

自製教具橢圓規

高中教師組數學第二名

華興中學

作者：梁國輝

一、研究動機：

即使是一個小學生，只要他有圓規，他就能繪出一隨心所欲之圓，但如果有人想繪一橢圓，他將會發現只能用一些笨拙與不便的方法，諸如：同心圓法、直尺定心法，平行四邊形法、四心近似法等，最不幸的是用上述之法所得之曲線，只是一些“近似曲線”而非確實之橢圓曲線，因為橢圓隨離心率之不同其“寬”與“扁”程度有異，要應付這些不同之離心率，是一個很大的困擾，至目前為止還沒有一個很好的方法，來繪一吾人隨心所欲之橢圓。

如果你下定決心立志要研究出一繪任何形狀之橢圓的“橢圓規”（姑且名之）以利大眾，要替你高興的是，你不必具多高深之專門知識，你只要會多加應用你的思考力即可。

二、幾種可構成橢圓曲線的方法：

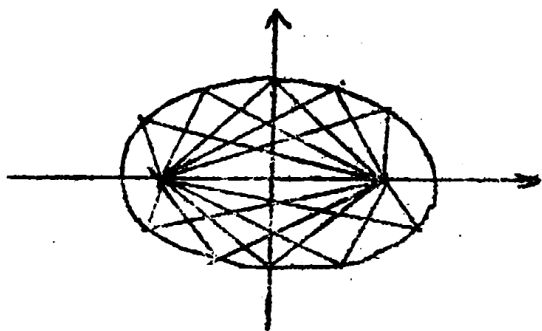
首先我們當然要搜集一些可構成橢圓曲線的方法：

(一)平面上所有至二定點之距離和為一定值之動點所成之集合見圖(一)。

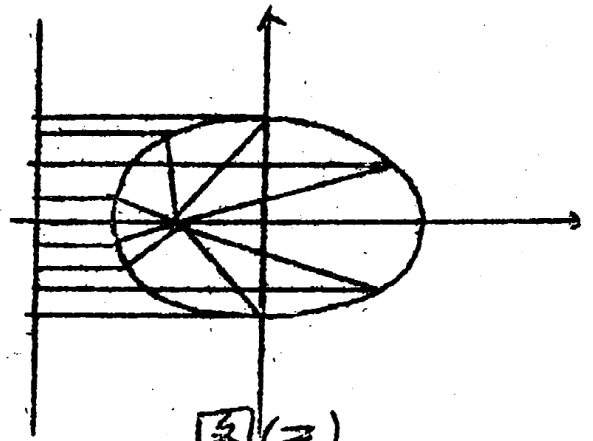
(二)平面上至一定點之距與至一定直線之距之比為一定值之點所成之集合圖(二)。

(三)一圓錐面或圓柱面與一平面作某種角度相交之交集見圖(三)。

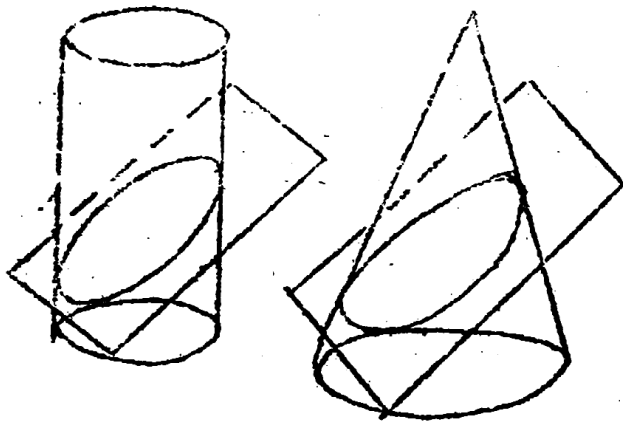
(四)坐標平面上二個以原點為圓心之同心圓，當任何過原點之直綫與此二圓相交之二點中，一作 x 軸之垂綫，一作 y 軸之垂綫，



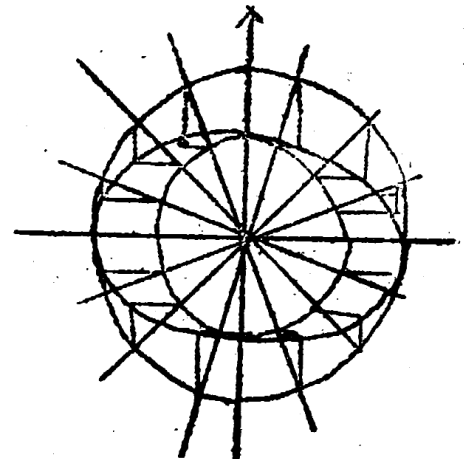
(图一)



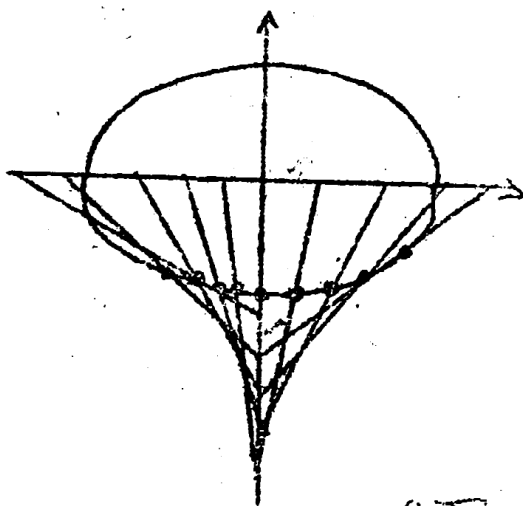
图(二)



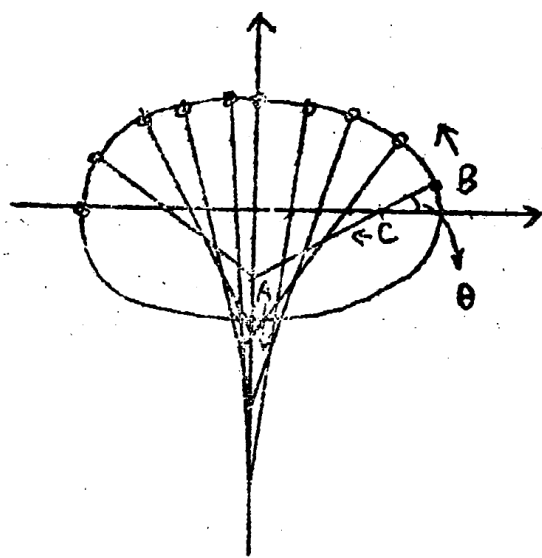
图三



图四



(图五)



此二垂綫所成之集合，見圖(四)。

(五)一綫段之二端點，在二坐標軸上移動則此綫段上之任何點所描述之軌跡，或一綫段之一端點及綫段之任一定點在二坐標軸上移動，則另外一端點所描述出之軌跡見圖(五)。

三、理論配合實際：

我們現在一一研究上述幾種方法之可行性及如何實際去應用它：

(一)法，可取一所需之綫（或繩）兩端固定在焦點上，將筆撐開綫，即可繪出，這個方法可說衆人皆知，但如果實際拿來應用，費時、費事，所繪曲綫，不但不平滑而且支離破碎的，更甚的是要準備許多綫與筆，以便弄斷再來。

(二)法，很難想像利用一器具去定一至直綫之距與至點之距之比值。

(三)法，所使用之儀器須與紙面傾一斜角，亦不好應用，除非利用雷射鎗發出一圓形光束。

(四)法，較上幾法好應用，但可能構造複雜，操作不易，即使創作出來也會讓人有一種打造牛刀殺雞的感覺。

(五)法，上述幾法放棄後，我們只好挖空心思去想它了，特別令我們欣賞的是它的第二部分。一綫段之一端點及綫段上任意定點在二坐標軸上移動，則另一端點所劃軌跡即為一橢圓，先看其證明：

參考圖(五)設C為綫段 \overline{AB} 上之一定點，且 $\overline{AB} = a$ ， $\overline{CB} = b$ ，今A C二點在坐標軸上移動，設 \overline{AB} 與x軸之交角為 θ 則B點坐標為 (x, y) 有 $x = a \cos \theta$ ， $y = b \sin \theta$ ，即

$$\frac{x}{a} = \cos \theta, \frac{y}{b} = \sin \theta \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

為橢圓之標準式。由上知，我們要先想像怎麼樣使二點能在二坐標軸上移動，也就是如何使一點移動時，另外一點作垂直方向之運動。

今設計一長方框，分別框入以長及寬為直徑之二圓板使一圓在“長”的方向運動，一圓在“寬”的方向運動，則此二圓之

圓心作垂直方向之運動，可代表圖(五)中之 A，C 二點其連心綫長表 \overline{AC} 之長，將筆置於 B 點，在連心綫上定其位置。將此圓調至所須位置，並使之固定，當大圓轉動時小圓跟著作垂直方向之轉動，則 B 點之筆尖將繪出一橢圓曲綫。

因爲我們所需要的是一能繪任何“離心率”之橢圓規，因此要將 \overline{AB} ， \overline{BC} 之長作隨時之改變因之在二圓板上作一連心方向之槽溝，槽溝上置一可裝筆之固定器，如此則大功告成。

四、如何使用：

我們好不容易才創作出來的“橢圓規”是否經得起任何考驗？也就是是否能繪任意我們所需的橢圓？我們的回答不但肯定，而且滿懷信心。譬如有人想繪一個長軸爲 10 公分，短軸爲 6 公分之橢圓，半徑 3 公分之橢圓，那麼也就是長半徑 5 公分，我們只須將“固定器”中之筆尖位置，調至距大圓圓心 5 公分處，且距小圓圓心 3 公分處，固定好之後，將筆插入筆孔內轉動大圓則筆尖即能繪出所求。

五、結 論：

- (一)我們所設計的“橢圓規”構造甚簡單，使用甚方便，操作多次結果發現，所繪之曲綫平滑順暢，且接頭處甚爲完美無缺。
- (二)欲在任何方位，繪任意大小“寬”“扁”之橢圓皆無問題。
- (三)如果想求所繪橢圓之焦點，則以短軸上之頂點爲圓心橢圓之長半徑爲半徑作圖交長軸於 C 及 C' 二點即爲二焦點。
- (四)我們所用資料最好是透明的壓克力，或硬質塑膠，取其製作成本便宜及可觀察繪圖時筆尖之運動情形。
- (五)上述所舉幾個構成橢圓之方法，皆很淺顯及普遍，一般高中生皆讀過，因此我們如果肯花些功夫，應用思考去聯想一些我們從上課本中所獲得的知識，可能會有更好的發現。