紙摺雙曲線等二次曲線
及其圖形方方程式數學處理的研究

高中教師組第二名

臺灣省立員林崇實高級中學　　　　作　者：李　輝　濱

一、前　　言：

紙摺圖形中完整的數學理論，尙無人提出。本文是作者爲解釋圖形的全貌，而研究出解圖方程式的理論基礎。文中的一項特點，卽嘗試引用比較淺顯直觀的方法，來解釋所繪圖形及其方程式的求法，藉以讓高中程度的學生，得以理解解題中描述的要領。而尤其注意的是，其間並引入三種理論，以輔助解題的思維過程。

紙摺圖形與一般紙摺花鳥生物等美勞工藝同具有高度的趣味性，而其圖形優美處直可與一般製圖工具所繪者相媲美。本文中將詳細敍述出紙摺圖形歸納的結果，及解圖形方程式的幾種方法。

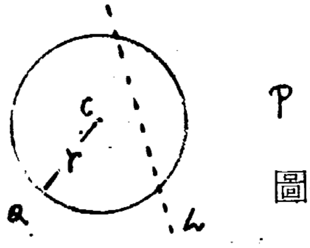
二、本　　文：

紙摺圖形的特殊處，卽在于找一固定點，以與一固定幾何圖形作對稱性的點疊合，而由於固定點相對於固定圖形的相異位置，遂產生有不同的幾何圖形包絡；這些圖形分別爲雙曲線、橢圓、圓、拋物線、點及平面。

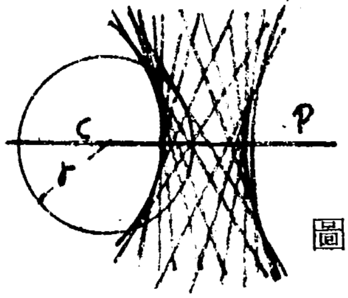
方法(一)

雙曲線摺法；固定一圓（令其半徑爲 r ），點 P 爲圓外的任一點，摺疊圓弧的每一相異點，使其落於 P 點上。（見圖一）並

得一摺痕L，稱之爲摺線。所有此等摺線所成的包絡（卽摺線聯集圖形的外緣曲線）卽近似一雙曲線。（見圖二）



圖一



圖二

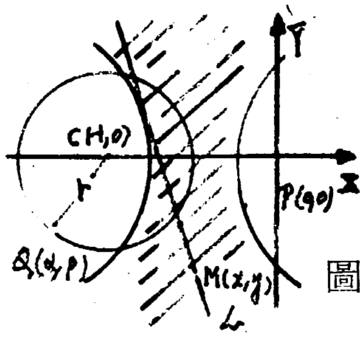
固定一直角坐標在此圖形上（見圖三），卽以P點爲原點（0，0），圓C的圓心點落在（－1，0）的點坐標上，則$\overleftrightarrow{CP}$直線爲X軸，並繪出通過P點的縱坐標Y軸，則圓的方程式爲：

$$(\alpha+1)^2+\beta^2=\gamma^2$$

此處點（α，β）表定圓上的任意點，且$0<\gamma<1$

$-1-r\leq\alpha\leq-1+r$，

$-r\leq\beta\leq r$



圖三

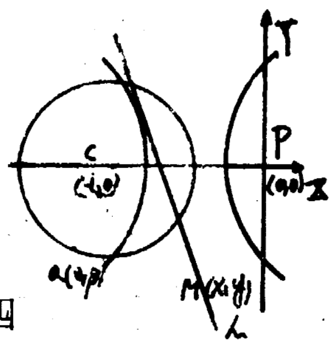
利用前述坐標系，我們卽可把摺線曲域用方程式表示出來。

考慮下述性質：

性質一；若點M（x，y）在Q點與P點重疊的摺線上，則$\overline{MP}$與$\overline{MQ}$的距離相等。（見圖四）

證明：因摺線L恰是P，Q兩點的對稱線，卽L爲$\overline{PQ}$的垂直平分線，而垂直平分線上任意點到P，Q兩點是等距離的，所以

$$\overline{MQ}=\overline{MP}$$



圖四

由"性質一"知，點M（x，y）須滿足下式：

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=x^2+y^2$$

卽　$\alpha^2+\beta^2=2\alpha x-2\beta y=0$

今α與β是在圓上變動，故由變動所形成點M（x，y）的點集合，即爲圖四中的斜線區域，所以聯立方程式

$$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2-2\alpha x-2\beta y=0 \\ (\alpha+1)^2+\beta^2=r^2 \end{cases}$$

所表示的圖形，即爲摺線聯集的斜線區域。

考慮 $y=k$，$k\in R$這條直線與斜線區域的交點。（見圖五）如此，可得一新的聯立方程式

$$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2-2\alpha x-2\beta y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ (\alpha+1)^2+\beta^2=r^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ y=k \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

現在固定 $y=k$ 這條直線（即 k 爲一常數），則這條直線和圖形區域內的任一摺線都有一交點。（圖五）因爲摺線有很多條，故交點也有很多個，這些交點在圖形區域上即造成一個線段。此線段可由上列聯立方程式求得：將(2)式，(3)式分別代入(1)式，得線段方程式爲：

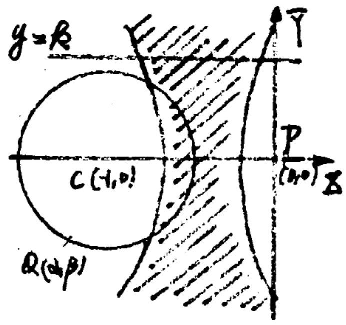


圖　五

$$r^2-2\alpha-1-2\alpha x\mp 2k\sqrt{r^2-(\alpha+1)^2}=0$$

此處　　$-1-r\le\alpha\le-1+r$

此線段應有兩端點，即線段上所有點的橫坐標值應包含在兩端值的區間內，若能找出此區間的兩端值（橫坐標值），則圖形區域兩外緣的曲線，即可得知：

由　$r^2-2\alpha-1-2\alpha x=\pm 2k\sqrt{r^2-(\alpha+1)^2}$

兩邊完全平方得　$(r^2-2\alpha-1-2\alpha x)^2=4k^2[r^2-(\alpha+1)^2]$

展開並整理成α的一元二次方程式，得

$$[4(x+1)^2+4k^2]\alpha^2+[4(x+1)-4(x+1)r^2+8k^2]\alpha+(r^4+1-2r^2-4k^2r^2+4k^2)=0$$

由於α是在〔$-1-r$，$-1+r$〕區間內的實數值，所以上式變數α的一元二次方程式必有實根，而其判別式$\Delta\geq 0$。因之，

$$[4(x+1)-4(x+1)r^2+8k^2]^2-4[4(x+1)^2+4k^2]\cdot[r^4+1-2r^2-4k^2r^2+4k^2]\geq 0$$

展開此不等式，並消去因數16爲：

$$(x+1)^2(1-r^2)^2+4k^2(x+1)(1-r^2)+4k^4-(x+1)^2(1-r^2)(4k^2+1-r^2)-k^2(1-r^2)(4k^2+1-r^2)\geq 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2(1-2r^2+r^4-4k^2-1+r^2+4k^2r^2+r^2-r^4)+(x+1)(4k^2-4k^2r^2)+4k^4-k^2(1-r^2)(4k^2+1-r^2)\geq 0$$

$$\Rightarrow -4k^2(x+1)^2(1-r^2)+4k^2(1-r^2)(x+1)-k^2+2k^2r^2+4k^4r^2-k^2r^4\geq 0$$

$$\Rightarrow (-k^2)[4(1-r^2)(x+1)^2-4(1-r^2)(x+1)+1-2r^2-4k^2r^2+r^4]\geq 0$$

消去$(-k^2)$項得

$$4(1-r^2)(x+1)^2-4(1-r^2)(x+1)+[(1-r^2)^2-4k^2r^2]\leq 0$$

因$r<1$，$1-r^2>0$，上述不等式各項乘以$\dfrac{1}{4(1-r^2)}$

得 $$(x+1)^2-(x+1)+\frac{1-r^2}{4}-\frac{k^2r^2}{1-r^2}\leq 0$$

展開並簡化之：

$$x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{r^2}{4}-\frac{k^2r^2}{1-r^2}\leq 0$$

$$\Rightarrow (x+\frac{1}{2})^2-(\pm\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{k^2r^2}{1-r^2}})^2\leq 0$$

$$\therefore \quad -\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{k^2 r^2}{1-r^2}} \leq x+\frac{1}{2} \leq \sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{k^2 r^2}{1-r^2}}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{k^2 r^2}{1-r^2}} \leq x \leq -\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{k^2 r^2}{1-r^2}}$$

由上式得知，線段上點之橫坐標值皆落于

$\left[-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{k^2 r^2}{1-r^2}}, -\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{r^4}{4}+\frac{k^2 r^2}{1-r^2}}\right]$ 之閉區間內

最左端點爲 $\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{k^2 r^2}{1-r^2}}, k\right)$ 坐標，

最右端點爲 $\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{k^2 r^2}{1-r^2}}, k\right)$ 坐標。

因此，這線段的兩端點即爲圖形區域兩外圍曲線的點。再由圖形上可看出所有曲線上的點都是這種點（因 $y=k$ 之直線可以上下平行移動），故由此點坐標的參數方程式：

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{k^2 r^2}{1-r^2}} \\ y=k \end{cases}$$

消去k，即得曲線方程式

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{r^2}{4}+\frac{y^2 r^2}{1-r^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{r^2}{4}}-\frac{y^2}{\frac{(1-r^2)}{4}} = 1$$

由雙曲線之標準式 $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ 比較之

乃知圖形兩外緣的曲線爲雙曲線，而其方程式爲：

$$\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{r^2}{4}}-\frac{y^2}{\frac{(1-r^2)}{4}}=1$$

方法(二)

橢圓形摺法；固定一圓（半徑爲r），點P爲圓內異於圓心的任一點，摺疊圓弧的每一相異點，使其落於P點上，由此而得之摺線圖形包絡（即摺線聯集圖形的內緣封閉曲線）近似一橢圓形。（見圖一）

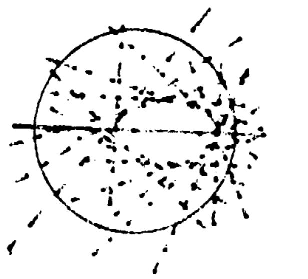


圖 一

固定一直角坐標在此圖上（見圖二），以P點爲原點，圓心點落在（−1，0）坐標上，圓的方程式仍爲

$$(\alpha+1)^2+\beta^2=r^2\ ,\quad 1<r\quad r\text{爲定値}$$

此處點（α，β）表圓上的任意點，且

$$-1-r\leq\alpha\leq-1+r\ ,\quad -r\leq\beta\leq r$$

設圓C上一點Q（α，β）翻摺疊到P點上，所得的摺線爲L，則L上的點M（x，y）必使$\overline{MQ}=\overline{MP}$，故點M必須滿足下列式子：

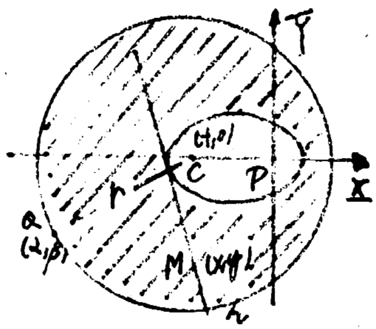


圖 二

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$$
$$=x^2+y^2$$

即 $\alpha^2+\beta^2-2\alpha x-2\beta y=0$

而由於（α，β）是在圓上變動，故摺線圖形區域應以下述聯立方程式表示：

$$\begin{cases}\alpha^2+\beta^2-2\alpha x-2\beta y=0\\(\alpha+1)^2+\beta^2=r^2\end{cases}$$

因α與β是互相跟隨着在變動，於是可把聯立方程式結合一方

程式爲：

$$r^2-2\alpha-1-2\alpha x\pm 2y\sqrt{r^2-(\alpha+1)^2}=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

此處α的定義域爲　$\{\alpha \mid -1-r\le\alpha\le -1+r\}$

當方程式(1)中的α固定時（即圓上任定一點），方程式(1)即表一條摺線。

至此，我們再引入一新的性質來輔助。

性質二；若摺成圖形的內緣曲線爲圓滑曲線，則任何兩不同摺線的交點，不能落在曲線上。

證明：考慮右圖三，若二摺線相交於A點，而A點又落在圖形曲線上。

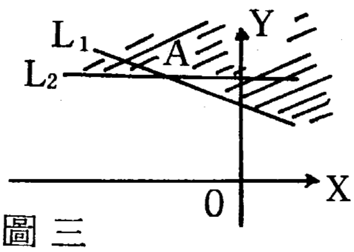


圖 三

由于曲線不能通過L_1或L_2的上方，即曲線通過A點時，只能由圖中沒有斜線的部分通過，因此曲線在A點所張成的角度（即進入A點和走出A點的夾角）必小於180°。如此曲線在A點必成折線狀態，但已知圓滑曲線不可能爲折線的。由此造成矛盾，故A點不可能落在曲線上，即摺線交點必不落在曲線上。

同時，由圖一圖形知，摺出的圖形（橢圓形）必在摺線的一邊，原摺線不可能和所摺出之圖形相交（頂多相切）。所以對任意二相交摺線將平面切成四塊時，所摺出的圖形，只能落在其中的一塊。因此，若二摺線相交之點落在圖形上時，此圖形必不圓滑。

由“性質二”我們得到了有一些點是不可能落在摺成圖形的曲線上的。現在看看是否能知道方程式(1)的摺線上有那些點是不會在曲線上的？

因此，讓我們先看看所有其他摺線：

$$r^2-2\alpha_0-1-2\alpha_0 x\mp 2y\sqrt{r^2-(\alpha_0+1)^2}=0 \quad \cdots(2)$$

此處　$-1-r\le\alpha_0\le -1+r$　但$\alpha_0\ne\alpha$

即方程式(2)和方程式(1)的摺線有那些交點？

現在，計算及交點：（計算極複雜，但肯細心、耐心定能克服

）爲方便計，方程式(1)，(2)中只取一負號即可，由聯立式：

$$\begin{cases} r^2-2\alpha-1-2\alpha x\mp 2y\sqrt{r^2-(\alpha+1)^2}=0 \cdots\cdots\cdots(1) \\ r^2-2\alpha_0-1-2\alpha_0 x\mp 2y\sqrt{r^2-(\alpha+1)^2}=0 \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

得二元一次聯立方程式：

$$\begin{cases} 2\alpha x+2y\sqrt{r^2-(\alpha+1)^2}=r^2-2\alpha-1 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 2\alpha_0 x+2y\sqrt{r^2-(\alpha_0+1)^2}=r^2-2\alpha_0-1 \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

利用二階行列式解之

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2\alpha & r^2-2\alpha-1 \\ 2\alpha_0 & r^2-2\alpha_0-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2\alpha & 2\sqrt{r^2-(\alpha+1)^2} \\ 2\alpha_0 & 2\sqrt{r^2-(\alpha_0+1)^2} \end{vmatrix}}$$

$$\text{則 } y=\frac{2(\alpha-\alpha_0)(r^2-1)}{4\left(\alpha\sqrt{r^2-(\alpha_0+1)^2}-\alpha_0\sqrt{r^2-(\alpha+1)^2}\right)}$$

$$=\frac{(\alpha-\alpha_0)(r^2-1)\left(\alpha\sqrt{r^2-(\alpha_0+1)^2}+\alpha_0\sqrt{r^2(\alpha+1)^2}\right)}{2\left[\alpha^2\left[r^2-(\alpha_0+1)^2\right]-\alpha_0^2\left[r^2-(\alpha+1)^2\right]\right]}$$

$$=\frac{(r^2-1)\left(\alpha\sqrt{r^2-(\alpha_0+1)^2}+\alpha_0\sqrt{r^2-(\alpha+1)^2}\right)}{2\left[r^2(\alpha+\alpha_0)-2\alpha\alpha_0-(\alpha+\alpha_0)\right]}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} r^2-2\alpha-1 & 2\sqrt{r^2-(\alpha+1)^2} \\ r^2-2\alpha_0-1 & 2\sqrt{r^2-(\alpha_0+1)^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2\alpha & 2\sqrt{r^2-(\alpha+1)^2} \\ 2\alpha_0 & 2\sqrt{r^2-(\alpha_0+1)^2} \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{(r^2-2\alpha-1)\sqrt{r^2-(\alpha_0+1)^2}-(r^2-2\alpha_0-1)\sqrt{r^2-(\alpha+1)^2}}{2\left(\alpha\sqrt{r^2-(\alpha_0+1)^2}-\alpha_0\sqrt{r^2-(\alpha+1)^2}\right)}$$

（因式子很多，故改換另一形式述之於下）

$$x=\frac{1}{2\left[\left(\alpha\sqrt{r^2-(\alpha_0+1)^2}\right)^2-\left(\alpha_0\sqrt{r^2-(\alpha+1)^2}\right)^2\right]}$$

$$\left[(r^2-2\alpha-1)\sqrt{r^2-(\alpha_0+1)^2}-(r^2-2\alpha_0-1)\right.$$

$$\left.\sqrt{r^2-(\alpha+1)^2}\right]\cdot\left(\alpha\sqrt{r^2-(\alpha_0+1)^2}+\alpha_0\right.$$

$$\left.\sqrt{r^2-(\alpha+1)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2\left[r^2(\alpha+\alpha_0)-2\alpha\alpha_0-(\alpha+\alpha_0)\right]}\cdot\left\{r^4+\left[\right.\right.$$

$$\left.\alpha\alpha_0-2(\alpha+\alpha_0)-2\right]r^2+3\alpha\alpha_0+2(\alpha+\alpha_0)+1$$

$$\left.+(1-r^2)\sqrt{r^2-(\alpha+1)^2}\cdot\sqrt{r^2-(\alpha_0+1)^2}\right\}$$

此種解（ x ， y ）即爲兩不同摺線的交點，而此種點不可能落在圓滑曲線上。但由圖形知，任一條摺線中至少尙有一點，是落在圓滑曲線上的，而不在上述交點之列。事實上，由“性質二”知在直線(1)

$$r^2-2\alpha-1-2\alpha x\mp 2y\sqrt{r^2-(\alpha+1)^2}=0$$

上，只有一點（ x ， y ）是不可能爲“與其他直線

$$r^2-2\alpha_0-1-2\alpha_0x\mp 2y\sqrt{r^2-(\alpha_0+1)^2}=0,\ (\alpha_0\neq\alpha)$$

的交點”。

故圓滑曲線上的點，即爲僅當 $\alpha=\alpha_0$（即不是爲任意二摺線交點的點）存在時，摺線上的點集合（即每一條摺線僅貢獻出一點）。因之，當 $\alpha=\alpha_0$ 時

$$x=\frac{1}{2(2\alpha r^2-2\alpha^2-2\alpha)}\cdot\left\{r^4+(\alpha^2-4\alpha-2)r^2+\right.$$

$$\left.3\alpha^2+4\alpha+1+\left[r^2-(\alpha+1)^2\right]\cdot(1-r^2)\right\}$$

$$=\frac{\left[(\alpha-1)r^2+(\alpha+1)\right]}{2(r^2-\alpha-1)}$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{r^2\alpha}{2(r^2-\alpha-1)}$$

$$y=\frac{(r^2-1)\cdot 2\alpha\sqrt{r^2-(\alpha+1)^2}}{4\alpha(r^2-\alpha-1)}$$

$$y=\frac{(r^2-1)\cdot\sqrt{r^2-(\alpha+1)^2}}{2(r^2-\alpha-1)}$$

此時的 x ，y 值即爲圓滑曲線上點坐標之參數式。將其消去 α ，即得曲線方程式，解之：

$$\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{r^2\alpha}{2(r^2-\alpha-1)} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3) \\[2ex] y=\dfrac{(r^2-1)\sqrt{r^2-(\alpha+1)^2}}{2(r^2-\alpha-1)} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4) \end{cases}$$

由(3)式

$$\Rightarrow\quad (x+\frac{1}{2})^2=\frac{r^4\alpha^2}{4(r^2-\alpha-1)^2}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{(x+\frac{1}{2})^2}{\frac{r^2}{4}}=\frac{r^2\alpha^2}{(r^2-\alpha-1)^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

由(4)式

$$\Rightarrow\quad \frac{y^2}{\frac{(r^2-1)}{4}}=\frac{(r^2-1)(r^2-\alpha^2-2\alpha-1)}{(r^2-\alpha-1)^2}\cdots\cdots(6)$$

再由(5)式+(6)式，且因 $r>1$ 得

$$\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{\frac{r^2}{4}}+\frac{y^2}{\frac{(r^2-1)}{4}}=1$$

上述方程式與橢圓標準式：$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

比較之，乃知其爲橢圓方程式。

而此摺疊圓滑曲線是一完整連續不斷的封閉曲綫，必爲一橢圓。

方法㈢

若把定點P定在圓C的圓心上，再將圓上各點逐次翻轉摺落於圓心上。由此而得之所有摺線聯集所成之圖形，其內緣封閉曲線爲一半徑減半的同心圓。（如下圖一）

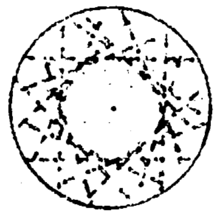


圖　一

將圓C的圓心（半徑爲 r ），固定在坐標軸原點上，則圓的方程式爲：

$$\alpha^2+\beta^2=r^2$$

此處點（ α ， β ）表圓C上的任一點，

$$-r\leq\alpha\ ,\ \beta\leq r$$

設圓上點Q（ α ， β ）摺落於P點上，所得之摺線L，其方程式爲：

$$y=mx+k \qquad m\text{表摺線的斜率}$$

由於圓上的點Q（ α ， β ）是在變動的，使得摺線斜率亦跟著變動。所以在方程式中，m是個變數，我們即選它做參數！

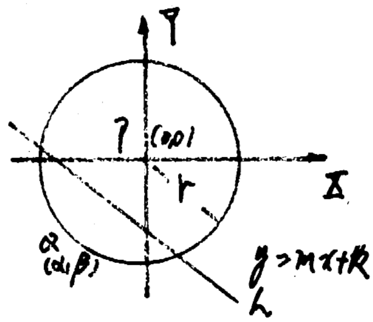


圖　二

由圖二知，圓上的半徑 r ，恰等於圓心點到直線 $y=mx+k$ 距離的兩倍，所以

$$r=2\left|\frac{-k}{\sqrt{1+m^2}}\right|$$

將直線 $y=mx+k$ 中的 k 項，以m表之爲：

$$k=\pm\frac{\sqrt{r^2(m^2+1)}}{2}$$

此處 k 表近線在 y 軸上的截距。

則直線式為：（僅取負號）

$$y = mx - \frac{\sqrt{r^2(m^2+1)}}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

由(1)式兩邊對m作偏微分得：

$$0 = x - \frac{r^2 m}{2\sqrt{r^2(m^2+1)}}$$

$$\therefore x = \frac{r^2 m}{2\sqrt{r^2(m^2+1)}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

將(2)式代入(1)式中，得化簡式

$$y = \frac{-r^2}{2\sqrt{r^2(m^2+1)}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

解(2)(3)參數式，消去m，即可得方程式

$$由(2) \Rightarrow x^2 = \frac{r^4 m^2}{4[r^2(m^2+1)]} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

$$由(3) \Rightarrow y^2 = \frac{r^4}{4[r^2(m^2+1)]} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

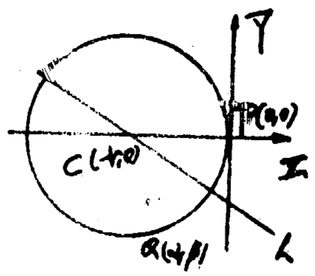
由(4)+(5)得 $x^2 + y^2 = \frac{r^2}{4}$

此方程式即表圓心點，在原點上半徑為$\frac{r}{2}$的圓，也就是說，摺線圖形的內緣封閉曲線是一個半徑減半的同心圓。

(四)若我們再改變一下定點的位置，將其置于圓弧上的任一點位置，來看看摺線圖形的性質，倒很有趣。

如左圖，將圓心固定於坐標軸的（$-r$，0）點上，定點P置於原點上。圓上的任一點Q（α，β）對P（0，0）點的摺線L，設為

$y = mx + k$，m仍為變動的斜率



今由圖知，圓心點（$-r$，0）到P（0，0），Q（α，β）兩點的距離分別為半徑長。故C（$-r$，0）點必落在摺線上，而摺線（斜率為m）必通過（$-r$，0）點，其方程式應為：

$$y=m(x+r)=mx+mr$$

將其與 $y=mx+k$ 比較之

得 $k=mr$

所以，任一摺線的方程式必為

$$y=mx+mr \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

今將(1)式兩邊對m作偏微分，得

$$0=x+r$$

$$\therefore \quad x=-r$$

把 $x=-r$ 代入(1)式中，得

$$y=m(-r)+mr$$
$$=0$$

於此，求得一點，其坐標為（$-r$，0），此點恰為原來圓C的中心點，亦是所有摺線交集的唯一點，而此等摺線的聯集圖形即為所定的坐標平面。

(五)綜合以上的討論，今歸納如下：

(1)若定點P是設在定圓的外部，則摺線所聯集成圖形的外緣曲線，即是雙曲線。

(2)若定點P是在定圓的內部，但不在圓心上，則摺線所聯集圖形的內緣封閉曲線，即是橢圓形。

(3)若定點P是落在定圓的圓心上，則摺線所聯集成的圖形內緣封閉曲線，即是一個與定圓同心，半徑減半的同心圓。

(4)若定點P是落在定圓圓周上任意點的位置時，其摺線的聯集圖形是一平面，而所有摺線的交集是唯一之點，且在定圓的圓心上。

三、結　論：

(一)由以上之理論基礎，求出之曲線方程式恰與所摺圖形相吻合。

如由祖察法觀察圖形曲線上的各重要量當不難查驗。由方程式中所求的各量，如；橢圓、雙曲線的大小、離心率、長短軸、共軛軸、貫軸等，係全由圓的半徑及定點到圓心距離所決定。且圓心與定點皆為焦點。因此，我們可依自己的尺寸大小，摺出所需的圖形。

(二)以上的演題，都只是就定圓與定點間對稱摺線的關係求得的。事實上，其間的演習最後都只歸化成一種形式，即參數式的求取，可見參數式的應用何等重要。此點對一般的高中生而言，似較難接受，然只要多做演練，由簡入繁，由淺入深，即可克服！

(三)上述之三種方法，在解圖形方程式中都適用。讀者若有興趣，可就每種圖形以三種解法試之。最後再由圖形觀察法檢驗，其中將難免碰上繁複的計算過程，可先從最簡單的拋物線圖形做起，那就是，以一定直線上的點和線外一定點作摺形對應，其摺成圖形的外緣曲線，即是拋物線。

(四)以上三種解法中，以方法(二)所涉及的理論較深、計算較複雜，但應用却最廣泛。本文為作者課後研究心得，前後共耗時三個月，費心之鉅，不遺餘力。然能在艱苦努力後，稍有收穫，即俗云：種瓜得瓜，種豆得豆。內心之愉，亢奮有加，希望藉此再引發更多方面的探討。

附　註：

平面點集合的求取

如圖　直線L：$y = mx + mr$

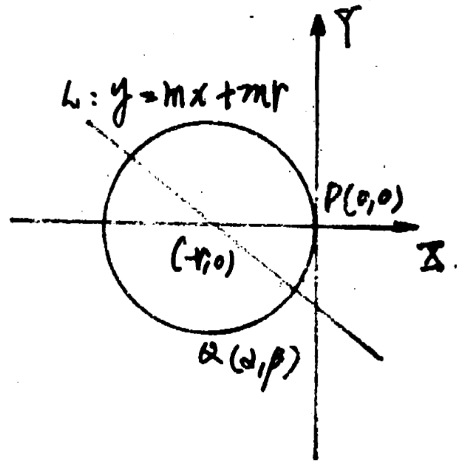
則　　$m = \dfrac{-\alpha}{\beta}$

由圓方程式：$(\alpha + r)^2 + \beta^2 = r^2$

得　$\beta = \pm\sqrt{-\alpha(\alpha + 2r)}$

$-2r \leq \alpha \leq 0$

$\therefore\ y = m(x + r)$



$$=\frac{-\alpha}{\pm\sqrt{-\alpha(\alpha+2r)}}(x+r)$$

得　$\pm y\sqrt{-\alpha(\alpha+2r)}=-\alpha x-\alpha r$

因此　$\alpha x\pm y\sqrt{-\alpha(\alpha+2r)}=-\alpha r$

故　$\{(x,y)\mid \alpha x\pm y\sqrt{-\alpha(\alpha+2r)}=-\alpha r,$

$-2r\leq\alpha\leq 0\}$

爲表示平面上的點集合