巴斯卡是否想到這個三角形？

高中組數學第三名

臺灣省立嘉義高級中學　　　作　　者：陳翹湘・黃維德

指導老師：林　崑　炎

一、動　　機：

在高二學習複數時，我們由棣美佛定理：$n\in N\ (\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ ）導出了 $\cos n\theta$ 與 $\sin n\theta$ 可用 $\cos\theta$ 及 $\sin\theta$ 之多項式表示。我們發覺她們的係數頗有規律，值得研討，因此就開始研究 $\tan n\theta$ 與 $\sin n\theta+\cos n\theta$ 展開式中，其係數間的關係。

二、研　　究：

㈠根據棣美佛定理，我們可以求得 $\sin n\theta$ 與 $\cos n\theta$ 的展開式，得

$$\sin n\theta=C^n_{n-1}\sin\theta\cos^{n-1}\theta-C^n_{n-3}\sin^3\theta\cos^{n-3}\theta+\cdots\cdots+(-1)^{r+1}C^n_{n-(2r+1)}\sin^{2r+1}\theta\cos^{n-(2r+1)}\theta+\cdots\cdots\cdots$$

$$\cos n\theta=C^n_n\cos^n\theta-C^n_{n-2}\sin^2\theta\cos^{n-2}\theta+\cdots\cdots\cdots+(-1)^r C^n_{n-2r}\sin^{2r}\theta\cos^{n-2r}\theta+\cdots\cdots\cdots$$

據此，我們研究 $\tan n\theta$ 展開示之係數之關係，如表㈠

表　　　(一)

n	tan nθ	係　　數
1	$\dfrac{\tan\theta}{1}$	1
2	$\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$	1 2 1　1
3	$\dfrac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$	3　1 1　3
4	$\dfrac{4\tan\theta-4\tan^3\theta}{1-6\tan^2\theta+\tan^4\theta}$	4　4 1　6　1
5	$\dfrac{5\tan\theta-10\tan^3\theta+\tan^5\theta}{1-10\tan^2\theta+5\tan^4\theta}$	5　10　1 1　10　5
6	$\dfrac{6\tan\theta-20\tan^3\theta+6\tan^5\theta}{1-15\tan^2\theta+15\tan^4\theta-\tan^6\theta}$	6　20　6 1　15　15　1
⋮		
n	$\dfrac{C^n_{n-1}\tan\theta-C^n_{n-3}\tan^3\theta+\cdots\cdots+(-1)^{r+1}C^n_{n-(2r+1)}\tan^{2r+1}\theta+\cdots\cdots}{C^n_n-C^n_{n-2}\tan^2\theta+\cdots\cdots+(-1)^r C^n_{n-2r}\tan^{2r}\theta+\cdots\cdots}$	

我們發現 $\tan n\theta$ 展開式中，各項係數間的關係和巴斯卡三角形一致，祇不過它的係數是在分母、分子間跳躍而已，同時在 $\tan n\theta$ 的展開式中，分母與分子各項的正負符號也是“+，－，+，－，…”的交替循環，至於 $\tan n\theta$ 展開式的證明如下：

$$\tan n\theta=\frac{\sin n\theta}{\cos n\theta}=\frac{C^n_{n-1}\sin\theta\cos^{n-1}\theta-C^n_{n-3}\theta\sin^3\theta\cos^{n-3}\theta}{C^n_n\cos^n\theta-C^n_{n-2}\sin^2\theta\cos^{n-2}\theta+}$$

$$\frac{+\cdots\cdots+(-1)^{r+1}C^n_{n-(2r+1)}\sin^{2r+1}\theta\cos^{n-(2r+1)}\theta+\cdot}{\cdots\cdots+(-1)^r C^n_{n-2r}\sin^{2r}\theta\cos^{n-2r}\theta+\cdots\cdots}$$

我們將分子名分母同除以 $\cos^n\theta$，得

$$\tan n\theta=\frac{C^n_{n-1}\tan\theta-C^n_{n-3}\tan^3\theta+\cdots\cdots+(-1)^{r+1}}{C^n_n-C^n_{n-2}\tan^2\theta+\cdots\cdots+(-1)^r}$$

$$\frac{C^n_{n-(2r+1)}\tan^{2r+1}\theta+\cdots\cdots}{C^n_{n-2r}\tan^{2r}\theta+\cdots\cdots\cdots}$$

(二)其次，我們研究 $\sin n\theta+\cos n\theta$：先看表(二)

表 (二)

n	$\sin n\theta$
1	$\sin\theta$
2	$2\sin\theta\cos\theta$
3	$3\sin\theta\cos^2\theta-\sin^3\theta$
4	$4\sin\theta\cos^3\theta-4\sin^3\theta\cos\theta$
5	$5\sin\theta\cos^4\theta-10\sin^3\theta\cos^2\theta+\sin^5\theta$
⋮	
n	$C^n_{n-1}\sin\theta\cos^{n-1}\theta-C^n_{n-3}\sin^3\theta\cos^{n-3}\theta+\cdots\cdots+\cdots$ $\cdots+(-1)^{r+1}C^n_{n-(2r+1)}\sin^{2r+1}\theta\cos^{n-(2r+1)}\theta+\cdots\cdots$

表 (二)

n	$\cos n\theta$
1	$\cos\theta$
2	$\cos^2\theta - \sin^2\theta$
3	$\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta$
4	$\cos^4\theta - 6\sin^2\theta\cos^2\theta + \sin^4\theta$
5	$\cos^5\theta - 10\sin^2\theta\cos^3\theta + 5\sin^4\theta\cos\theta$
⋮	
n	$C_n^n\cos^n\theta - C_{n-2}^n\sin^2\theta\cos^{n-2}\theta + \cdots\cdots\cdots\cdots + (-1)^r C_{n-2r}^n\sin^{2r}\theta\cos^{n-2r}\theta + \cdots\cdots$

由表(二)可得表(三)

	$\sin n\theta + \cos n\theta$	係　數
1	$\cos\theta + \sin\theta$	1　1
2	$\cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta$	1　2　1
3	$\cos^3\theta + 3\sin\theta\cos^2\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta - \sin^3\theta$	1　3　3　1
4	$\cos^4\theta + 4\sin\theta\cos^3\theta - 6\sin^2\theta\cos^2\theta - 4\sin^3\theta\cos\theta + \sin^4\theta$	1　4　6　4　1
5	$\cos^5\theta + 5\sin\theta\cos^4\theta - 10\sin^2\theta\cos^3\theta - 10\sin^3\theta\cos^2\theta + 5\sin^4\theta\cos\theta + \sin^5\theta$	1　5　10　10　5　1
⋮		
⋮		

我們發現，它們的係數排列就是巴斯卡三角形。

它們係數前的符號是“＋＋－－＋＋－－”交替循環著。

㈢根據恒等式 $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ ，將㈡中 $\cos n\theta + \sin n\theta$ 之和的型式略改變，使 $\cos\theta$ 僅止於一次式，且依 $\sin\theta$ 的升冪排列，我們又有它們各項係數間的關係，如表㈣：

n	$\sin n\theta + \cos n\theta$
1	$\cos\theta + \sin\theta$
2	$1 + 2\sin\theta\cos\theta - 2\sin^2\theta$
3	$\cos\theta + 3\sin\theta - 4\sin^2\theta\cos\theta - 4\sin^3\theta$
4	$1 + 4\sin\theta\cos\theta - 8\sin^2\theta - 8\sin^3\theta\cos\theta + 8\sin^4\theta$
5	$\cos\theta + 5\sin\theta - 12\sin^2\theta\cos\theta - 20\sin^3\theta + 16\sin^4\theta \cos\theta + 16\sin^5\theta$
6	$1 + 6\sin\theta\cos\theta - 18\sin^2\theta - 32\sin^3\theta\cos\theta + 48\sin^4\theta + 32\sin^5\theta\cos\theta - 32\sin^6\theta$
7	$\cos\theta + 7\sin\theta - 24\sin^2\theta\cos\theta - 56\sin^3\theta + 80\sin^4\theta \cos\theta + 112\sin^5\theta - 64\sin^6\theta - 64\sin^7\theta$
8	$1 + 8\sin\theta\cos\theta - 32\sin^2\theta - 80\sin^3\theta\cos\theta + 160\sin^4\theta + 192\sin^5\theta\cos\theta - 256\sin^6\theta - 128\sin^7\theta\cos\theta + 128\sin^8\theta$
9	$\cos\theta + 9\sin\theta - 40\sin^2\theta\cos\theta - 120\sin^3\theta + 240\sin^4\theta \cos\theta + 432\sin^5\theta - 448\sin^6\theta\cos\theta - 576\sin^7\theta + 256\sin^8\theta\cos\theta + 256\sin 9\theta$
⋮	

很顯然地當 $\sin n\theta + \cos n\theta$ 的和僅止於 $\cos\theta$ 的一次式，而按照 $\sin\theta$ 的升冪排列時"$\cos\theta$"僅在 n 為奇數時出現於排列式的奇數項；n 為偶數時出現於排列式的偶數項。

而它們各項的符號亦是"＋＋－－＋＋－－"交替的循環。

現將 $\sin n\theta + \cos n\theta$ 的各項係數排列如下，並與巴斯卡三角

形作一比較：

n=0	1	1
1	1 1	1 1
2	1 2 2	1 2 1
3	1 3 4 4	1 3 3 1
4	1 4 8 8 8	1 4 6 4 1
5	1 5 12 20 16 16	1 5 10 10 5 1
6	1 6 18 32 48 32 32	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 24 56 80 112 64 64	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 32 80 160 192 256 128 128	1 8 28 56 70 56 28 8 1
9	1 9 40 120 240 432 448 576 256 256	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
⋮		

四、結　論：

(一)在這個三角陣中，右方的斜線未能與左方的成對稱，此一性質與巴斯卡三角形不同。左方首二斜線與巴斯卡三角形的左方首二斜線是相同的，就三角陣中的元素排列而言，其相同之處亦不過在此而已。

(二)在這個三角陣中，次一列的元素可以由前一列的元素略施以加法而得。這點和巴斯卡三角形似乎相同，但是它同一列的各個數未必皆像巴斯卡三角形一般由前一列相鄰的兩個數相加而得。在右方位於偶數行斜線的元素和巴斯卡三角形一樣，由前一列之相鄰兩個數相加而得；而在右方位於奇數行斜線的數是由前一列之相鄰三個數相加而得，其理由如下：

令 $a_0 = 0$ ， $a_1 a_2 a_3 \cdots\cdots a_n a_{n+1} \neq 0$ ， $n \in N$

1.當 n 爲偶數時，即 $n = 2m$ ， $m \in N$ 時

令 $\sin n\theta = \cos\theta \,[\, a_2 \sin\theta - a_4 \sin^3\theta + a_6 \sin^5\theta + \cdots\cdots + (-1)^{m+1} a_n \sin^{n-1}\theta \,]$

$\cos n\theta = a_1 - a_3 \sin^2\theta + a_5 \sin^4\theta - a_7 \sin^6\theta + \cdots\cdots + (-1)^m a_{n+1} \sin^n\theta$

而 $\cos(n+1)\theta + \sin(n+1)\theta = \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta + \sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta$

又 $\cos n\theta\cos\theta = a_1\cos\theta - a_3\sin^2\theta\cos\theta + a_5\sin^4\theta\cos\theta + \cdots\cdots + (-1)^r a_{2r+1}\sin^{2r}\theta\cos\theta + \cdots\cdots + (-1)^m a_{n+1}\sin^n\theta\cos\theta \cdots\cdots①$

$\sin n\theta\sin\theta = a_2\sin^2\theta\cos\theta - a_4\sin^4\theta\cos\theta + \cdots\cdots + (-1)^{r+1} a_{2r}\sin^{2r}\theta\cos\theta + \cdots\cdots + (-1)^{m+1} a_n \sin^n\theta\cos\theta \cdots\cdots②$

$\sin n\theta\cos\theta = (1 - \sin^2\theta)\,[\, a_2\sin\theta - a_4\sin^3\theta + \cdots\cdots + (-1)^{m+1} a_n \sin^{n-1}\theta \,]$

$= a_2\sin\theta - a_4\sin^3\theta + \cdots\cdots + (-1)^{r+1} a_{2r}\sin^{2r-1}\theta + \cdots\cdots + (-1)^{m+1} a_n \sin^{n-1}\theta - a_2\sin^3\theta + a_4\sin^5\theta - \cdots\cdots + (-1)^{r+1}$

$a_{2r-1}\sin^{2r-1}\theta+\cdots\cdots+(-1)^m a_n$
$\sin^{n+1}\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$

$\cos n\theta\ \sin\theta=a_1\sin\theta-a_3\sin^3\theta+\cdots\cdots\cdots+(-1)^{r+1}$
$a_{2r-1}\sin^{2r-1}\theta+\cdots\cdots+(-1)^m a_{n+1}$
$\sin^{n+1}\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$

$\therefore \cos(n+1)\theta+\sin(n+1)\theta=①-②+③+④$
$=a_1\cos\theta+(a_0+a_1+a_2)\sin\theta-(a_2+a_3)\sin^2\theta$
$\cos\theta+\cdots\cdots+\cdots\cdots+(-1)^{r+1}(a_{2r-2}+a_{2r-1}+$
$a_{2r})\sin^{2r-1}\theta+(-1)^r(a_{2r}+a_{2r+1})\sin^{2r}\theta$
$\cos\theta+\cdots\cdots+(-1)^m(a_n+a_{n+1})\sin^n\theta\cos\theta+$
$(-1)^m(a_n+a_{n+1})\sin^{n+1}\theta$

將其係數排列如下：

$(n)-a_1-a_2-a_3\cdots\cdots a_{2r-2}-a_{2r-1}-a_{2r}-a_{2r+1}\cdots\cdots a_n-a_{n+1} \quad (n=2m)$

$A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad \cdots\cdots \quad A_{2r-1} \quad A_{2r} \quad A_{2r+1} \quad \cdots\cdots \quad A_{n+1} \quad A_{n+2}$

得 $A_1=a_1 \quad A_3=a_2+a_3 \quad A_{2r+1}=a_{2r}+a_{2r+1}\cdots\cdots A_{n+1}=a_n+a_{n+1}$
$A_2=a_0+a_1+a_2\cdots\cdots A_{2r}=a_{2r-2}+a_{2r-1}+a_{2r}\cdots\cdots A_{n+2}=a_n+a_{n+1}$
故知，當 $a_n=a_{n+1}$ 且爲 2 的乘冪時，$A_{n+1}=2a_n$ 亦爲 2 的乘冪。

2.當 n 爲奇數，即 $n=2m-1$，$m\in N$ 時，

令 $\sin n\theta=a_2\sin\theta-a_4\sin^3\theta+\cdots\cdots+(-1)^{m+1}a_{n+1}$
$\sin^n\theta$

$\cos n\theta=a_1\cos\theta-a_3\sin^2\theta\cos\theta+\cdots\cdots+(-1)^{m+1}$
$a_n\sin^{n-1}\theta\ \cos\theta$

$\therefore \cos n\theta\cos\theta=a_1-a_3\sin^2\theta+\cdots\cdots+(-1)^{r+1}a_{2r-1}$
$\sin^{2r-2}\theta+\cdots\cdots+(-1)^{m+1}a_n\sin^{n-1}\theta$
$-a_1\sin^2\theta+a_3\sin^4\theta+\cdots\cdots+(-1)^{r+1}$
$a_{2r-3}\sin^{2r-2}\theta+\cdots\cdots+(-1)^m a_n$
$\sin^{n+1}\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$

$\sin n\theta\ \sin\theta=a_2\sin^2\theta-a_4\sin^4\theta+\cdots\cdots+(-1)^{r+1}$

$$a_{2r}\sin^{2r}\theta+\cdots\cdots+(-1)^{m+1}a_{n+1}\sin^{n+1}\theta\cdots\cdots\text{②}$$

$$\sin n\theta\cos\theta=a_2\sin\theta\cos\theta-a_4\sin^3\theta\cos\theta+\cdots\cdots+(-1)^{r+1}a_{2r}\sin^{2r-1}\theta\cos\theta+\cdots\cdots+(-1)^{m+1}a_{n+1}\sin^n\theta\cos\theta\cdots\cdots\text{③}$$

$$\cos n\theta\sin\theta=a_1\sin\theta\cos\theta-a_3\sin^3\theta\cos\theta+\cdots\cdots+(-1)^{r+1}a_{2r-1}\sin^{2r-1}\theta\cos\theta+\cdots\cdots+(-1)^{m+1}a_n\sin^n\theta\cos\theta\cdots\cdots\text{④}$$

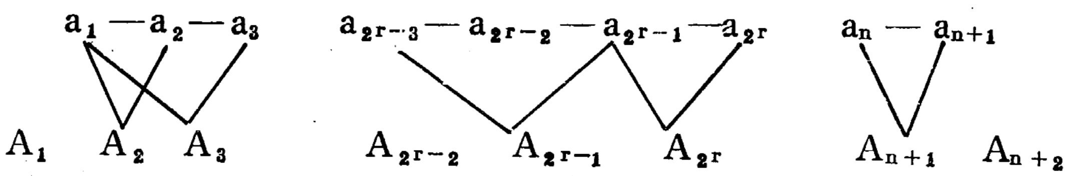
由此得

$$\cos(n+1)\theta+\sin(n+1)\theta=\text{①}-\text{②}+\text{③}+\text{④}$$

$$=a_1+(a_1+a_2)\sin\theta\cos\theta-(a_1+a_2+a_3)\sin^2\theta+\cdots\cdots+(-1)^{r+1}(a_{2r-1}+a_{2r-2}+a_{2r-3})\sin^{2r-2}\theta+(-1)^{r+1}(a_{2r-1}+a_{2r})\sin^{2r-1}\theta\cos\theta+\cdots\cdots+(-1)^{m+1}(a_n+a_{n+1})\sin^n\theta\cos\theta+(-1)^{m+1}(a_n+a_{n+1})\sin^{n+1}\theta$$

排列其係數如下：

(n)



得 $A_1=a_1$ $A_3=a_1+a_2+a_3$ $A_{2r-1}=a_{2r-3}+a_{2r-2}+a_{2r-1}$

$A_2=a_1+a_2$ $A_{2r}=a_{2r-1}+a_{2r}$,

$A_{n+1}=a_n+a_{n+1}=A_{n+2}$

故得證

(三)在巴斯卡三角形中任何斜線（左方或右方）的第 n 個元素可由前一斜線之前 n 個元素相加而得，譬如“21”爲右方第三斜線的第六個元素是由右方第二斜綫之前六個元素“1，2，3，4，5，6”相加而得。（又“21”亦爲左方第六斜綫的第三個元素，因而“21”是左方第五斜線的前三個元素“1，5，15之和）

而在這個三角陣中，使用同一步驟可產生右方偶數行斜線之各

元素

設 L_{mn} 表右方第 m 行斜線之第 n 個元素，其一般式爲

$$L_{2kn} = \sum_{i=1}^{n} L_{(2k-1)i}$$

又在右方奇數行斜綫中第 n 個元素，可由這一行之前（ n － 1 ）個元素之和再加前一行之第 n 個元素而得，其一般式爲

$$L_{(2k+1)n} = L_{2kn} + \sum_{i=1}^{n-1} L_{(2k+1)i}$$

㈣同時亦可知道右方二行斜線的元素列列相等，且爲 2 的乘冪

1

1 1

1 2 2

1 3 4 4

1 4 8 8 8

1 5 12 20 16 16

1 6 18 32 48 32 32

1 7 24 56 80 112 64 64

1 8 32 80 160 192 256 128 128

1 9 40 120 240 432 448 576 256 256

㈤若依 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ 將㈡中 $\cos n\theta + \sin n\theta$ 之和改變型式，若僅止於 $\sin\theta$ 的一次式而按照 $\cos\theta$ 的升冪排列，它們的係數仍將出現這個三角陣的形狀，祇是它們的各項係數將改爲由右而左“＋＋－－＋＋－－”的交替循環，其餘均完全相同，僅將 $\cos\theta$ 與 $\sin\theta$ 的位置相互對換而已。

㈥此“三角形”和巴斯卡三角形之間的關係：

在 $\sin n\theta + \cos n\theta$ 之展開式中（以 $\sin\theta$ 之升冪排列，且僅止於 $\cos\theta$ 的一次式），我們已有方法可以求其係數，但以此方

法求解係數，其過程繁雜且不易記。下面我們可直接由巴斯卡三角形來導出此一係數。先看下列一例：

“求 $\sin 10\theta + \cos 10\theta$ 的係數絕對值之排列”（由左而右排列）。

解)：首先作出 $n = 10$ 時之巴斯卡三角形

M_6
C_5
1　　M_5
L_1　　C_4
1　1　　M_4
L_2　　C_3
1　2　1　　M_3
L_3　　C_2
1　3　3　1　　M_2
L_4　　C_1
1　4　6　4　1　　M_1
L_5
1　5　10　10　5　1
L_6
1　6　15　20　15　6　1
1　7　21　35　35　21　7　1
1　8　28　56　70　56　28　8　1
1　9　36　84　126　126　84　36　9　1
1　10　45　120　210　252　210　120　45　10　1
⋮　⋮　⋮　⋮　⋮　⋮　⋮　⋮　⋮　⋮　⋮
b_1　b_2　b_3　b_4　b_5　b_6　b_7　b_8　b_9　b_{10}　b_{11}

今所求係數排列爲 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_{11}$，且 $n = 10$ 在巴斯卡三角形中各項分別爲 $b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots, b_{11}$。

我們要分“奇數項”和“偶數項”來求得：

方法：

1. 先求在奇數項之 $a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, a_{11}$

(1)將 $n = 10$ 的巴斯卡三角形中之奇數項選出來，即

b_1　b_3　b_5　b_7　b_9　b_{11}

（1，45，210，210，45，1）

發現有 6 項（偶數項），我們以 L_6 爲底，且在 L_6 上方作出一正三角形（如圖所示），並以左下到右上爲一斜行，係數由左下往右上排列成 6 個列矩陣

$M_1=[1]$， $M_2=[5\ 1]$， $M_3=[10\ 4\ 1]$

$M_4=[10\ 6\ 3\ 1]$， $M_5=[5\ 4\ 3\ 2\ 1]$

$M_6=[1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]$

(2) 再由 b_1，b_3，b_5，b_7，b_9，b_{11}（注意間隔取項）作出 6 個行矩陣：

$B_1=[b_1]$， $B_3=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \end{bmatrix}$ $B_5=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_5 \end{bmatrix}$ $B_7=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_5 \\ b_7 \end{bmatrix}$

$B_9=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_5 \\ b_7 \\ b_9 \end{bmatrix}$ $B_{11}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_5 \\ b_7 \\ b_9 \\ b_{11} \end{bmatrix}$

亦卽

$B_1=[1]$ $B_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 45 \end{bmatrix}$ $B_5=\begin{bmatrix} 1 \\ 45 \\ 210 \end{bmatrix}$

$B_7=\begin{bmatrix} 1 \\ 45 \\ 210 \\ 210 \end{bmatrix}$ $B_9=\begin{bmatrix} 1 \\ 45 \\ 210 \\ 210 \\ 45 \end{bmatrix}$ $B_{11}=\begin{bmatrix} 1 \\ 45 \\ 210 \\ 210 \\ 45 \\ 1 \end{bmatrix}$

現在我們便可求得 a_1，a_3，a_5，a_7，a_9，a_{11} 等：

$[a_1]=M_1B_1=[1][1]=[1] \Rightarrow a_1=1$

$[a_3]=M_2B_3=[5\ 1]\begin{bmatrix}1\\45\end{bmatrix}=[50] \Rightarrow a_3=50$

$[a_5]=M_3B_5=[10\ 4\ 1]\begin{pmatrix}1\\45\\210\end{pmatrix}=[400] \Rightarrow a_5=400$

$[a_7]=M_4B_7=[10\ 6\ 3\ 1]\begin{pmatrix}1\\45\\210\\210\end{pmatrix}=[1120]$

$\Rightarrow a_7=1120$

$[a_9]=M_5B_9=[5\ 4\ 3\ 2\ 1]\begin{pmatrix}1\\45\\210\\210\\45\end{pmatrix}$

$=[1280] \Rightarrow a_9=1280$

$[a_{11}]=M_6B_{11}=[1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]\begin{pmatrix}1\\45\\210\\210\\45\\1\end{pmatrix}$

$=[512] \Rightarrow a_{11}=512$

2. 再求"偶數項" a_2，a_4，a_6，a_8，a_{10}

(1)方法與 1 同，唯奇數項有 6 項，而偶數項僅有 5 項，故改以 L_5 爲底，且在 L_5 上方作一正三角形。

今 $C_1=[1]$，$C_2=[4\ 1]$，$C_3=[6\ 3\ 1]$，

$C_4 = [\,4\ 3\ 2\ 1\,]$, $C_5 = [\,1\ 1\ 1\ 1\ 1\,]$

$B_2 = [\,b_2\,]$ $\quad B_4 = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_4 \end{bmatrix}$ $\quad B_6 = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_4 \\ b_6 \end{bmatrix}$

$B_8 = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_4 \\ b_6 \\ b_8 \end{bmatrix}$ $\quad B_{10} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_4 \\ b_6 \\ b_8 \\ b_{10} \end{bmatrix}$

即 $B_2 = [\,10\,]$ $\quad B_4 = \begin{bmatrix} 10 \\ 120 \end{bmatrix}$ $\quad B_6 = \begin{bmatrix} 10 \\ 120 \\ 252 \end{bmatrix}$

$B_8 = \begin{bmatrix} 10 \\ 120 \\ 252 \\ 120 \end{bmatrix}$ $\quad B_{10} = \begin{bmatrix} 10 \\ 120 \\ 252 \\ 120 \\ 10 \end{bmatrix}$

$\therefore [\,a_2\,] = C_1 B_2 = [\,1\,][\,10\,] = [\,10\,] \Rightarrow a_2 = 10$

$[\,a_4\,] = C_2 B_4 = [\,4\ 1\,] \begin{bmatrix} 10 \\ 120 \end{bmatrix} = [\,160\,] \Rightarrow a_4 = 160$

$[\,a_6\,] = C_3 B_6 = [\,6\ 3\ 1\,] \begin{bmatrix} 10 \\ 120 \\ 252 \end{bmatrix} = [\,672\,]$

$\Rightarrow a_6 = 672$

$$[a_8] = C_4 B_8 = [\,4\ \ 3\ \ 2\ \ 1\,] \begin{bmatrix} 10 \\ 120 \\ 252 \\ 120 \end{bmatrix} =$$

$$[\,1024\,] \Rightarrow a_8 = 1024$$

$$[a_{10}] = [\,1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\,] \begin{bmatrix} 10 \\ 120 \\ 252 \\ 120 \\ 10 \end{bmatrix} = [\,512\,]$$

$$\Rightarrow a_{10} = 512$$

以上是以 $n = 10$ 爲例，現作出一般法則

當 $n = k$ 時

(1)先作出 $n = k$ 時之巴斯卡三角形，並設在 $n = k$ 之巴斯卡三角形之各項分別爲 b_1，b_2，b_3 ……… b_k，b_{k+1}

(2)分奇數項及偶數項兩種情形（兩種之操作法相同）

(A)設在奇數項時

(a)算出奇數項目有多少個，假設有 r 個，則作出以 L_r 列爲底且在 L_r 上作一正三角形。

(b)將此正三角形內之各係數以自左下至右上之方向分成 r 個斜行，並將各斜行元素由左下至右上順序排列成一列矩陣，共有 r 個（如前例）設爲 M_1，M_2，M_3 ………，M_r

(c)再將 b_1 b_3 b_5 ……… b_{2r-1} 作成 r 個行矩陣，如

$$B_1 = [\,b_1\,] \quad B_3 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad B_5 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_5 \end{bmatrix} \quad B_{2r-1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_5 \\ \vdots \\ b_{2r-1} \end{bmatrix}$$

(d)由上列便可求得 a_1，a_3，a_5，………，a_{2r-1} 之值，如

$[a_1]=M_1B_1 \quad \Rightarrow \quad a_1=$

$[a_3]=M_2B_3$

$[a_5]=M_3B_5$

$\vdots$

$\vdots$

$[a_{2r-1}]=M_rB_{2r-1}$

(B)偶數項的求法亦同。