6174

高中教師組第一名

省立嘉義高級中學　　作　者：張　兆　嘉

甲、前　言：

清華大學數研所林聰源教授在"數學導論"課程中，提出了關於四位數的一個有趣的性質：將任一四位數（數字不完全相同）的四個數字所排成的"最大數"減去"最小數"，連續做下去，最後必得6174，例如四位數2692，先9622－2269＝7353，再7533－3357＝4176，再7641－1467＝6174，而止於此。這種"現象"的確迷人，經予以探討其現象，幾經挫折，終得其秘，今述之如下：

乙、約　定：

為了討論的方便，作了下列約定：

1. 文中所提及文字 $a, b, c, d \in \{0, 1, 2, 3, \cdots\cdots, 9\}$，且 a, b, c, d 不全相等，以 $<a, b, c, d>$ 表示 $1000a + 100b + 10c + d$。
2. 若 $a \geqq b \geqq c \geqq d$，$a \neq d$，則稱 $<a, b, c, d>$ 為由 a, b, c, d 四數字所成之大數，而 $<d, c, b, a>$ 為小數，以下簡稱大數，小數。
3. 若 $<a, b, c, d>$ 為大數，設 $r = a - d$，$s = b - c$。則在討論本問題時，有序數組 (r, s) 可以充分地代替"由 a, b, c, d 所形成的所有四位數"，故將以 (r, s) 代替此等四位數。
4. 為討論上的需要，0034，0123……等均暫視為由0，0，

3，4；0，1，2，3……所成四位數。

三、主要論點：

(一)使用約定3中之（r，s），可將所有四位數<a，b，c，d>窮盡地分割成54組：

（9，9），（9，8），…，（9，0）；（8，8），（8，7），…，（8，0）；（7，7），（7，6），…（7，0）；（6，6），（6，5）…，（6，0）；（5，5），（5，4），…（5，0）；（4，4），（4，3），…，（4，0）；（3，3），（3，2），…，（3，0）；（2，2），（2，1），（2，0）；（1，1），（1，0）

討論此54組，可以窮盡四位數的討論。

(二)若<a，b，c，d>爲大數，則<a，b，c，d>－<d，c，b，a>=<r，s，0，0>－<0，0，s，r>

證明須分 s＝0 及 s≧1 兩種情形，s＝0時易證，故只證 s≧1之情形如下：

$$
\begin{aligned}
&\langle a,b,c,d\rangle-\langle d,c,b,a\rangle \\
&=1000a+100b+10c+d-(1000d+100c+10b+a) \\
&=1000(d+r)+100(c+s)+10c+d-[1000d+100c+10(c+s)+(d+r)] \\
&=1000r+100(s-1)+10(9-s)+(10-r) \\
&=1000r+100(s-1)+(100-10s-r) \\
&=1000r+100s+10\cdot 0+1\cdot 0-[1000\cdot 0+100\cdot 0+10\cdot s+r] \\
&=\langle r,s,0,0\rangle-\langle 0,0,s,r\rangle
\end{aligned}
$$

由之得以數組（r，s）來討論<a，b，c，d>－<d，c，b，a>之結果。

(三)任一（r，s），若 s≧1，則<r，s，0，0>－<0，0，s，r>= 1000r＋100（s－1）+10（9－s）+（10－r）

若 $s=0$，則 $\langle r, s, 0, 0\rangle - \langle 0, 0, s, r\rangle = 1000(r-1)+900+90+(10-r)$

由之任一 (r, s) 經一次相減後所得四個數字必為 $r, s-1, 9-s, 10-r$ 或 $r-1, 9, 9, 10-r$。設所成大數為 $\langle a', b', c', d'\rangle$。設 $r'=a'-d'$，$s'=b'-c'$。由 (r, s) 得 (r', s') 以 $(r, s)\rightarrow(r', s')$ 表示之。稱 (r, s) 為 (r', s') 之"前者"……約定5。

1. 於 $s \geqq 1$ 時，由於 $r \geqq s$，$\therefore r > s-1$，故其所排成大數之情形，恰有10種：

   $\langle r, 9-s, 10-r, s-1\rangle$，$\langle r, 10-r, 9-s, s-1\rangle$，$\langle r, 9-s, s-1, 10-r\rangle$，$\langle r, 10-r, s-1, 9-s\rangle$，$\langle r, s-1, 9-s, 10-r\rangle$，$\langle r, s-1, 10-r, 9-s\rangle$，$\langle 9-s, 10-r, r, s-1\rangle$，$\langle 9-s, r, 10-r, s-1\rangle$，$\langle 10-r, r, 9-s, s-1\rangle$，$\langle 10-r, 9-s, r, s-1\rangle$。

   另二種 $\langle 9-s, r, s-1, 10-r\rangle$ 及 $\langle 10-r, r, s-1, 9-s\rangle$ 均因 $|(9-s)-(10-r)| \ngeqq r-(s-1)$，故不可能。

2. 於 $s=0$ 時，恰有 $\langle 9, 9, r-1, 10-r\rangle$ 及 $\langle 9, 9, 10-r, r-1\rangle$ 兩種。

3. 於 $(r, s)\rightarrow(r', s')$ 中，為欲明白表示其間關係，特將上述12種情形加以安排次序，並分別列出 (r', s')，$[r'+s', r'-s']$ 及相關事項，如表一：

表　一

	(r', s')	$[r'+s', r'-s']$	其他
①$\langle r, 9-s, 10-r, s-1\rangle$	$(r+1-s, r-1-s)$	$[2r-2s, 2]$	$r \geqq 5$
②$\langle r, s-1, 10-r, 9-s\rangle$	$(r+s-9, r+s-11)$	$[2(r+s-10), 2]$	

③ $\langle 10-r, 9-s, r, s-1\rangle$	$(11-r-s, 9-r-s)$	$[2(10-r-s), 2]$	
④ $\langle r, 10-r, 9-s, s-1\rangle$	$(r+1-s, 1+s-r)$	$[2, 2(r-s)]$	$r \geqq 5$
⑤ $\langle r, 10-r, s-1, 9-s\rangle$	$(r+s-9, 11-r-s)$	$[2, 2(r+s-10)]$	
⑥ $\langle 10-r, r, 9-s, s-1\rangle$	$(11-r-s, r+s-9)$	$[2, 2(10-r-s)]$	
⑦ $\langle r, 9-s, s-1, 10-r\rangle$	$(2r-10, 10-2s)$	$[2(r-s), 2(r+s-10)]$	$r+s \geqq 11$
⑧ $\langle 9-s, r, 10-r, s-1\rangle$	$(10-2s, 2r-10)$	$[2(r-s), 2(10-r-s)]$	$r+s \leqq 9$
⑨ $\langle r, s-1, 9-s, 10-r\rangle$	$(2r-10, 2s-10)$	$[2(r+s-10), 2(r-s)]$	$r \geqq s+1$
⑩ $\langle 9-s, 10-r, r, s-1\rangle$	$(10-2s, 10-2r)$	$[2(10-r-s), 2(r-s)]$	$r \geqq s+1$
⑪ $\langle 9, 9, r-1, 10-r\rangle$	$(r-1, 10-r)$	$[9, 2r-11]$	
⑫ $\langle 9, 9, 10-r, r-1\rangle$	$(10-r, r-1)$	$[9, 11-2r]$	

㈣由上列表一，可得下列結果：

1. 凡 (r', s') 中，$r'+s'=9$，則必是 $(r, 0)\rightarrow(r', s')$ 此由上表⑪，⑫可知，如此之 (r', s') 共有 $(9, 0)$，$(8, 1)$，$(7, 2)$，$(6, 3)$，$(5, 4)$ 共5組。

2. 凡經由 (r, s) 而得之 (r', s') 不可能 "$r'+s'$ 爲奇數，且 $r'+s'\neq 9$"。
   理由是上表中①～⑩之 $r'+s'$ 均爲偶數，故相加爲奇數必爲⑪，⑫而 $r'+s'=9$。由之，凡 $r'+s'$ 爲奇數，且 $r'+s'\neq 9$ 者，均不能由 (r, s) 經相減而得。合此條件之 (r', s') 可以說無"前者"。即凡 (r, s) 合此條件時，必無前者，而爲原如的一組。此種 (r, s) 共有 $(9, 2)$，$(9, 4)$，$(9, 6)$，$(9, 8)$，$(8, 3)$，$(8, 5)$，$(8, 7)$，$(7, 0)$，$(7, 4)$，$(7, 6)$，$(6, 1)$，$(6, 5)$，$(5, 0)$，$(5,$

2），（4，1），（4，3），（3，0），（3，2），（2，1），（1，0）共20組。

3. 凡（r'，s'）中之r'，s'爲相等奇數且大於1，亦無“前者”。

理由是$r'+s'$爲大於2之偶數，且$r'-s'=0$，故表中①～⑥及⑪，⑫均不合，而⑦～⑩中之r'，s'均爲偶數，故亦不合。合此條件者有（3，3）（5，5）（7，7）（9，9）4組。

4. 凡（r'，s'）中r'，s'均爲奇數，且$r'-s'>2$者，亦無“前者”，理由同3.。

5. 凡（r'，s'）中r'，s'爲相等偶數時，此組（r'，s'）亦無“前者”。

理由是①～⑥及⑪，⑫易知不可能，⑦，⑧中，若令$r'=s'$得$r+s=10$分別與$r+s\geqq 11$，$r+s\leqq 9$矛盾。而⑨⑩中令$r'=s'$則$r=s$均每$r\geqq s+1$矛盾。合此條件者共有（2，2），（4，4），（6，6），（8，8）四組。

6. 若（r，s）經相減後得6174，則（r，s）=（6，2）。

證明：設（r，s）→（r'，s'）對應於6174，則（r'，s'）=（6，2）　∴$s\neq 0$

而$\langle r,s,0,0\rangle-\langle 0,0,s,r\rangle=\langle r,s-1,9-s,10-r\rangle=\langle 6,1,7,4\rangle$，則$r=6$，$s=2$。

7. 設（r，s）→（6，2），則（r，s）=（4，2），（6，2），（8，4），（8，6）。

理由：由表一之⑩⑧⑦⑨中，使$r'=6$，$s'=2$代入可得。

8. 除（6，2）外，均不可能（r，s）→（r，s）。

理由：除由表一⑧（r，s）→（r，s）不致矛盾外，其他均得不合理結果。例如於①中使$r'=r$，$s'=s$則$r=3$

，s＝1和r≧5矛盾。又於②中使r′＝r，s′＝s 則得 r＝2，s＝9和r≧s矛盾。以下各項，除⑧外逐項檢查之，均矛盾。

9. 如2，3，4，5所述，無"前者"之(r，s)共34組，經由計算均可至6174，以(r，s)＝(9，6)爲例，計算如下(由論點二)

由(9，6)　經 9600－0069＝9531，而得(8，2)

再經 8200－0028＝8172 得(7，5)

由 7500－0057＝7443，而得(4，0)

再經 4000－0004＝3996 得(6，3)

由 6300－0036＝6264，而得(4，2)

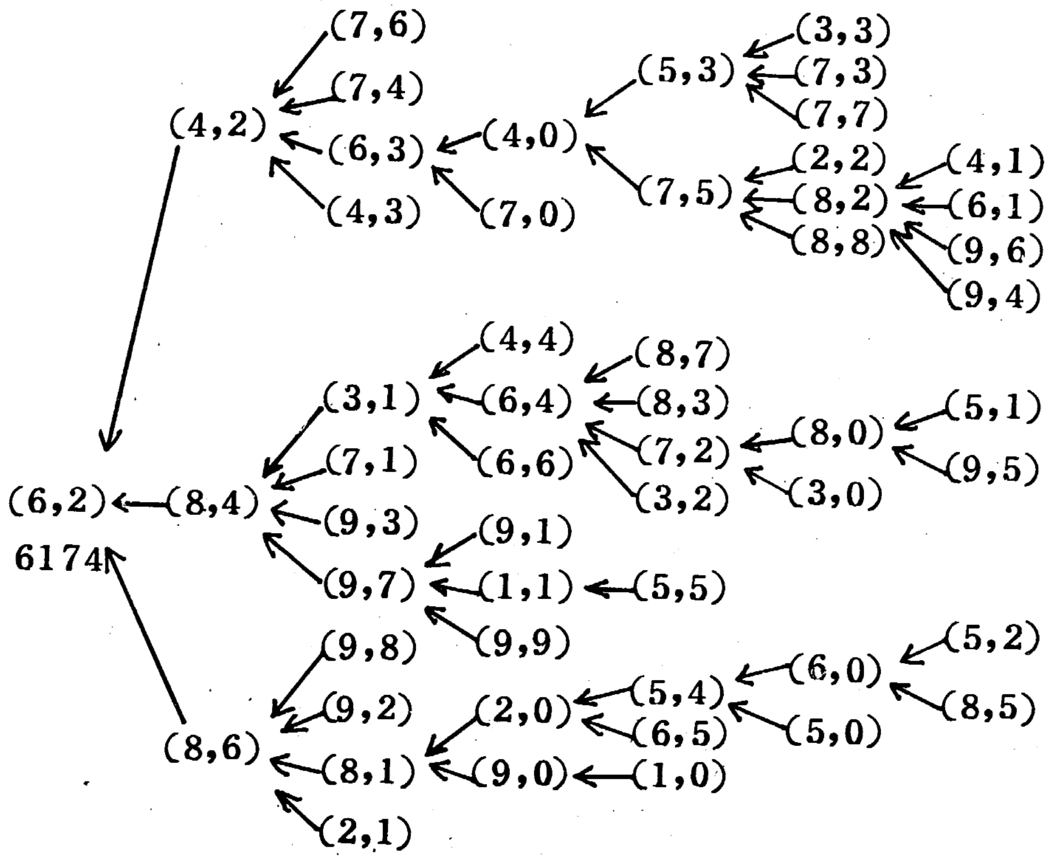
再經 4200－0024＝4176 得(6，2)

由 6200－0026＝6174

亦即 7641－1467＝6174。

10. 仿9.將此34組逐一計算得下表：

表二：



四、結　　論：

任一四位數，只要其數字不完全相同，經“大數減小數”至多 7 次必可得 6174，且以 6174 爲終點。

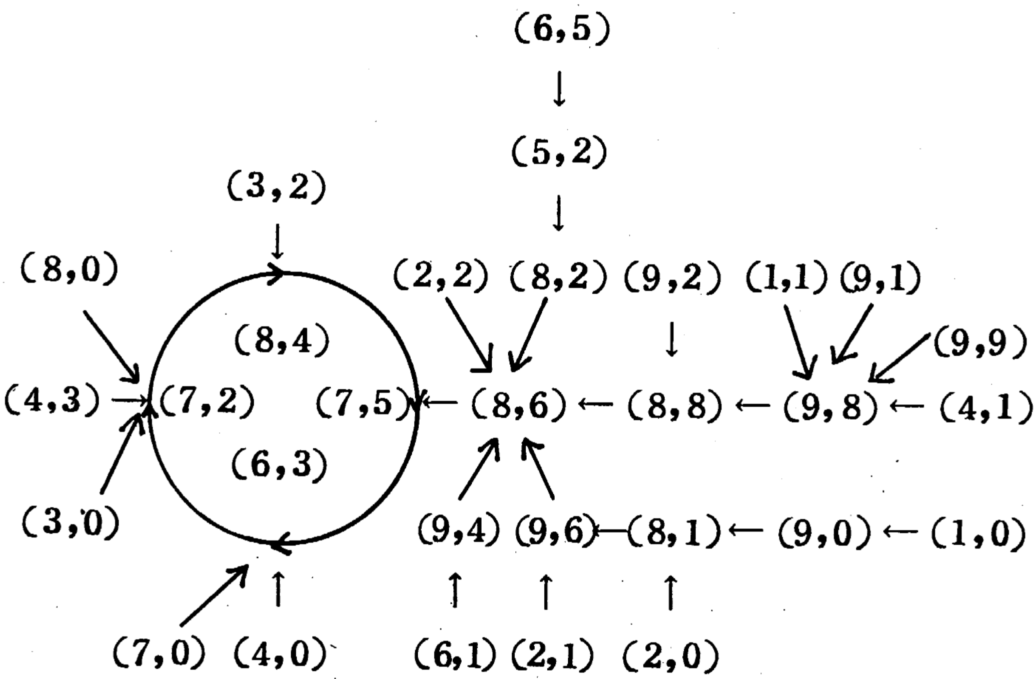
五、初步的推廣：

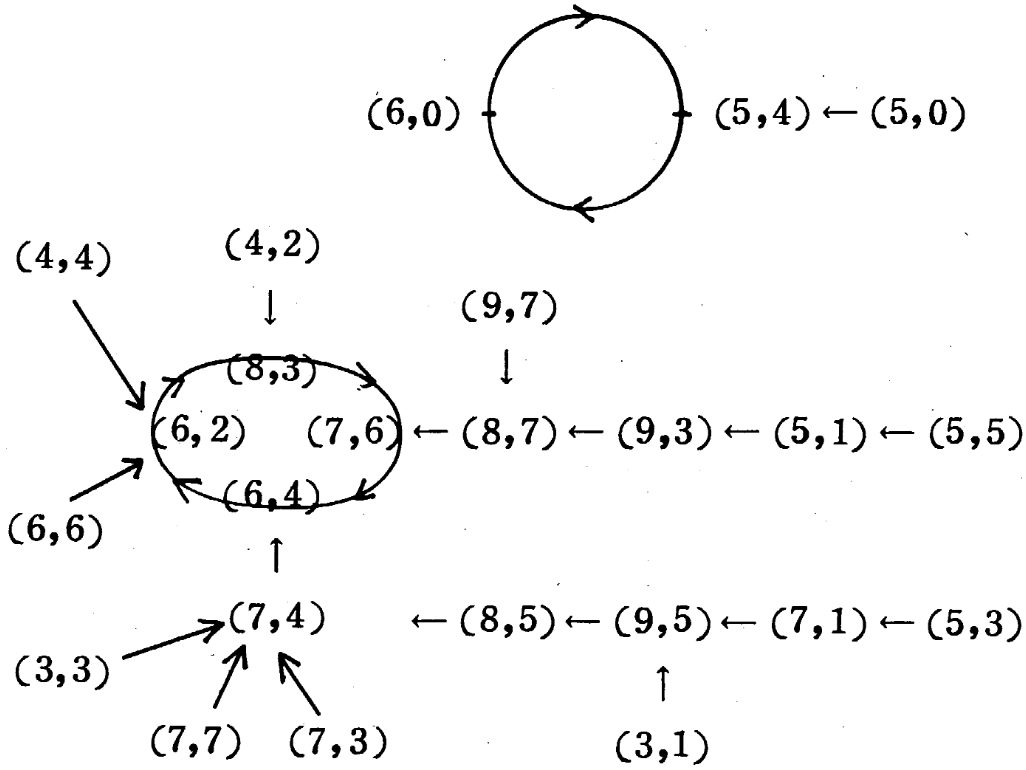
(一)於二位數並無此現象，而引起循環。設二位數＜a，b＞，a＞b，令 $r = a - b$，此循環可表示爲下：

$$\begin{array}{ccccccccc} & & r=2 & & r=4 & & r=8 & & r=6 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ r=9 & \rightarrow & r=7 & \rightarrow & r=3 & \rightarrow & r=5 & \rightarrow & r=1 \end{array}$$

(二)於三位數至多經 6 次相減必可得 495 且爲終點。

(三)於五位數亦引起循環，但分成互不相干的 3 組，圖示如下，以供有意繼續研究參考者。設＜a，b，c，d，e＞爲大數；$r = a - e$，$s = b - d$，則以（r，s）表此五位數組，則如下情形：




(6,0)
(5,4)
(5,0)
(4,4)
(4,2)
(9,7)
(8,3)
(6, 2)
(7,6)
(8,7)
(9,3)
(5,1)
(5,5)
(6,4)
(6,6)
(7,4)
(8,5)
(9,5)
(7,1)
(5,3)
(3,3)
(7,7)
(7,3)
(3,1)