼絲拉緊後，每次增加重力  $200 \text{ gw}$ ，記錄轉軸的轉角  $\theta$ ；在超過彈性限度  $F_{el}$  (Elastic limit) 後，則僅記重力，而不記直到斷為止。

3.結果：

(1)實驗結果如表(1)。

重力 F (gw)	重力差 $\Delta F_n > F_n - F_{n-1}$	轉角 $\theta$	轉角差	換的長度差 即形變量
1400	200	$49.4^\circ$		
1600	200	$48.8^\circ$	$0.6^\circ$	0.0106
1800	200	$48.2^\circ$	$0.6^\circ$	0.0106
2000	200	$47.6^\circ$	$0.6^\circ$	0.0106
2200	200	$47.0^\circ$	$0.6^\circ$	0.0106
2400	200	$46.5^\circ$	$0.5^\circ$	0.0088
2600	200	$45.6^\circ$	$0.9^\circ$	0.0159
2800	200	$45.2^\circ$	$0.4^\circ$	0.0076

(2)求Y。

(a)自  $2400 \text{ gw}$  後形變量即不規則，所以鋼絲  $100 \text{ cm}$  長的彈性限度約為  $2400 \text{ gw}$ 。又由實驗 I 可知  $200 \text{ gw}$  的實際拉力約為  $200 \times 0.95 = 190 \text{ gw}$ 。

$$(b) Y = \frac{\Delta F_n / A}{\Delta \ell_N / \ell_0} = \frac{190}{\frac{0.00092}{\frac{0.00106}{100}}} = \frac{206521}{0.000106} = 1.9 \times$$

$$10^9 \text{ gw/cm}^2 = 1.9 \times 10^9 \times 980 = 1.86 \times 10^{12} \frac{\text{d gne}}{\text{cm}^2}$$

。實際上由於鋼的成份不同，其Y約在 $1.9 \times 10^{12} \sim 2.0 \times 10^{12}$ 之間，可見本儀器之誤差已經很少，可以使用。（參閱張桐生著大學物理學）

(c)由實驗知本鋼絲在13.5Kgw時斷裂，則其斷裂強度約為 $\frac{13.5 \text{ Kgw}}{0.092 \text{ mm}^2} = 1.47 \text{ Kgw/mm}^2$ 。與華聯出版的電工應用手冊所載破壞臨時強度相符合，可見本儀器確實可用。

(d)用實驗Ⅱ同樣的方法，再以 $t = 0.0256 \text{ cm}$ 及 $\ell_0 = 100 \text{ cm}$ ， $50 \text{ cm}$ 等不同條件，分別求Y及斷裂強度，亦均與各書所載符合，足證本儀器可以使用。

#### 四、求伸長形變的彈性限度

##### (一)求直鋼線的彈性限度

##### ①實驗Ⅲ，求截面積與Fel的關係

##### 1 設計：

(1)控制因素 a，Eagle 鋼絲。b， $\ell_0 = 100 \text{ cm}$ 。

(2)改變因素  $t_1 = 0.0342 \text{ cm}$ ， $t_2 = 0.0256 \text{ cm}$ 。

##### 2 操作：(略)

##### 3. 結果：

(1)  $t_1 = 0.0342 \text{ cm}$ ， $A_1 = 0.00092 \text{ cm}^2$  的鋼絲100cm長，其彈性限度  $Fel_1 = 2400 \text{ gw}$ 。

(2)  $t_2 = 0.0256 \text{ cm}$ ， $A_2 = 0.0005145 \text{ cm}^2$ ，100cm長，其  $Fel_2 = 1400 \text{ gw}$ 。

4. 討論：可見只要質料長度外型相同的彈性體，其彈性限度

與截面積成正比。

⑧實驗Ⅳ，求長度與  $F_{el}$  的關係

1 設計：

(1)控制因素：a，Eagle 鋼絲。b， $t = 0.0342 \text{ cm}$ 。

(2)改變因素： $\ell_1 = 100 \text{ cm}$ ， $\ell_2 = 50 \text{ cm}$ 。

2 操作：(略)

3 結果： $\ell_1 = 100 \text{ cm}$ 時，其  $F_{el} = 2400 \text{ gw}$ 。

$\ell_2 = 50 \text{ cm}$ 時，其  $F_{el} = 1200 \text{ gw}$ 。

4 討論：

(1)可見  $F_{el}$  與長度亦成正比。

(2)但二者都在  $13.5 \text{ Kgw}$  時斷裂，可見斷裂強度與長度無關；當然若很長時，應把鋼絲本身的重量也算進外力中。

⑨歸納：

1 設 Eagle 鋼絲的彈性限度係數為  $\alpha$ ，由以上實驗可知  $F_{el} = \alpha A \ell$ 。若以  $F_{el} = 2400 \text{ gw}$ ， $A = 0.00092 \text{ cm}^2$ ， $\ell$

$= 100 \text{ cm}$  代入，則  $\alpha = \frac{2400 \text{ gw}}{0.00092 \text{ cm}^2 \times 100 \text{ cm}} = 2.6 \times$

$10^4 \text{ gw/cm}^3$ 。

2 以  $A = 0.0005145 \text{ cm}^2$ ， $\ell = 50 \text{ cm}$  代入，則  $F_{el} = 2.6 \times 0.6 \times 10^4 \text{ gw/cm}^3 \times 0.0005145 \text{ cm}^2 \times 50 \text{ cm} = 669 \text{ gw}$ ，此值與實驗值相近。所以我們可以據而決定 Eagle 鋼絲的彈性限度係數為  $\alpha = 2.6 \times 10^4 \text{ gw/cm}^3$ 。又此單位與密度之單位相似，是為單位體積中，所能接受的最大應力者也。

⑩應用：任何金屬材料所構成的建築物，如吊橋、高架外線等，若能將其同材料的樣品在本儀器上試求  $\alpha$  後，則可設計出處於彈性限度內安全負載下的橋或線，且亦不致牛刀殺雞，浪費材料。

(二)求螺旋彈簧的彈性限度：

①實驗 V。求總線長與彈性限度的關係

1 設計：

(1)控制因素：a，Eagle 鋼絲。b， $t = 0.0342 \text{ cm}$ ， $A = 0.00092 \text{ cm}^2$ 。C，螺管直徑  $0.565 \text{ cm}$ ，d 在稍大於彈限的外力下密繞。

(2)改變因素： $\ell_0 = 50 \text{ cm}$ ， $25 \text{ cm}$  分別密繞成 28 圈與 14 圈的彈簧試其  $F_{el}$ 。

2 操作：按物理第一冊第 5 章行之，如樣品。

3 結果： $\ell_1 = 50 \text{ cm}$  時，其  $F_{el} \approx 180 \text{ gw}$ 。

$\ell_2 = 25 \text{ cm}$  時，其  $F_{el} \approx 90 \text{ gw}$ 。

4 討論：所以不論螺管為幾圈，其彈性限度仍與總線長成正比。

②實驗 VI，求螺管的粗細與彈性限度的關係

1 設計：

(1)控制因素：Eagle 鋼絲， $t = 0.0342 \text{ cm}$ ， $A = 0.00092 \text{ cm}^2$ ， $\ell_0 = 50 \text{ cm}$ 。

(2)改變因素：螺管直徑  $R_1 = 0.565 \text{ cm}$  28 圈， $R_2 = 0.335 \text{ cm}$  48 圈，試其  $F_{el}$ 。

2 操作：按課本，如樣品。

3 結果： $R_1 = 0.565 \text{ cm}$  時，其  $F_{el} \approx 180 \text{ gw}$ 。

$R_2 = 0.335 \text{ cm}$  時，其  $F_{el} \approx 180 \text{ gw}$ 。

4 討論：所以不論螺管直徑的大小，只要線的總長不變，則其彈限亦不變。

③實驗 VII，求鋼線的粗細與螺管的彈性限度關係。

1 設計：

(1)控制因素：Eagle 鋼絲， $\ell_0 = 25 \text{ cm}$ 。

(2)改變因素： $A_1 = 0.00092 \text{ cm}^2$ ， $A_2 = 0.0165 \text{ cm}^2$ ， $A_3 = 0.00415 \text{ cm}^2$ 。

2 操作：按課本，如樣品。

3 結果： $A_1 = 0.00092 \text{ cm}^2$  時，其  $F_{el} \approx 90 \text{ gw}$ ，

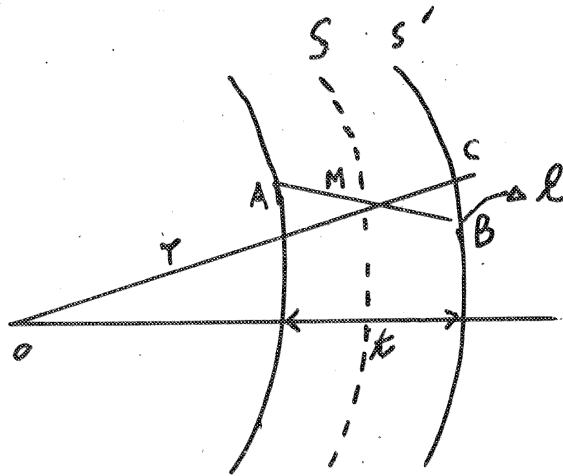
$A_2 = 0.0165 \text{ cm}^2$  時，其  $F_{el} \approx 1700 \text{ gw}$ ，

$A_3 = 0.00415 \text{ cm}^2$  時，其  $F_{el} \approx 400 \text{ gw}$ 。

三者相比， $0.00092 : 0.0165 : 0.00415 \approx 1 : 18 : 45 \approx 90 : 1700 : 400$ 。

4. 討論：可見其  $F_{el}$  與  $A$  成正比，但在繞製螺管時必須遵守如圖(4)之原則：

圖(4)



設： $t$  為鋼線的直徑， $S$  為鋼線中線，當鋼線彎曲為螺管後，內圓為壓縮形變，外圓為伸長形變， $O$  為螺管之圓心， $OM$  為原半徑  $r$ ， $S$  為未作伸長形變的圓周長， $S'$  為外圓周長， $\Delta \ell$  為一圈鋼絲在彈限時的伸長形變量。

則： $S = 2 r \pi \dots\dots\dots ①$

$$S' = 2 \left( r + \frac{t}{2} \right) \pi \dots\dots ②$$

$$S' = S + \Delta \ell \dots\dots\dots ③$$

將①③代入②  $2 r \pi + \Delta \ell = 2 \left( r + \frac{t}{2} \right) \pi$

$$\therefore \Delta \ell = t \pi \text{ 或 } t = \frac{\Delta \ell}{\pi} \text{。}$$



所以在繞製時  $r$  太小，以致  $t > \frac{\Delta \ell}{\pi}$  太多時，則螺管之外

圓已有細微之裂痕，雖然眼睛看不出，但已不是耐用的彈簧，更不能作為實驗的依據。

①基於以上實驗，若設螺管彈簧的彈性限度係數為  $\beta$ ，則其

$$F_{el} = \beta \times A \times \ell$$

例如：實驗 V， $\ell = 50 \text{ cm}$  而  $A = 0.00092 \text{ cm}^2$ ， $F_{el} = 180 \text{ gw}$ ，則可導出 Eagle 鋼線的  $\beta \approx 3.9 \times 10^3 \text{ gm/cm}^3$

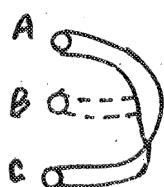
②校驗 B

1 以實驗 V， $\ell = 25 \text{ cm}$  校驗之，其  $F_{el} = 3.9 \times 10^3 \text{ gw/cm}^3 \times 0.00092 \text{ cm}^2 \times 25 \text{ cm} \approx 90 \text{ gw}$ （與實驗值接近）。

2 以實驗 VII， $\ell = 25 \text{ cm}$ ， $A = 0.0165 \text{ cm}^2$  校驗之其  $F_{el} = 3.9 \times 10^3 \times 0.0165 \times 25 \approx 1600 \text{ gw}$ （亦與實驗值接近）。

③螺旋彈簧的壓縮：

①若螺旋彈簧的直徑不變，則如圖(5)。

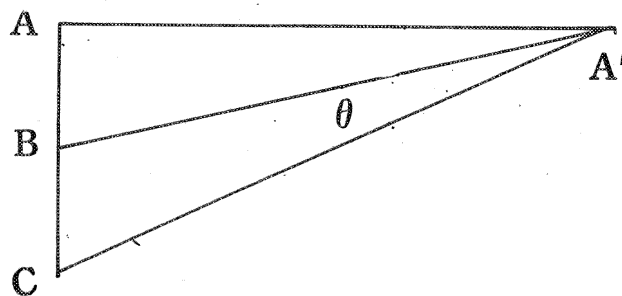


圖(5)

設  $AB$  為螺管彈簧原來相隣二圈間距，並令  $AB = d$ ， $AC$  為螺管彈簧在  $F_{el}$  時二圈間距，並令  $AC = d'$ ，則  $d - d' = \Delta d$  為每一圈在  $F_{el}$  時的最大形變量。今將此圈拉直，則如圖(6)  $A$  點分成  $AA'$  二點，則  $BC = \Delta d$ ， $\angle Q$  為形變角，而  $\angle AAC$  即為彈性限度角。

所以直徑不變的螺管彈簧其最大壓縮量亦以  $\Delta d$  為限。

所以直徑不變的螺管彈簧其最大壓縮量亦以  $\Delta d$  為限。



圖(6) 一圈彈簧展開

⑥若螺旋彈簧的直徑是作規則性的增減，因為可以互相重疊，所以其最大壓縮量，改以AC為限度，也就是若原伸長時未超過彈性限，則壓縮時亦不致超過。

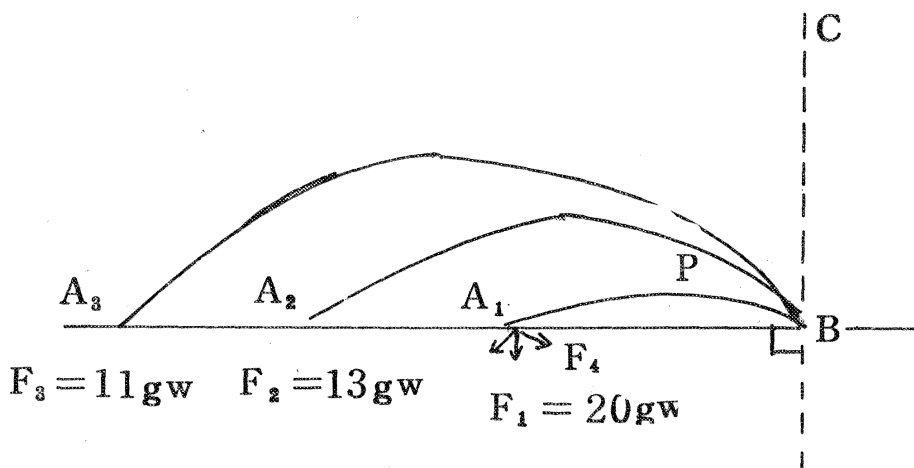
(四)應用：若能求出各種金屬材料的 $\beta$ 值，則各種使用螺旋彈簧的用器，如車墊、沙發墊、氣槍簧等就不難做了。

(五)比較：比較Eagle鋼絲的 $\alpha$ 及 $\beta$ ， $2.6 \times 10^4 : 3.9 \times 10^3 = 6.67 : 1$ ，此種差額之原因乃是由於螺旋彈簧的形變，是伸長與扭轉形變的混合結果。且還有些微的彎曲作用，所以於其求 $\alpha$ ， $\beta$ 的統一，不如獨立測定簡單而且正確。

### 五、求彎曲形變的彈性限度及斷裂強度。

(一)觀察：如圖(7)， $\widehat{A_1B}$ ， $\widehat{A_2B}$ ， $\widehat{A_3B}$ 為三條長度不同截面相同( $A = 0.00092 \text{ cm}^2$ )的鋼絲彎曲形變的側視圖(請參閱實物)，若今 $A_3B$ 直線為水平線，則可假設 $CB \perp A_3B$ ，則 $A_1B$ ， $A_2B$ ， $A_3B$ 分別為三條力臂，並由實物得知其關係，如表(3)

圖(7) 彎曲測視



表(3) 彎曲形變的數值關係

鋼 絲	$A_n B$ 長 ( cm )	$A_n B$ 長 ( m )	$F_n$ 重 ( gw )	力矩 = $F_n \times A_n B$
$\widehat{A_1 B}$	5.1	3.9	20	78 ( gw/cm )
$\widehat{A_2 B}$	7.4	5.7	13	74.1
$\widehat{A_3 B}$	7.9	6.1	11	67.1

由上可知

①彎曲形變是由力矩所產生的。

②鋼絲上的任一點如P，亦如B一樣是接受力矩的作用而被彎曲。但由於 $A_1P < A_1B$ ，且 $A_1P$ 所受之力為 $F_1$ 的分力。 $\therefore A_1P \times F_1 < A_1B \times F_1$ ，所以 $\widehat{A_1B}$ 不是一條規則的圓弧，而是流線型的，愈近B端曲率愈大。

③三個力矩 $78 > 74.1 > 67.1$ ，實際上在B端亦以 $A_1B$ 的曲率最大。

(二)推理：A若使 $A_1B$ 再減短， $F_1$ 再增加，直至鋼絲在B點將近永久形變為止，吾人可定比值為彎曲彈性限度。只要在此限度內，此鋼絲可作整圓的繞曲，除去外力後，仍然能恢復成直線。

④按照楊氏係數 $Y$ 可求出在彈性限度時的 $\Delta \ell$ ，又按圖(4)的分析， $t$ 若大於 $\frac{\Delta \ell}{\pi}$ 彎曲，結果將不能恢復原狀。

⑤彎曲與樣品的形狀、厚度、寬度都有關係，形成非常複雜的結果。爲了簡化此種關係，個別的材料各種的形狀都應作獨立的實驗。其厚度已超過 $\frac{\Delta \ell}{\pi}$ 時，應放棄彈性限度的追查，而僅作斷裂強度的決定。

(三)實驗：

①實驗VIII， $t \approx \frac{\Delta \ell}{\pi}$ 時的彎曲彈性限度。

1 設計：

(1)控制因素： $\ell = 3.5 \text{ cm}$  (觀察所得)  $A = 0.00092 \text{ cm}^2$

(2)改變因素：作用力逐次增加(如樣品4)。

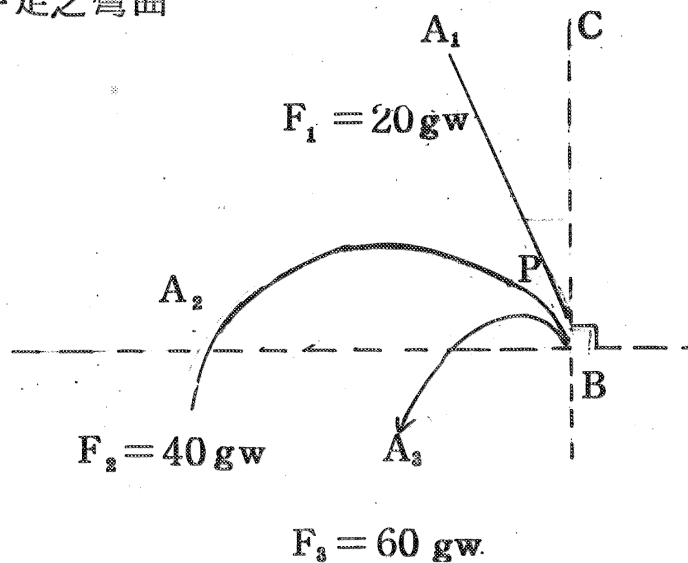
2 操作：將試品直立，底端固定，上端掛砝碼使彎曲。

3 結果：如圖(8)， $F_1$ 太小彎曲程度未達彈性限度， $F_3$ 太大在B點已形成永久形變，足證已超過彈限，只有 $F_2$ 恰能使 $A_2B$ 在水平上， $A_2B \perp BC$ 若 $\widehat{PB}$ 爲極小，則必爲一規則

的圓的一部份，且  $A_2B$  必通過此圓的圓心。由實驗可得

$$A_2B = 2.7 \text{ cm}$$

圖(8)  $\ell$  一定之彎曲



#### 4. 討論：

(1) 由圖(7)若將  $F_2$  ,  $F_3$  都加到 20 gw 時，則其力矩已超過彈限，所以鋼絲愈長，彎曲彈限愈小。

(2) 由圖(8)可知  $A = 0.00092 \text{ cm}^2$  的鋼絲其彈限為 40 gw。

#### ⑧ 實驗 IX，增加硬鋸片試求厚度與斷裂強度的關係

##### 1 設計：

(1) 控制因素： $\ell = 28 \text{ cm}$ ，寬度  $d = 1.17 \text{ cm}$ 。

(2) 改變因素：厚度( $h$ )分別為  $0.066 \text{ cm}$ ， $0.132 \text{ cm}$ ， $0.198 \text{ cm}$ ，求其斷裂強度  $F_{el}$ 。

2 操作：(略)

3 結果：如表(4)

表(4) 彎曲的厚度與斷裂強度

$h_n$ ( cm )	0.066	0.132	0.198
$F_n$ ( gw )	320	640	960

4. 討論：斷裂強度與厚度成正比。

③實驗 X，厚度一定試求寬度與斷裂強度關係過程與結果均與實驗(9)相同。

(四)歸納：若定方形材料彎曲的斷裂係數為  $\gamma$ ，則

$$\gamma = \frac{F_n}{d \times h} \text{ gw/cm}, \text{ 而 } F_n = \frac{ndh}{l} \text{。}$$

$$\begin{aligned} \text{以上述鋸片鋼為例, } \gamma &= \frac{F_1}{d_1 h_1} = \frac{320}{28} \\ &= 1.16 \times 10^5 \text{ gw/cm。} \end{aligned}$$

$$\text{若以此 } \gamma \text{ 求 } F_2 = \frac{1.16 \times 10^5 \times 1.17 \times 0.132}{28} = 639.8 \text{ gw}$$

與實驗數值甚近。

(五)應用：如鐵橋、鐵塔、鋼樑等建築只需將其所用之材料樣品以實驗 X 的方式作實驗，求得後即可計算出其安全負荷值。

## 六、求扭轉形變的彈性限度

(一)推理：

①扭轉的彈性限度與截面積 A 有關，但與長度無關，愈長者只是形變量愈大而已。所以在實驗時試品的長度必須適當。

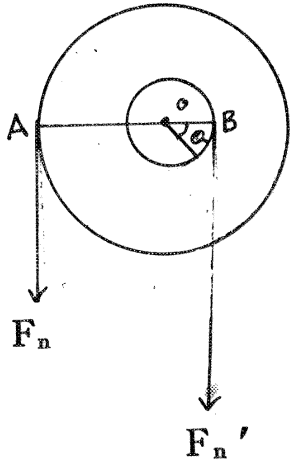
②扭轉彈限必與外形有關，由於市面缺乏方形鋼絲，所以只有用圓鋼絲作為試品，且現有之各種資料亦無圓形的扭轉彈性係數，所以有一試之必要。

③在儀器上加於扭轉之外力是加在轉軸上，如圖(9)，A O 為轉軸之半徑 = 1.01 cm，BO 為鋼絲之半徑 = 0.0171 cm，

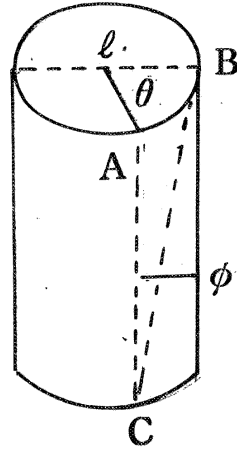
$$F_u \text{ 爲外力, } F_u' \text{ 爲鋼線的抗扭力, } \therefore F_n' = \frac{1.01}{0.0171} F_n =$$

$$59 F_n \text{。}$$

④若長度以 1 cm 為基準，則如圖(10)扭轉之形變角為  $\theta$ ，直徑為 t，A C 為未扭前之直線，B C 為扭轉彈限時 A 移到 B 的直線，則



圖(9)



圖(10)

$$AB = \frac{\theta}{360} \times t \pi$$

$$\tan \phi = \frac{\frac{\theta}{360} \times t \pi}{1 \text{ cm}} = \frac{\theta t \pi}{360}$$

$$\text{扭轉係數 } \delta = \frac{\frac{F}{A}}{\tan \phi} = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{\theta t \pi}{360}} = 146 \frac{F}{\theta t^3} \text{ gw/cm}^2 \circ$$

(二) 實驗 XI

① 設計：

1 控制因素：圓鋼絲  $t = 0.0342 \text{ cm}$ ， $A = 0.0092 \text{ cm}^2$ ， $l = 0.7 \text{ cm}$ 。

2 改變因素：改變  $F_n$  求  $\theta$  的變量如圖(9)。

② 操作：加重  $F_n$  於轉軸測定其形變角  $\theta$ ，但必須先加  $14 \text{ gm}$  以平衡靜摩擦。

③ 結果：如表(5)：扭轉形變量 ( $\Delta \theta_n = \theta_{n-1} - \theta_n$ )

$F_n$ (gm)	0	15	20	25	30	35	40	45	50
$Q_n$	119	111.1	106.8	102	97.5	93	89	81.1	7.4
$\Delta Q$			4.3	4.8	4.5	4.5	4.0	7.9	10.7

$$Q = 119^\circ - 89^\circ = 30^\circ \quad \Delta F_n = 5 \text{ gw} \circ$$

①討論：40 gw 爲其彈限。

(二)歸納：設  $\delta$  爲扭轉彈性係數，則按上述實驗  $\Delta F_1' \approx 3 \times 10^2$  gw， $\theta_1 = 119^\circ - 89^\circ = 30^\circ$ ，則每公分之扭轉角  $\theta_1' =$

$$42.9^\circ \circ \therefore \delta = 146 \times \frac{3 \times 10^2}{0.0342^3 \times 42.9} \approx 2.5 \times 10^7$$

gw/cm<sup>2</sup> =  $2.5 \times 10$  dyne / cm<sup>2</sup> 鋼之切變彈性係數爲  $0.84 \times 10^{12}$  dgm / cm<sup>2</sup> 實驗所得之值，與其相差甚遠，但本實驗爲圓鋼，張著爲方形鋼，此爲相差之主因。

七、總結論：

(一)現有各專家之資料中，僅記錄各種彈性之係數，而不能明確指出其彈性限度，所以本研究爲彌補此缺憾之佳徑是否可行，當請各位專家指教。

(二)以彈性限度推算原子晶格間之引力及容許的膨縮程度實爲國中學生學習理化的可行之法。

(三)以彈性限度推算各種建築的安全負載，將較此斷裂強度爲推算基礎者，其結果必更安全，是否如此亦請專家指正。