以三角方程式 ①$\cos\theta=\alpha$，②$\cos+K\cos M\theta=0$之觀點探討等速圓周運動與簡諧運動

高中組數學第三名

省立新竹中學

作　　者：廖 裕 泰等六人

指導老師：黃　　靜　　卿

序

自從孩提時代開始，我們就開始學數學，而所需要學習的內容，也從簡單之加減乘除到現在的方程式、極限、數論等。但在學習過程中，我們發覺到，學習數學越學越抽象，越學越不知道它到底有什麼用。長久的累積下來，使我們內心裡渴望著，期望在學習數學當中，能知道它的實際用途，而不是一味的在解老師們所交待下來的一些一知半解的問題而已。

有鑑於此，我們就結合了兩三個好友，專門在日常生活當中，所容易接觸到的一些問題，想辦法用數學觀念來加以解釋，甚至從中尋找出規則或新的現象來。最後我們發覺像我們常常碰到的如「兩人繞圓周賽跑，分針與時針運轉、分針與時針之追趕、彈簧之振動……等，其實都可以用三角函數的觀念來加以解釋。因為這是一個集思廣益的工作，因此我們無法像一般人寫書一樣，作一個很有系統的理論推演，我們只能約略的提出具有代表性的 9 個問題，然後以這九個問題為中心，鉤劃出我們今天所要講的主題——以三角函數的觀念來談等速圓周運動與簡諧運動。而使用這觀點來探討時，最簡便、最充備

。因爲我們發現要解決這九個問題時只需解兩三角方程式 $\cos\theta=\alpha$ 與 $\cos\theta+K\cos M\theta=0$ 即可。

今將以上所述的 9 個問題約略介紹於後：

次　序	內　　容　　摘　　要	使用觀念
問題 1	一動點P在單位圓上從（1，0）出發，逆時針方向作等速圓周運動時，其位置與時間之關係爲何（設其週期爲 λ）	座標與有向角
問題 2	由上題求①P過圓上任意點A之時間，②T時間內過A之次數	解 $\cos\theta=\alpha$
問題 3	圓上另一動點Q從（－1，0）出發（週期爲 λ'）與P反方向而行，求①時間與位置之關係，②PQ何時相遇，③T時間內相遇之次數，④相遇之位置爲何。	解 $\cos\theta=\alpha$ 統計圖表
問題 4	將彈簧固定於一端點，另一端點P上下擺動（週期 λ，振幅 ℓ）求時間與位置之關係	投影與座標
問題 5	求P點過任一定點A之時間。	解 $\cos\theta=\alpha$
問題 6	求T時間內P點過A點之次數。	不等式與高斯
問題 7	將二彈簧共同固定一端點，當 $t=0$ 時一彈簧之另一端點在最高點，另一彈簧之另一端點在最低點，且令週期、振幅、平衡點均相同時，求①二動點同高之時間，②同高之位置。	解 $\cos\theta=\alpha$
問題 8	問題 7 中，使一彈簧之振幅變成另一彈簧之K倍，其他條件不變，求其同高之時間與位置。	解 $\cos\theta=\alpha$

問題 9	由上題，二彈簧振幅、週期皆不同時，求二動點之關係。	解 $\mathrm{Cos}\,\theta+\mathrm{K}\,\mathrm{Cos}\,\mathrm{M}\theta=0$

利用以上的9個問題與三角方程式$\mathrm{Cos}\,\theta+\mathrm{K}\,\mathrm{Cos}\,\mathrm{M}\theta=0$之根之性質，我們可以發現另一有趣的物理現象，在正文中，我們會詳做介紹。

一、動　　機：

打從小學開始便學到有關繞圓周賽跑的問題，到了國中時代又學到了時鐘運轉，分針追時針的問題，高二上學期學三角的時候也提到了等速圓周運動與簡諧運動，而這幾種運動在物理學上來講都是屬於一種周而復始，來回往復式的運動，因此當一個動點作這種往復式運動時，我們往往感到興趣的是該動點通過某一定點的時間與在給定的時間內通過該定點的次數等方面的問題。再說如果有兩動點在相同圓周上以不同方向，同時作這種運動時，我們往往會考慮到此二動點是否相遇與相遇的時間、地點、及給定時間內兩動點相遇的次數等等問題。以下我們以三角函數的觀點來對等速圓周運動及簡諧運動作一系統的討論。

二、等速圓周運動：

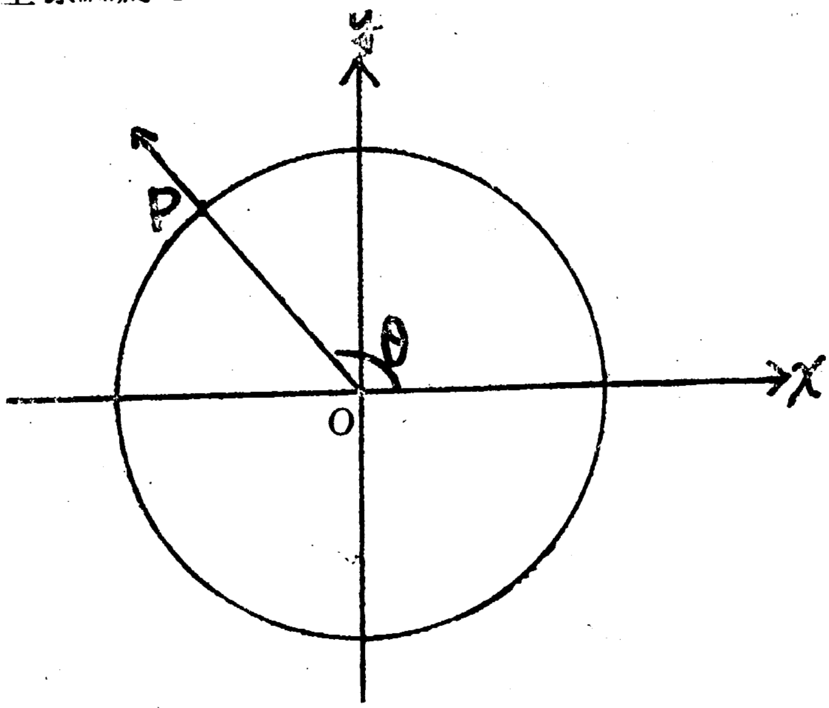
定義：有一動點按一固定的方向（順時針或逆時針）繞圓周而運動，若該動點相同時間間隔內其前進之距離相等，稱該動點作一等速圓周運動。

〔問題1〕

有一動點P，在單位圓上作等速圓周運動，其時間與位置關係為何？

解：若取一直角坐標系（O；X，Y），使原點O在單位圓之圓心，且從$\overrightarrow{OX}$到$\overrightarrow{OP}$之轉角為θ，則P對（O；X，Y

）之坐標應爲（$\cos\theta$，$\sin\theta$）（如圖㈠所示）



P＝（$\cos\theta$，$\sin\theta$）
（圖一）

今若使P在 t＝0時從（1，0）之位置依逆時針方向繞圓作等速圓周運動，每 λ 秒繞一圈（即週期 λ 秒），則 t 秒後P之位置應爲（$\cos\frac{2\pi t}{\lambda}$，$\sin\frac{2\pi t}{\lambda}$）此性質可證明如後：

證明：因P點每 λ 秒繞一圈，故 t 秒內共繞 $\frac{t}{\lambda}$ 圈，而從 $\overrightarrow{OX}$ 到

$$\overrightarrow{OP} \text{之轉角} \theta = (2\pi)\left(\frac{t}{\lambda}\right) = \frac{2\pi t}{\lambda}$$

$$\therefore P = (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$= \left(\cos\frac{2\pi t}{\lambda}, \sin\frac{2\pi t}{\lambda}\right)$$

〔問題2〕：在問題1之狀況下，問(1)出發後何時，P點可過A（0，1）；B（－1，0）；C（0，－1），又何時回到D（1，0）。
(2)出發後T秒內（不含正當T秒時）P點過A，B，C，D四點之次數爲何？

解：(1)當P點過A時P（0，1），即Cos $\frac{2\pi t}{\lambda}=0$ ，Sin $\frac{2\pi t}{\lambda}=1$

$$\therefore \frac{2\pi t}{\lambda}=2(n-1)\pi+\frac{\pi}{2}, \quad n\in Z$$

$$\therefore t=\left[(n-1)+\frac{1}{4}\right]\lambda, \quad n\in Z$$

但 $t>0$ $\therefore (n-1)+\frac{1}{4}>0$ $\therefore n\in N$

故第一次過A點時 $t=\frac{1}{4}\lambda$

第二次過A點時 $t=\frac{5}{4}\lambda$

………………… …………

第N次過A點時 $t=(N-\frac{3}{4})\lambda$

故P過A點時，$t=(N-\frac{3}{4})\lambda$，其中N表第幾次過該點

即第一次過該點時 $N=1$

第二次過該點時 $N=2$

………………… ………

第N次過該點時 $N=N$

同理可得：

點P過B點之時間 $t=(N-\frac{1}{2})\lambda$

點P過C點之時間 $t=(N-\frac{1}{4})\lambda$

點P回到D點之時間 $t=N\lambda$

(2)出發T秒內過A，B，C，D四點之次數：

過A點時　$t=\{(n-1)+\frac{1}{4}\}\lambda \quad n\in Z$

但　$0\leq t<T$

$$0\leq(n-\frac{3}{4})\lambda<T$$

$$0\leq n-\frac{3}{4}<\frac{T}{\lambda}$$

$$\frac{3}{4}\leq n<\frac{T}{\lambda}+\frac{3}{4}$$

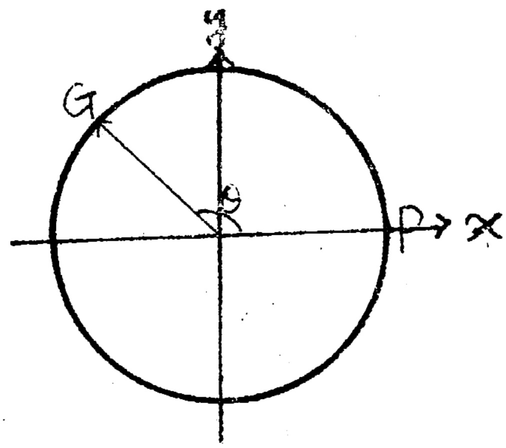
故過A點之次數$[\frac{T}{\lambda}+\frac{3}{4}]$其中"〔 〕"表"高斯符號"

同理可得：

T秒內過B點之次數爲　$[\frac{T}{\lambda}+\frac{1}{2}]$

T秒內過C點之次數爲　$[\frac{T}{\lambda}+\frac{1}{4}]$

T秒回到D點之次數爲　$[\frac{T}{\lambda}]$



（圖二）

（結論Ⅰ）

①若G點爲單位圓上之一定點，$\overrightarrow{OG}$與$\overrightarrow{OX}$之夾角爲θ（其中$0<\theta\leq 2\pi$），則P過G點的時間$t=\{(N-1)+\frac{\theta}{2\pi}\}\lambda$

②在T時間內通過G點之次數爲

$N=[\frac{T}{\lambda}+1-\frac{\theta}{2\pi}]$（其中"[ ]"表"高斯符號"）

證明：①$\cos\frac{2\pi t}{\lambda}=\cos\theta$，$\sin\frac{2\pi t}{\lambda}=\sin\theta$

$$\Rightarrow\frac{2\pi t}{\lambda}=2(N-1)\pi+\theta$$

$$t=\frac{\lambda}{2\pi}\{2(N-1)\pi+\theta\}=\{(N-1)+\frac{\theta}{2\pi}\}\lambda$$

②又　$0\leq t<T$

$$0\leq\{(n-1)+\frac{\theta}{2\pi}\}\lambda<T$$

$$0\leq n-1+\frac{\theta}{2\pi}<\frac{T}{\lambda}$$

$$1-\frac{\theta}{2\pi}\leq n<\frac{T}{\lambda}+(1-\frac{\theta}{2\pi})$$

$$\therefore\text{次數}N=[\frac{T}{\lambda}+(1-\frac{\theta}{2\pi})]$$

〔問題3〕：若Q爲圓上另一動點，$t=0$時從$(-1,0)$位置，順時針方向運動，每λ'秒繞一圈。

問(1) t 秒後Q之位置。

(2)出發後何時P、Q兩點相遇。

(3)出發後T秒內，P、Q二點共相遇幾次。

(4) P、Q 兩點相遇的位置爲何？

解：(1) t 秒後，$Q=\left(\cos\left(\pi-\frac{2\pi t}{\lambda'}\right), \sin\left(\pi-\frac{2\pi t}{\lambda'}\right)\right)$

(2)兩點相遇時　$P=Q$

即　$\cos\frac{2\pi t}{\lambda}=\cos\left(\pi-\frac{2\pi t}{\lambda'}\right)$

$\sin\frac{2\pi t}{\lambda}=\sin\left(\pi-\frac{2\pi t}{\lambda'}\right)$

故　$\frac{2\pi t}{\lambda}$ 與 $\pi-\frac{2\pi t}{\lambda'}$ 必爲同界角

$\therefore \frac{2\pi t}{\lambda}=\left(\pi-\frac{2\pi t}{\lambda}\right)+2(n-1)\pi \qquad n\in Z$

$\therefore \frac{2\pi t}{\lambda}+\frac{2\pi t}{\lambda'}=(2n-1)\pi \qquad n\in Z$

$\frac{2(\lambda+\lambda')}{\lambda\lambda'}t=2n-1 \qquad n\in N$

$(\because t, \lambda, \lambda'>0$　故 $2n-1>0$　$\therefore n\in N)$

第一次相遇時　$n=1$　$t=\frac{\lambda\lambda'}{2(\lambda+\lambda')}$

第二次相遇時　$n=2$　$t=\frac{3\lambda\lambda'}{2(\lambda+\lambda')}$

……………　………　……………………

第N次相遇時　$n=N$　$t=\frac{(2N-1)\lambda\lambda'}{2(\lambda+\lambda')}$

綜合以上性質知，每 $\frac{\lambda\lambda'}{\lambda+\lambda'}$ 秒，P，Q 兩點卽可相遇一次，且相遇的時間與位置均隨 λ 與 λ' 而變，下表(一)爲 λ 與 λ' 從 1 到 10 間之自然數對，P，Q 兩點相遇之間隔時間：

表　㈠

λ \ λ'	1	2	3	4	5
1	0.5	0.6667	0.75	0.8	0.8333
2	0.6667	1	1.2	1.3333	1.4285
3	0.75	1.2	1.5	1.7143	1.875
4	0.8	1.3333	1.7143	2	2.2222
5	0.8333	1.4285	1.875	2.2222	2.5
6	0.8571	1.5	2	2.4	2.7273
7	0.875	1.5556	2.1	2.5455	2.9167
8	0.8889	1.6	2.1818	2.6667	3.0769
9	0.9	1.6364	2.25	2.7692	3.2143
10	0.9090	1.6667	2.3077	2.8571	3.3333

λ \ λ'	6	7	8	9	10
1	0.8571	0.875	0.8889	0.9	0.9091
2	1.5	1.5556	1.6	1.6364	1.6667
3	2	2.1	2.1818	2.25	2.3077
4	2.4	2.5455	2.6667	2.7692	2.8571
5	2.7273	2.9167	3.0769	3.2143	3.3333
6	3	3.2308	3.4286	3.6	3.75
7	3.2308	3.5	3.7333	3.9375	4.1176
8	3.4286	3.7333	4	4.2353	4.4444
9	3.6	3.9375	4.2353	4.5	4.7368
10	3.75	4.1176	4.4444	4.7368	5

（取近似値）

由上表可推斷出，在$\lambda+\lambda'=k$（k為一定值）之所有情形中（例如上表中$\lambda+\lambda'=10$時，考慮（λ，λ'）=（1，9），（2，8），（3，7），（4，6），（5，5），（6，4），（7，3），（8，2），（9，1）等情況）當$\lambda=\lambda'$時每相鄰二相遇間隔時間爲最長。就常理而言，相遇之間隔時間愈長，則相遇的次數越少。此性質，可以以下表來顯示。

表二中，當λ與λ'爲1到10之自然數時，一分鐘內P，Q兩點相遇之次數：

表　㈡

λ \ λ'	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	120	90	80	75	72	70	69	68	67	66
2	90	60	50	45	42	40	39	38	37	36
3	80	50	40	35	32	30	29	28	27	26
4	75	45	35	30	27	25	24	23	22	21
5	72	42	32	27	24	22	21	20	19	18
6	70	40	30	25	22	20	19	18	17	16
7	69	39	29	24	21	19	17	16	15	15
8	68	38	28	23	20	18	16	15	14	13
9	67	37	27	22	19	17	15	14	13	12
10	66	36	26	21	18	16	14	13	12	12

由上表知在固定時間內，當$\lambda+\lambda'$爲一定值之所有狀況下當$\lambda=\lambda'$時，可使相遇次數產生最小值，且當λ與λ'之差距越小，相遇次數越少，此推斷可在本問題之第(3)部分中再加以確定。

(3)T秒內，P，Q兩點相遇次數由(2)知，P，Q兩點相遇時

$$t=\frac{(2n-1)\lambda\lambda'}{2(\lambda+\lambda')} \qquad n\in N$$

但 $0\leq t<T$

$$\therefore\quad 0\leq\frac{(2n-1)\lambda\lambda'}{2(\lambda+\lambda')}<T \qquad n\in N$$

$$0\leq 2n-1<\frac{2T(\lambda+\lambda')}{\lambda\lambda'} \qquad n\in N$$

$$\therefore \frac{1}{2}\leq n<\frac{T(\lambda+\lambda')}{\lambda\lambda'}+\frac{1}{2} \qquad n\in N$$

$\therefore$共有$\left[\left(\frac{\lambda+\lambda'}{\lambda\lambda'}\right)T+\frac{1}{2}\right]$

由此可見，T秒內兩動點相遇之次數爲

$$f_{\lambda\lambda'}(T)=\left[\left(\frac{\lambda+\lambda'}{\lambda\lambda'}\right)T+\frac{1}{2}\right]$$

例：①當 $\lambda=3$，$\lambda=5$ 一分鐘內二點相遇之次數＝

$$\left[\left(\frac{3+5}{3\times5}\right)<60+\frac{1}{2}\right]=32$$

②當 $\lambda=\sqrt{5}$，$\lambda'=3$ 時，一分鐘內二點相遇的次數＝<u>47次</u>。

③當 $\lambda=3$，$\lambda'=3$ 時，一分鐘內二點相遇的次數＝<u>40次</u>。

④當 $\lambda=2.99$，$\lambda'=3.01$ 時，一分鐘內兩點相遇的次數＝<u>40次</u>。

（結論 Ⅱ）

①P，Q二動點相遇時，$t=\frac{(2n-1)\lambda\lambda'}{2(\lambda+\lambda')}$ $\quad n\in N$

②P，Q二動點如以上所述作等速圓周運動時每 $\frac{\lambda\lambda'}{\lambda+\lambda'}$ 秒即可相遇一次。

③T秒內P，Q二點相遇之次數爲〔$(\frac{\lambda+\lambda'}{\lambda\lambda'})T+\frac{1}{2}$〕（“〔 〕”表“高斯符號”）

④當$\lambda+\lambda'=k$爲一定值時，T時間內相遇次數之最小值爲

〔$\frac{4T}{k}+\frac{1}{2}$〕（證明於後）

⑤在結論Ⅱ－④的條件下若使$\lambda=\lambda'=\frac{k}{2}$時，可使相鄰二次之相遇所需時間最長，而使相同時間內相遇次數產生最小，而此時相遇之位置爲（0，$(-1)^{N-1}$），其中N表開始運動後第幾度相遇之次數，其相遇位置恰與k值無關。

⑥在談及相同時間內，二點相遇之次數時，在$\lambda+\lambda'=k$爲一定值之所有情況下，λ與λ'之值越接近，相遇次數越少，而以$\lambda=\lambda'=\frac{k}{2}$時之値爲最小，但在$\lambda$與$\lambda'$相當靠近之情況下，往往也可產生$\lambda=\lambda'$相同之結果（如本題中例3，4所示）

結論Ⅱ－④之證明如下：

由②得T秒內P，Q二點相遇之次數爲

〔$(\frac{\lambda+\lambda'}{\lambda\lambda'})T+\frac{1}{2}$〕

但　$\lambda+\lambda'=k$

由$\lambda\lambda'>0$　得$\lambda+\lambda'\geq 2\sqrt{\lambda\lambda'}$…①（幾算公式）

$$\therefore\quad \lambda\lambda'\leq\frac{(\lambda+\lambda')^2}{4}$$

$$\therefore\quad \lambda\lambda'\leq\frac{k^2}{4}$$

$$\frac{1}{\lambda\lambda'} \geq \frac{4}{k^2}$$

$$\frac{\lambda+\lambda'}{\lambda\lambda'} \geq \frac{4k}{k^2}$$

$$\left(\frac{\lambda+\lambda'}{\lambda\lambda'}\right) T \geq \frac{4T}{k}$$

$$\left(\frac{\lambda+\lambda'}{\lambda\lambda'}\right) T+\frac{1}{2} \geq \left[\frac{4T}{k}+\frac{1}{2}\right]$$

$$\left[\left(\frac{\lambda+\lambda'}{\lambda\lambda'}\right) T+\frac{1}{2}\right] \geq \left[\frac{4T}{k}+\frac{1}{2}\right]$$

故相遇次數之最小值爲 $\left[\frac{4T}{k}+\frac{1}{2}\right]$，且最小值在當"="成立時，由不等式①知"="成立時 $\lambda=\lambda'$，證畢。

(4)由結論 Ⅱ－①知，P，Q二點相遇之時間 $t=\frac{(2N-1)\lambda\lambda'}{2(\lambda+\lambda')}$

令 $P_N(\lambda,\lambda')$ 表所給予之 λ 與 λ' 情況下，P，Q二點第N次相遇之位置，此時

$$P_N(\lambda,\lambda')=\left(\operatorname{Cos}\frac{2\pi t}{\lambda},\ \operatorname{Sin}\frac{2\pi t}{\lambda}\right)$$

$$=\left(\operatorname{Cos}\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{(2N-1)\lambda\lambda'}{2(\lambda+\lambda')},\quad \operatorname{Sin}\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{(2N-1)\lambda\lambda'}{2(\lambda+\lambda')}\right)$$

$$=\left(\operatorname{Cos}\frac{(2N-1)\lambda'}{\lambda+\lambda'}\pi,\ \operatorname{Sin}\frac{(2N-1)\lambda'}{\lambda+\lambda'}\pi\right)$$

現在我們以 λ，λ' 爲1到10之自然數情況下，列表以示相

遇的位置：

表三　第一次相遇之位置

λ \ λ′	1	2	3	4	5
1	(0,1)	(−0.5, 0.866)	(−0.707, 0.707)	(−0.809, 0.588)	(−0.866, 0.5)
2	(0.5, 0.866)	(0,1)	(−0.309, 0.951)	(−0.5, 0.866)	(−0.623, 0.782)
3	(0.707, (0.707)	(0.309, 0.951)	(0,1)	(−0.223, 0.975)	(−0.383, 0.924)
4	(0.809, 0.588)	(0.5, 0.866)	(0.223, 0.975)	(0,1)	(−0.174, 0.985)
5	(0.866, 0.500)	(0.623, 0.782)	(0.383, 0.924)	(0.174, 0.985)	(0,1)
6	(0.901, 0.438)	(0.707, 0.707)	(0.5, 0.866)	(0.309, 0.951)	(0.142, 0.990)
7	(0.924, 0.383)	(0.766, 0.643)	(0.588, 0.809)	(0.415, 0.910)	(0.259, 0.966)
8	(0.940, 0.342)	(0.809, 0.588)	(0.655, 0.758)	(0.5, 0.866)	(0.355, 0.935)
9	(0.951, 0.309)	(0.841, 0.541)	(0.707, 0.707)	(0.568, 0.823)	(0.434, 0.901)
10	(0.959, 0.281)	(0.866, 0.5)	(0.749, 0.663)	(0.623, 0.782)	(0.5, 0.866)

λ \ λ′	6	7	8	9	10
1	(−0.901, 0.438)	(−0.924, 0.383)	(−0.940, 0.342)	(−0.951, 0.309)	(−0.959, 0.281)
2	(−0.707, 0.707)	(−0.766, 0.643)	(−0.809, 0.588)	(−0.841, 0.541)	(−0.866, 0.5)
3	(−0.5, (0.866)	(−0.588, 0.809)	(−0.655, 0.758)	(−0.707, 0.707)	(−0.749, 0.663)
4	(−0.309, 0.951)	(−0.415, 0.910)	(−0.5, 0.866)	(−0.568, 0.823)	(−0.623, 0.782)
5	(−0.142, 0.990)	(−0.259, 0.966)	(−0.355, 0.935)	(−0.434, 0.951)	(−0.5, 0.866)
6	(0,1)	(−0.121, 0.993)	(−0.223, 0.975)	(−0.309, 0.951)	(−0.383, 0.924)
7	(0.121, 0.993)	(0,1)	(−0.105, 0.995)	(−0.195, 0.981)	(−0.274, 0.975)
8	(0.223, 0.975)	(0.105, 0.995)	(0,1)	(−0.092, 0.996)	(−0.174, (0.985)
9	(0.309, 0.951)	(0.195, 0.981)	(0.092, 0.996)	(0,1)	(−0.083, 0.997)
10	(0.383, (0.924)	(0.274, 0.975)	(0.174, 0.985)	(0.083, 0.997)	(0,1)

（取至小數第三位）

表四　第二次相遇之位置

λ \ λ'	1	2	3	4	5
1	(0,−1)	(1,0)	(0.707, 0.707)	(0.309, 0.951)	(0,1)
2	(−1,0)	(0,−1)	(0.809, −0.588)	(1,0)	(0.901, 0.434)
3	(−0.707, 0.707)	(−0.809, −0.588)	(0,−1)	(0.624, −0.782)	(0.924, −0.383)
4	(−0.309, 0.951)	(−1,0)	(−0.624, −0.782)	(0,−1)	(−0.5, 0.866)
5	(0,1)	(−0.901, 0.435	(−0.924, −0.383)	(0.5) 0.866)	(0,−1)
6	(0.223, 0.975)	(0.707, 0.707)	(−1,0)	(−0.809, −0.588)	(−0.416, −0.910)
7	(0.383, 0.924)	(−0.5, 0.866)	(−0.951, 0.309)	(−0.960, −0.282)	(−0.707, −0.707)
8	(0.5, 0.866)	(−0.309, 0.951)	(−0.841, 0.541)	(−1,0)	(−0.886, −0.465)
9	(0.588, 0.809)	(−0.142, 0.99)	(−0.707, 0.707)	(−0.971, 0.239)	(−0.975, −0.223)
10	(0.655, 0.758)	(0,1)	(−0.568, 0.823)	(−0.901, 0.434)	(−1,0)

λ \ λ'	6	7	8	9	10
1	(−0.223, 0.975)	(−0.3827, 0.924)	(−0.5, 0.806)	(−0.588, 0.809)	(−0.655, 0.758)
2	(−0.707, 00.707)	(0.5, 0.866)	(0.309, 0.951)	(0.423, 0.990)	(0,1)
3	(1,0)	(0.951, 0.309)	(0.841, ·0.541)	(0.707, 0.707)	(−0.568, 0.823)
4	(0.809, −0.588)	(0.959, −0.282)	(1,0)	(0.971, 0.240)	(−0.901, 0.434)
5	(0.415, −0.910)	(0.707, −0.707)	(0.886, −0.465)	(0.915, −0.223)	(1,0)
6	(0,−1)	(0.354, −0.935)	(0.6235, −0.782)	(0.809, −0.588)	(0.924, −0.383)
7	(−0.334, −0.935)	(0,−1)	(0.309, −0.951)	(0.554, −0.832)	(0.739, −0.674)
8	(−0.624, −0.782)	(−0.309, −0.951)	(0.−1)	(−0.274, −0.962)	(0.5, −0.866)
9	(−0.809, −0.588)	(−0.554, −0.832)	(−0.273, −0.962)	(0,−1)	(0.246, −0.970)
10	(−0.924, −0.383)	(−0.739, −0.673)	(−0.5; −0.866)	(−0.246, −0.970)	(0,−1)

（取至小數第三位）

表五　第三次相遇之位置

λ \ λ'	1	2	3	4	5
1	(0，1)	(−0.5，−0.866)	(0.707，−0.707)	(1，0)	(0.866，0.5)
2	(0.5，−0.866)	(0，1)	(−1，0)	(−0.5，−0.866)	(0.223，−0.974)
3	(−0.707，−0.707)	(1，0)	(0，1)	(−0.901，0.434)	(−0.924，−0.383)
4	(−1，0)	(0.5，−0.866)	(0.901，0.434)	(0，1)	(−0.766，0.643)
5	(0.866，0.5)	(−0.223，−0.974)	(0.924，−0.383)	(0.766，0.643)	(0，1)
6	(−0.623，0.783)	(−0.707，−0.707)	(0.5，−0.866)	(1，0)	(0.655，0.755)
7	(−0.383，0.924)	(−0.940，−0.342)	(0，−1)	(0.841，−0.541)	(0.966，−0.574)
8	(−0.174，0.985)	(−1，0)	(−0.415，−0.910)	(0.5，−0.866)	(0.971，−0.242)
9	(0，1)	(−0.959，0.282)	(−0.707，−0.707)	(0.121，−0.993)	(0.782，−0.623)
10	(0.142，0.990)	(−0.866，0.5)	(−0.885，−0.462)	(−0.223，−0.975)	(0.5，−0.866)

λ \ λ'	6	7	8	9	10
1	(0.023，0.783)	(0.383，0.924)	(0,174，0.985)	(0，1)	(−0.142，0.990)
2	(0.707，−0.707)	(0.940，−0.342)	(1，0)	(0.959，0.282)	(0.866，0.5)
3	(−0.5，−0.866)	(0，−1)	(0.415，−0.910)	(0.707，−0.707)	(0.885，−0.462)
4	(−1，0)	(−0.841，−0.541)	(−0.5，−0.866)	(−0.121，−0.993)	(0.233，−0.975)
5	(−0.655，0.755)	(−0.966，−0.574)	(0.971，−0.242)	(−0.782，−0.623)	(−0.5，−0.966)
6	(0，1)	(−0.568，0.823)	(−0.901，−0.434)	(−1，0)	(−0.924，−0.383)
7	(0.558，0.823)	(0，1)	(−0.5，0.866)	(−0.831，0.548)	(−0.983，0.184)
8	(0.901，0.434)	(0.5，0.866)	(0，1)	(−0.446，0.895)	(−0.766，0.643)
9	(1，0)	(0.831，0.548)	(0.446，0.890)	(0，1)	(−0.402，0.916)
10	(0.924，−0.383)	(0.983，0.184)	(0.766，0.643)	(0.402，0.916)	(0，1)

（取至小數三位）

（表六） $\lambda=1$，$\lambda'=2$ 時 P，Q 兩點相遇的位置：

	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	第六次
位置	$(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$	$(1,0)$	$(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$	$(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$	$(1,0)$	$(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$

（表七） $\lambda=2$，$\lambda'=1$ 時 P，Q 兩點相遇的位置：

	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	第六次
位置	$(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$	$(-1,0)$	$(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$	$(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$	$(-1,0)$	$(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$

（表八） $\lambda=1$ $\lambda'=3$ 時 P，Q 兩點相遇的位置：

	第一次	第二次	第三次	第四次
位置	$(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$

	第五次	第六次	第七次	第八次
位置	$(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$

（表九） $\lambda=3$ $\lambda'=1$ 時 P，Q 兩點相遇之位置：

	第一次	第二次	第三次	第四次
位置	$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$

	第　五　次	第　六　次	第　七　次	第　八　次
位置	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

（表十）　$\lambda=2$，$\lambda'=2$ 時，P，Q二點相遇之位置

	第　一　次	第　二　次	第　三　次	第　四　次
位置	（0，1）	（0，−1）	（0，1）	（0，−1）

（表十一）$\lambda=3$　$\lambda'=3$ 時　P，Q二點相遇的位置

	第　一　次	第　二　次	第　三　次	第　四　次
位置	（0，1）	（0，−1）	（0，1）	（0，−1）

（結論Ⅲ）

①當 $\lambda=\lambda'$ 時，二點相遇的位置爲（0，$(-1)^{N-1}$）其中N表第幾次相遇，與週期大小無關。

②對於任一組 λ，$\lambda'\in N$ 而言，點集合 $S=\{P_N(\lambda,\lambda') \mid N=1,2,3,\cdots\cdots\}$ 爲一有限集合，即P Q僅可相遇於有限個點。

〔證明〕：當 λ，$\lambda'\in N$ 時

$$P_{N+(\lambda+\lambda')}(\lambda,\lambda')=\left(\mathrm{Cos}\frac{\{2(N+\lambda+\lambda')-1\}\lambda'\pi}{\lambda+\lambda'},\right.$$

$$\left.\mathrm{Sin}\frac{\{2(N+\lambda+\lambda')-1\}\lambda'\pi}{\lambda+\lambda'}\right)$$

$$=\left(\mathrm{Cos}\frac{(2N-1)\lambda'\pi}{\lambda+\lambda'}+\frac{2(\lambda+\lambda')\lambda'\pi}{\lambda+\lambda'},\right.$$

$$\left.\mathrm{Sin}\frac{(2N-1)\lambda'\pi}{\lambda+\lambda'}+\frac{2(\lambda+\lambda')\lambda'\pi}{\lambda+\lambda'}\right)$$

$$=\left(\mathrm{Cos}\left\{2\lambda'\pi+\frac{(2N-1)\lambda'\pi}{\lambda+\lambda'}\right\},\right.$$

$$\left.\mathrm{Sin}\left\{2\lambda'\pi+\frac{(2N-1)\lambda'\pi}{\lambda+\lambda'}\right\}\right)$$

$$=P_N(\lambda,\lambda')$$ 證畢

三、簡諧運動：

定義：一動點P在圓 $x^2+y^2=r^2$ 上作等速圓周運動時，它在y軸（或x軸）之投影成一上下起伏（或左右擺動）之運動，此運動稱爲簡諧運動。由虎克定律知彈簧之振動爲一簡諧運動，爲方便起見我們以下利用彈簧之振動來說明簡諧運動之性質。

〔問題4〕：

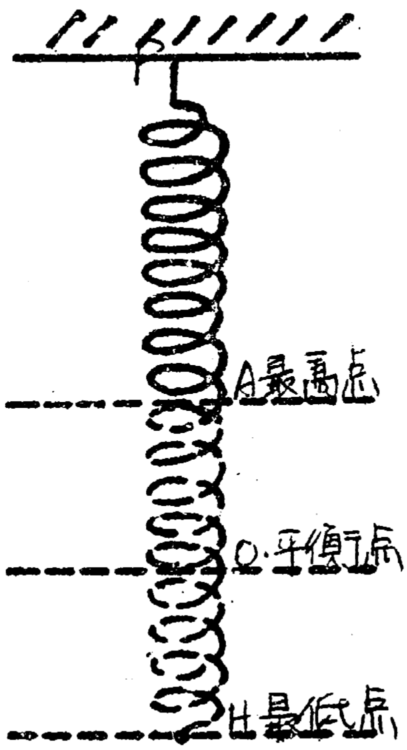
將一彈簧L，使其一端點固定，而使彈簧本身鉛垂懸掛。P爲其另一端點，當彈簧上下擺動時，P之振動幅度爲 ℓ ，週期爲 λ ，當 $t=0$ 時，P在最高點A，問t秒後P點之位置。

解：取一直角坐標系（O；X，Y）使得原點O表P之平衡點，x軸表過平衡點之水平線，y軸表與彈簧本身重合之鉛垂直，令Q表圓 $x^2+y^2=\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$ 上之一動點，當 $t=0$ 時，$Q=\left(0,\frac{\ell}{2}\right)$ 使Q點依逆時針方向作等速圓周運動，週期爲 λ ，由等速圓周運動之性質知t秒後Q之位置爲 $\left(\frac{\ell}{2}\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi t}{\lambda}\right),\frac{\ell}{2}\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi t}{\lambda}\right)\right)$ 如此一來，因P點卽爲Q點在y軸

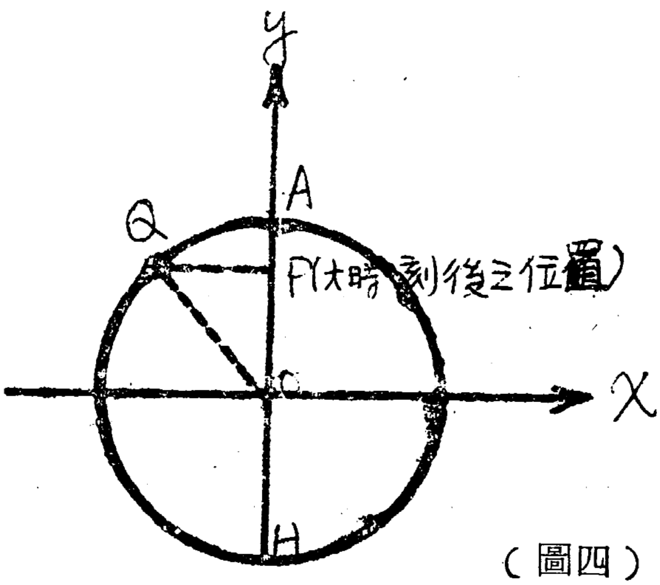
上之投影，故$P=(0,\frac{\ell}{2}\mathrm{Sin}(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi t}{\lambda})$。

$\therefore$ t 秒後P點之位置爲$y=\frac{\ell}{2}\mathrm{Sin}(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi t}{\lambda})$

P 之簡諧運動與Q之等速圓周運動之關係位置圖：

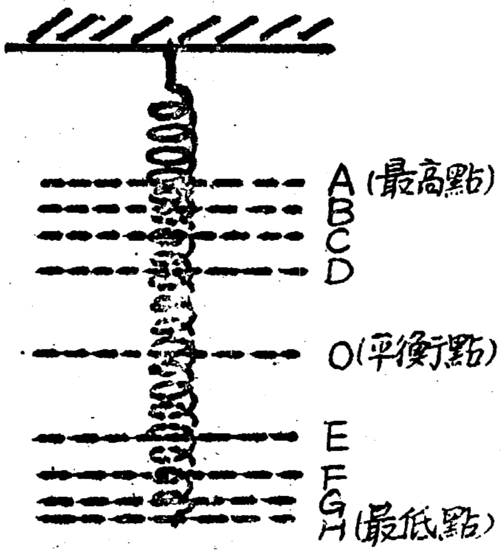


（圖三）



（圖四）

〔問題5〕：（承問題4）



（圖五）

如（圖五）在$\overline{OA}$中間取B，C，D三點，$\overline{OH}$中間取E，F，G三點，使得$\overline{OB}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{OA}$，$\overline{OC}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{OA}$，$\overline{OD}=\frac{1}{2}\overline{OA}$，$\overline{OE}=\frac{1}{2}\overline{OH}$，$\overline{OF}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{OH}$，$\overline{OG}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{OH}$，則(1)出發後P點何時通過A，B，C，D，O，E，F，G，H等點？(2)出發T秒內過A，B，C，D，O，E，F，G，H等點之次數分別為何？

解：(1)①過A點時

$$y=\frac{\ell}{2}$$

$$\therefore \text{Sin}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi t}{\lambda}\right)=1$$

$$\therefore \text{Cos}\,\frac{2\pi t}{\lambda}=1$$

$$\frac{2\pi t}{\lambda}=2\lambda\pi \qquad n\in Z$$

但因$\frac{2\pi t}{\lambda}>0$　故$2n>0$　$n\in N$

$\therefore t = n\lambda \qquad n \in N$

第一次回到最高點時　$t = \lambda$

第二次回到最高點時　$t = 2\lambda$

……………………　…………

第N次回到最高點時　$t = N\lambda$

②過平衡點O時　$y = 0$

$$\therefore \operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi t}{\lambda}\right)=0$$

$$\therefore \operatorname{Cos}\frac{2\pi t}{\lambda}=0$$

$$\therefore \frac{2\pi t}{\lambda}=(n-1)\pi+\frac{\pi}{2} \qquad n\in Z$$

$\therefore t = \dfrac{\lambda}{2}\left(n-\dfrac{1}{2}\right)$,由 $t>0$ ，$\lambda>0$　得

$$n-\frac{1}{2}>0 \qquad \therefore n\in N$$

第一次過平衡點時　$t=\dfrac{\lambda}{4}$

第二次過平衡點時　$t=\dfrac{3\lambda}{4}$

第三次過平衡點時　$t=\dfrac{5\lambda}{4}$

……………………　………………

第N次過平衡點時　$t=\dfrac{(2N-1)\lambda}{4}$

③過最低點H時　$y=-\dfrac{\ell}{2}$

$$\therefore \operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi t}{\lambda}\right)=-1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Cos}\left(\frac{2\pi t}{\lambda}\right)=-1$$

故$\dfrac{2\pi t}{\lambda}=(2n-1)\pi \qquad n\in N$

故第N次通過最低點時 $t=\dfrac{(2N-1)\lambda}{2}$

④過B點時 $\quad y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\ell$

得$\dfrac{\ell}{2}\mathrm{Sin}\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2\pi t}{\lambda}\right)=\dfrac{\sqrt{3}\,\ell}{4}$

$\mathrm{Cos}\left(\dfrac{2\pi t}{\lambda}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{2\pi t}{\lambda}=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{6} \qquad n\in Z$

$\therefore t=\dfrac{\lambda}{2}\left(2n\pm\dfrac{1}{6}\right) \qquad n\in Z$

當 $t=\dfrac{\lambda}{2}\left(2n+\dfrac{1}{6}\right)$時

$t=\dfrac{\lambda}{12}, \dfrac{13\lambda}{12}, \dfrac{25\lambda}{12}, \dfrac{37\lambda}{12}\cdots\cdots\cdots$

當 $t=\dfrac{\lambda}{2}\left(2n-\dfrac{1}{6}\right)$時

$t=\dfrac{11\lambda}{12}, \dfrac{23\lambda}{12}, \dfrac{35\lambda}{12}, \dfrac{47\lambda}{12}\cdots\cdots\cdots$

故第一次過B點時 $\quad t=\dfrac{\lambda}{12}$秒

第二次過B點時 $\quad t=\dfrac{11}{12}\lambda$秒

第三次過B點時 $\quad t=\dfrac{13}{12}\lambda$秒

第四次過B點時 $\quad t=\dfrac{23}{12}\lambda$秒

第五次過B點時　$t = \frac{25}{12}\lambda$ 秒

……………………　……………………………………

第N次過B點時　$t = \frac{\lambda}{12}\{12[\frac{N}{2}]+(-1)^{N+1}\}$

其中“〔 〕”表“高斯符號”

⑤過C點時　$y = \frac{\sqrt{2}}{4}\ell$

得　$\frac{\ell}{2}\mathrm{Sin}(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi t}{\lambda}) = \frac{\sqrt{2}}{4}\ell$

$$\mathrm{Cos}\,\frac{2\pi t}{\lambda} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{2\pi t}{\lambda} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} \qquad n \in Z$$

$$t = \frac{\lambda}{2}(2n \pm \frac{1}{4})$$

當 $t = \frac{\lambda}{2}(2n + \frac{1}{4})$ 時

$$t = \frac{\lambda}{8}, \frac{9}{8}\lambda, \frac{17}{8}\lambda, \frac{25}{8}\lambda, \cdots\cdots$$

當 $t = \frac{\lambda}{2}(2n - \frac{1}{4})$ 時

$$t = \frac{7}{8}\lambda, \frac{15}{8}\lambda, \frac{23}{8}\lambda, \cdots\cdots$$

第一次過C點時　$t = \frac{\lambda}{8}$ 秒

第二次過C點時　$t = \frac{7}{8}\lambda$ 秒

第三次過C點時　$t = \frac{9}{8}\lambda$ 秒

第四次過C點時　$t=\frac{15}{8}\lambda$ 秒

第五次過C點時　$t=\frac{17}{18}\lambda$ 秒

…………………　………………………………

第N次過C點時　$t=\frac{\lambda}{8}\{8[\frac{N}{2}]+(-1)^{N+1}\}$

其中"〔 〕"表"高斯符號"

⑹過D點時　$y=\frac{\ell}{4}$

得　$\frac{\ell}{2}\operatorname{Sin}(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi t}{\lambda})=\frac{\ell}{4}$

$\operatorname{Cos}(\frac{2\pi t}{\lambda})=\frac{1}{2}$

$\frac{2\pi t}{\lambda}=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$

$t=\frac{\lambda}{2}(2n\pm\frac{1}{3})\qquad n\in Z$

當 $t=\frac{\lambda}{2}(2n+\frac{1}{3})$ 時

$t=\frac{\lambda}{3},\frac{7\lambda}{6},\frac{13\lambda}{6},\frac{19\lambda}{6},\cdots\cdots$

當 $t=\frac{\lambda}{2}(2n-\frac{1}{3})$ 時

$t=\frac{5\lambda}{6},\frac{11\lambda}{6},\frac{17\lambda}{6},\frac{23\lambda}{6},\cdots\cdots$

故第一次過D點時　$t=\frac{\lambda}{6}$

第二次過D點時　$t=\frac{5\lambda}{6}$

第三次過D點時　$t=\frac{7\lambda}{6}$

第四次過D點時　$t=\frac{11\lambda}{6}$

第五次過D點時　$t=\frac{13\lambda}{16}$

………………　…………………………

第N次過D點時　$t=\frac{\lambda}{6}\{6[\frac{N}{2}]+(-1)^{N+1}\}$

其中“〔 〕”表“高斯符號”。

⑦過E點時　$y=-\frac{\ell}{4}$

得　$\frac{\ell}{2}\mathrm{Sin}(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi t}{\lambda})=-\frac{\ell}{4}$

$\mathrm{Cos}\frac{2\pi t}{\lambda}=-\frac{1}{2}$

$\frac{2\pi t}{\lambda}=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}\qquad n\in Z$

當 $t=\frac{\lambda}{2}(2n+\frac{2}{3})$ 時

$t=\frac{2\lambda}{6},\ \frac{8\lambda}{6},\ \frac{14\lambda}{6},\ \frac{20\lambda}{6},\ \cdots\cdots\cdots$

當 $t=\frac{\lambda}{2}(2n-\frac{2}{3})$ 時

$t=\frac{4\lambda}{6},\ \frac{10\lambda}{6},\ \frac{16\lambda}{6},\ \frac{22\lambda}{6},\ \cdots\cdots\cdots$

故出發後第N次過E點之時間爲

$t=\frac{\lambda}{6}\{6[\frac{N}{2}]+(-1)^{N+1}\cdot 2\}$

其中“〔 〕”表“高斯符號”

⑧過F點時　$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ell$

得　$\cos\frac{2\pi t}{\lambda}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{2\pi t}{\lambda}=2n\pi\pm\frac{3\pi}{4} \qquad n\in Z$$

$$t=\frac{\lambda}{2}\left(2n\pm\frac{3}{4}\right) \qquad n\in Z$$

當 $t=\frac{\lambda}{2}\left(2n+\frac{3}{4}\right)$ 時

$$t=\frac{3}{8}\lambda,\ \frac{11}{8}\lambda,\ \frac{19}{8}\lambda,\ \frac{27}{8}\lambda,\ \cdots\cdots$$

當 $t=\frac{\lambda}{2}\left(2n-\frac{3}{4}\right)$ 時

$$t=\frac{5}{8}\lambda,\ \frac{13}{8}\lambda,\ \frac{21}{8}\lambda,\ \frac{29}{8}\lambda,\ \cdots\cdots$$

故出發後第N次過F點之時間爲

$$t=\frac{\lambda}{8}\left\{8\left[\frac{N}{2}\right]+(-1)^{N+1}\cdot 3\right\}$$

其中"〔 〕"表"高斯符號"。

⑨過G點時　$y=-\frac{\sqrt{3}}{4}\ell$

得　$\cos\frac{2\pi t}{\lambda}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{2\pi t}{\lambda}=2n\pi\pm\frac{5\pi}{6} \qquad n\in Z$$

$$t=\frac{\lambda}{2}\left(2n\pm\frac{5}{6}\right) \qquad n\in Z$$

當 $t=\frac{\lambda}{2}\left(2n+\frac{5}{6}\right)$ 時

$$t=\frac{5}{12}\lambda\ ,\ \frac{17}{12}\lambda\ ,\ \frac{29}{12}\lambda\ ,\ \cdots\cdots\cdots$$

當 $t=\frac{\lambda}{2}\left(2n-\frac{5}{6}\right)$ 時

$$t=\frac{7}{12}\lambda\ ,\ \frac{19}{12}\lambda\ ,\ \frac{31}{12}\lambda\ ,\ \cdots\cdots\cdots$$

故第N次過G點之時間爲

$$t=\frac{\lambda}{12}\left\{12\left[\frac{N}{2}\right]+(-1)^{N+1}\cdot 5\right\}$$

其中“〔 〕”表“高斯符號”

下表爲出發後通過A，B，C，D，O，E，F，G，H各點之時間（單位 $\frac{\lambda}{24}$ 秒）

	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	第六次	第七次	第八次	第九次	第十次
A	24	48	72	96	120	144	168	192	216	240
B	2	22	26	46	50	70	74	94	98	118
C	3	21	27	45	51	69	75	93	99	117
D	4	20	28	44	52	68	76	92	100	116
O	6	18	30	42	54	66	78	90	102	114
E	8	16	32	40	56	64	80	88	104	112
F	9	15	33	39	57	63	81	87	105	111
G	10	14	34	38	58	62	82	86	106	110
H	12	36	60	84	108	132	156	180	204	288

〔結論Ⅳ〕

①P點回到A點之時間爲　$t = N\lambda$（其中N表第幾度回到A點）

P點過B點之時間爲　$t = \frac{\lambda}{12}\{12〔\frac{N}{2}〕+(-1)^{N+1}\}$

P點過C點之時間爲　$t = \frac{\lambda}{8}\{8〔\frac{N}{2}〕+(-1)^{N+1}\}$

P點過D點之時間爲　$t = \frac{\lambda}{6}\{6〔\frac{N}{2}〕+(-1)^{N+1}\}$

P點過O點之時間爲　$t = \frac{(2N-1)\lambda}{4}$

P點過E點之時間爲　$t = \frac{\lambda}{6}\{6〔\frac{N}{2}〕+(-1)^{N+1}\cdot 2\}$

P點過F點之時間爲　$t = \frac{\lambda}{8}\{8〔\frac{N}{2}+(-1)^{N+1}\cdot 3\}$

P點過G點之時間爲　$t = \frac{\lambda}{12}\{12〔\frac{N}{2}〕+(-1)^{N+1}\cdot 5\}$

P點過H點之時間爲　$t = \frac{(2N-1)\lambda}{2}$

②P點僅在過A，O，H三點時呈簡單之周期性，（過A，H二點之周期爲λ,過O點之周期爲$\frac{\lambda}{2}$）而在其他各點均不呈周期性。

③$\overline{AH}$上除A，O，H三點外之任一點，考慮P點通過之時間雖不具規則性，但每間隔兩次通過時間（如第一次通過到第三次通過，第8次通過到第10次通過，………等）均爲λ秒。

④由表十二可看出：D爲$\overline{OA}$之中點，但動點P從A至D需時$4\times(\frac{\lambda}{24})$秒，而從D至O點則僅需$2\times(\frac{\lambda}{24})$秒，可見

簡諧運動在愈接近平衡點時其速率愈快。

⑤若R（0，$\frac{\ell}{2}$Cosθ），$0<\theta<\pi$ 爲$\overline{AH}$上除A、H外任一點，設動點P通過R點所需的時間爲t，則

$$t=\frac{\theta}{2\pi}\left\{\frac{2\pi}{\theta}\left[\frac{N}{2}\right]+(-1)^{N+1}\right\}\lambda$$

〔證明〕：$\frac{\ell}{2}\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi t}{\lambda}\right)=\frac{\ell}{2}\operatorname{Cos}\theta$

$$\operatorname{Cos}\frac{2\pi t}{\lambda}=\operatorname{Cos}\theta$$

$$\frac{2\pi t}{\lambda}=2n\pi\pm\theta \qquad n\geq 0$$

$$t=\left(n\pm\frac{\theta}{2\pi}\right)\lambda \qquad n\geq 0$$

(1)當$\left(n+\frac{\theta}{2\pi}\right)\lambda$時

$$t=\frac{\theta\lambda}{2\pi},\left(1+\frac{\theta}{2\pi}\right)\lambda,\left(2+\frac{\theta}{2\pi}\right)\lambda,\cdots\cdots\cdots$$

(2)當$\left(n-\frac{\theta}{2\pi}\right)\lambda$ 時

$$t=\left(1-\frac{\theta}{2\pi}\right)\lambda,\left(2-\frac{\theta}{2\pi}\right)\lambda,\cdots\cdots\cdots\cdots$$

推得 $t=\left\{\left[\frac{N}{2}\right]+(-1)^{N+1}\frac{\theta}{2\pi}\right\}\lambda$

$$\Rightarrow\quad t=\frac{\theta}{2\pi}\left\{\frac{2\pi}{\theta}\left[\frac{N}{2}\right]+(-1)^{N+1}\right]\lambda$$

其中“〔 〕”表“高斯符號”。

〔問題6〕

於問題5的條件下，出發後T秒內，P點過A，B，C，D，O，E，F，G，H各點之次數：

①過最高點A時　$t=n\lambda$，$n\in N$

但　$0\leq t<T$　　$n\in N$

∴　$0\leq n\lambda<T$　　$n\in N$

$$0\leq n<\frac{T}{\lambda}\qquad n\in N$$

∴過A點之次數為$\left[\frac{T}{\lambda}\right]$

②過平衡點時　$t=\frac{\lambda}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)$　　$n\in N$

但　$0\leq t<T$

$$0\leq\frac{\lambda}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)<T$$

$$0\leq n-\frac{1}{2}<\frac{2T}{\lambda}\qquad n\in N$$

$$\frac{1}{2}\leq n<\frac{2T}{\lambda}+\frac{1}{2}\qquad n\in N$$

∴過平衡點之次數為$\left[\frac{2T}{\lambda}+\frac{1}{2}\right]$

“〔 〕”表“高斯符號”

③過最低點時　$t=\frac{(2n-1)\lambda}{2}$

但$0\leq t<T$，　$0\leq\frac{(2n-1)\lambda}{2}<T$，

$0\leq 2n-1<\frac{2T}{\lambda}$，　$1\leq 2n<\frac{2T}{\lambda}+1$，

$$\frac{1}{2}\leq n<\frac{T}{\lambda}+\frac{1}{2}$$

∴過最低點之次數為$\left[\frac{T}{\lambda}+\frac{1}{2}\right]$

④過B點時 $t=\frac{\lambda}{2}(2\pi\pm\frac{1}{6})$，$n\in N$ 但 $0\leq t<T$

$$\therefore\quad 0\leq\frac{\lambda}{2}(2n\pm\frac{1}{6})<T$$

取"+"時 $0<\frac{\lambda}{2}(2n+\frac{1}{6})<T$

$$0\leq 2n+\frac{1}{6}<\frac{2T}{\lambda}$$

$$-\frac{1}{6}\leq 2n<\frac{2T}{\lambda}-\frac{1}{6}$$

$$-\frac{1}{12}\leq n<\frac{T}{\lambda}-\frac{1}{12}$$

此時 t 值共有 $[\frac{T}{\lambda}-\frac{1}{12}]+1$ 解

取"−"時 $0\leq\frac{\lambda}{2}(2n-\frac{1}{6})<T$

$$0\leq 2n-\frac{1}{6}<\frac{2T}{\lambda}$$

$$\frac{1}{6}\leq 2n<\frac{2T}{\lambda}+\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{12}\leq n<\frac{T}{\lambda}+\frac{1}{12}$$

此時共有 $[\frac{T}{\lambda}+\frac{1}{12}]$ 解

∴T 秒內過B點之次數爲

$$[\frac{T}{\lambda}-\frac{1}{12}]+[\frac{T}{\lambda}+\frac{1}{12}]+1=[\frac{T}{\lambda}+\frac{1}{12}]+[\frac{T}{\lambda}+\frac{11}{12}]$$

⑤過C點時 $t=\frac{\lambda}{2}(2\pi\pm\frac{1}{4})$ 但 $0\leq t<T$

$\therefore \quad 0 \leq \frac{\lambda}{2}\left(2n \pm \frac{1}{4}\right) < T$

取 "+" 時　$0 \leq \frac{\lambda}{2}\left(2n + \frac{1}{4}\right) < T$，$0 \leq 2n + \frac{1}{4} < \frac{2T}{\lambda}$

$-\frac{1}{4} \leq 2n < \frac{2T}{\lambda} - \frac{1}{4}$，$-\frac{1}{8} \leq n < \frac{T}{\lambda} - \frac{1}{8}$

此時之 t 值共有 $\left[\frac{T}{\lambda} - \frac{1}{8}\right] + 1 = \left[\frac{T}{\lambda} + \frac{7}{8}\right]$ 解

取 "−" 時　$0 \leq \frac{\lambda}{2}\left(2n - \frac{1}{4}\right) < T$，$0 \leq 2n - \frac{1}{4} < \frac{2T}{\lambda}$

$\frac{1}{4} \leq 2n < \frac{2T}{\lambda} + \frac{1}{4}$，$\frac{1}{8} \leq n < \frac{T}{\lambda} + \frac{1}{8}$

此時 t 值共有 $\left[\frac{T}{\lambda} + \frac{1}{8}\right]$ 解

故 T 秒內過 C 之次數爲 $\left[\frac{T}{\lambda} + \frac{1}{8}\right] + \left[\frac{T}{\lambda} + \frac{7}{8}\right]$

⑥過 D 點時　$t = \frac{\lambda}{2}\left(2n \pm \frac{1}{3}\right)$

但 $0 \leq t < T$　　$\therefore 0 \leq \frac{\lambda}{2}\left(2n \pm \frac{1}{3}\right) < T$

仿上題，本題共有 $\left[\frac{T}{\lambda} + \frac{1}{6}\right] + \left[\frac{T}{\lambda} + \frac{5}{6}\right]$ 次

⑦過 E 點時　$t = \frac{\lambda}{2}\left(2n \pm \frac{2}{3}\right)$　　$n \in Z$

但 $0 \leq t < T$　　$\therefore 0 \leq \frac{\lambda}{2}\left(2n \pm \frac{2}{3}\right) < T$

取 "+" 時　$0 \leq \frac{\lambda}{2}\left(2n + \frac{2}{3}\right) < T$

$0 \leq 2n + \frac{2}{3} < \frac{2T}{\lambda}$，$-\frac{1}{3} \leq n < \frac{T}{\lambda} - \frac{1}{3}$

此時有〔$\frac{T}{\lambda}-\frac{1}{3}$〕$+1=$〔$\frac{T}{\lambda}+\frac{2}{3}$〕個解

取“－”時　$0\leq\frac{\lambda}{2}(2n-\frac{2}{3})<T$，$0\leq 2n-\frac{2}{3}<\frac{2T}{\lambda}$

$$\frac{1}{3}\leq n<\frac{T}{\lambda}+\frac{1}{3}$$

此時有〔$\frac{T}{\lambda}+\frac{1}{3}$〕解

∴ T秒內共通過E點〔$\frac{T}{\lambda}+\frac{1}{3}$〕＋〔$\frac{T}{\lambda}+\frac{2}{3}$〕次

⑧同理T秒內共過F點〔$\frac{T}{\lambda}+\frac{3}{8}$〕＋〔$\frac{T}{\lambda}+\frac{5}{8}$〕次

⑨同理T秒內共過G點〔$\frac{T}{\lambda}+\frac{5}{12}$〕＋〔$\frac{T}{\lambda}+\frac{7}{12}$〕次．

（結論Ⅴ）

①T秒內通過A，B，C，D，O，E，F，G，H各點之次數分別爲：

A→〔$\frac{T}{\lambda}$〕

B→〔$\frac{T}{\lambda}+\frac{1}{12}$〕＋〔$\frac{T}{\lambda}+\frac{11}{12}$〕

C→〔$\frac{T}{\lambda}+\frac{1}{8}$〕＋〔$\frac{T}{\lambda}+\frac{7}{8}$〕

D→〔$\frac{T}{\lambda}+\frac{1}{6}$〕＋〔$\frac{T}{\lambda}+\frac{5}{6}$〕

O→〔$\frac{2T}{\lambda}+\frac{1}{2}$〕

E→〔$\frac{T}{\lambda}+\frac{1}{3}$〕＋〔$\frac{T}{\lambda}+\frac{2}{3}$〕

$$F \rightarrow \left[\frac{T}{\lambda}+\frac{3}{8}\right]+\left[\frac{T}{\lambda}+\frac{5}{8}\right]$$

$$G \rightarrow \left[\frac{T}{\lambda}+\frac{5}{12}\right]+\left[\frac{T}{\lambda}+\frac{7}{12}\right]$$

$$H \rightarrow \left[\frac{T}{\lambda}+\frac{1}{2}\right]$$

②由結論Ⅴ－①知，在相同T時間內，過最高點與最低點之次數約略爲其他各點次數之半，此因最高點與最低點，恰爲簡諧運動之端點，來回運動時重複，而使通過之次數減半。

③若 $R\left(0,\frac{\ell}{2}\cos\theta\right)$，$0<\theta<\pi$，爲AH上除A、H外任一點，設動點P通過R點的次數爲m，則

$$m=\left[\frac{T}{\lambda}+\frac{\theta}{2\pi}\right]+\left[\frac{T}{\lambda}+\left(1-\frac{\theta}{2\pi}\right)\right]$$

（其中“〔 〕”表“高斯符號”）

〔證明〕 $\because 0\leq t<T$ 且 $t=\left(n\pm\frac{\theta}{2\pi}\right)\lambda$

$$\therefore 0\leq\left(n\pm\frac{\theta}{2\pi}\right)\lambda<T$$

(1)當 $0\leq\left(n+\frac{\theta}{2\pi}\right)\lambda<T$

$$-\frac{\theta}{2\pi}\leq n<\frac{T}{\lambda}-\frac{\theta}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \quad n=0,1,2,\cdots\cdots\left[\frac{T}{\lambda}-\frac{\theta}{2\pi}\right]$$

$$\therefore \quad n=\left[\frac{T}{\lambda}-\frac{\theta}{2\pi}\right]+1$$

$$=\left[\frac{T}{\lambda}-\frac{\theta}{2\pi}+1\right]$$

(2)當 $0 \leq \left(n - \frac{\theta}{2\pi} \right) \lambda < T$

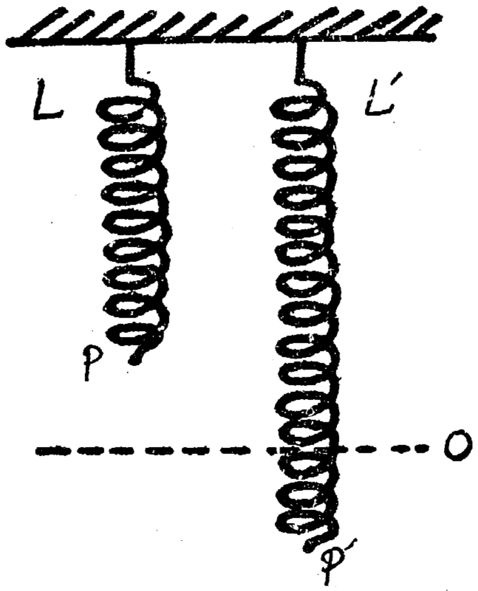
$$\frac{\theta}{2\pi} < n < \frac{T}{\lambda} + \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow n = 1, 2, \cdots\cdots \left[\frac{T}{\lambda} + \frac{\theta}{2\pi} \right]$$

$$\therefore \quad n = \left[\frac{T}{\lambda} + \frac{\theta}{2\pi} \right]$$

所以在T秒內一共經過 $\left[\frac{T}{\lambda} - \frac{\theta}{2\pi} + 1 \right] + \left[\frac{T}{\lambda} + \frac{\theta}{2\pi} \right]$ 次

在第二部分——等速圓周運動之研究時，我們曾經考慮到，二動點同時作等速圓周運動時，二點之相遇情形，今在簡諧運動部門，我們仍想就類似問題來探討。

〔問題7〕



如圖將二彈簧L與L′，其一端點均共同固定在天花板上，今使二彈簧同時運動，使平衡點週期、振幅均相同，當 $t = 0$ 時，L之另一端點在最高點，而L′之另一端點在最低點開始振動後，問

(1)點P與P′何時同高？

(2)同高點之位置為何？

解：(1)由問題4知，t秒後，P，P′二點之位置為

$P：y=\frac{\ell}{2}\text{Sin}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi t}{\lambda}\right)$

$P'：y=\frac{\ell}{2}\text{Sin}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{2\pi t}{\lambda}\right)$

二點同高時

$$\frac{\ell}{2}\text{Sin}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi t}{\lambda}\right)=\frac{\ell}{2}\text{Sin}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{2\pi t}{\lambda}\right)$$

$$\text{Cos}\,\frac{2\pi t}{\lambda}=-\text{Cos}\,\frac{2\pi t}{\lambda}$$

$$\text{Cos}\,\frac{2\pi t}{\lambda}=0$$

$$\frac{2\pi t}{\lambda}=(n-1)\pi+\frac{\pi}{2}\qquad n\in Z$$

$$t=\frac{\lambda}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)$$

但 $\lambda>0$，$t>0$　故 $n-\frac{1}{2}>0$　$n\geq 1$

第一次同高時　$t=\frac{\lambda}{4}$

第二次同高時　$t=\frac{3\lambda}{4}$

………………　………………………

第N次同高時　$t=\frac{(2N-1)\lambda}{4}$

(2) P與P′同高時　$t=\frac{(2N-1)\lambda}{4}$　得

$$P：y=\frac{\ell}{2}\left(\text{Cos}\,\frac{2\pi t}{\lambda}\right)=\frac{\ell}{2}\text{Cos}\left\{\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{2}\left(N-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{\ell}{2}\text{Cos}\left(N\pi-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

（結論Ⅵ）

①P與P′兩點同高之時間為$\dfrac{(2N-1)\lambda}{4}$。

②P與P′每隔$\dfrac{\lambda}{2}$秒即可相會（等高）一次。

③開始振動後T秒內兩點同高之次數為$\left[\dfrac{2T}{\lambda}+\dfrac{1}{2}\right]$“〔 〕”表“高斯符號”。

④二點之等高點恒在平衡點，與週期、振幅之大小均無關。

〔問題8〕

問題7中，若將ℓ'改成ℓ之k倍，而其他條件均不變時，二彈簧同時振動後，問①P與P′何時同高？②同高點之位置為何？

解：①二點同高時

$$\frac{\ell}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi t}{\lambda}\right)=\frac{\ell'}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{2\pi t}{\lambda}\right)$$

$$\cos\frac{2\pi t}{\lambda}=-\frac{\ell'}{\ell}\cos\frac{2\pi t}{\lambda}$$

$$\cos\frac{2\pi t}{\lambda}=-K\cos\frac{2\pi t}{\lambda}$$

$$(1+k)\cos\frac{2\pi t}{\lambda}=0$$

$$\cos\frac{2\pi t}{\lambda}=0 \quad \text{由問題7得} \; t=\frac{\lambda}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)$$

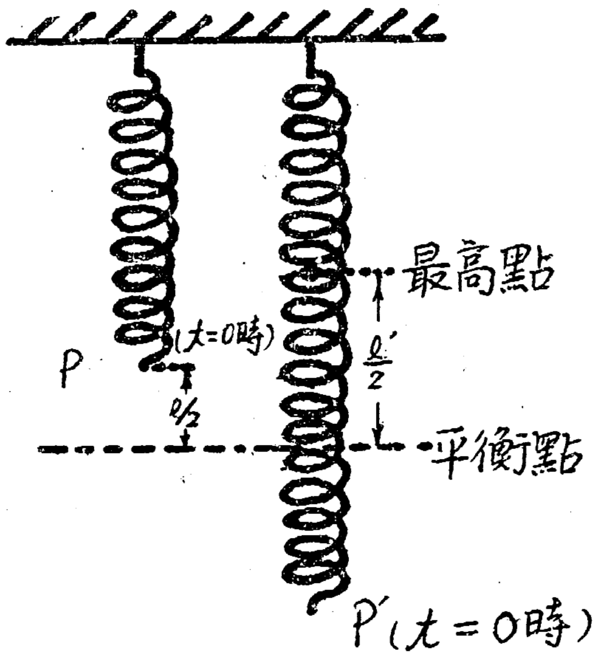
而其所得的結論與問題7之結論完全相同，即若使二彈簧有相同之週期與平衡點，當$t=0$時一從最高點，一從最低點開始振動，二端點等高之時間均在$\dfrac{(2N-1)\lambda}{4}$秒時。

②等高的位置也均在平衡點，與振幅之大小完全無關，又同時在二彈簧之平衡點相同之情形下，討論二點P，P′之等高，今不使振幅改變，而使週期改變之情形與圓周運動二點之相遇問題相似，

不再予以討論。

以下我們繼續研究二彈簧保持相同平衡點之情形。

〔問題9〕



如左圖二彈簧L與L′當 t = 0 時，P 在最高點P′在最低點，開始振動後P與P′之關係為何？(振幅分別為ℓ與ℓ'，週期分別為λ與λ')

解：由〔問題4〕得　t 秒後

$$P：y=\frac{\ell}{2}\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi t}{\lambda}\right)$$

$$P'：y=\frac{\ell'}{2}\operatorname{Sin}\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{2\pi t}{\lambda'}\right)$$

當P與P′二點同高時

$$\Rightarrow\ \frac{\ell}{2}\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi t}{\lambda}\right)=\frac{\ell'}{2}\operatorname{Sin}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{2\pi t}{\lambda'}\right)$$

$$\ell\operatorname{Cos}\frac{2\pi t}{\lambda}=-\ell'\operatorname{Cos}\frac{2\pi t}{\lambda'}$$

$$\ell\operatorname{Cos}\frac{2\pi t}{\lambda}+\ell'\operatorname{Cos}\frac{2\pi t}{\lambda'}=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

令　$K=\frac{\ell'}{\ell}$，　$M=\frac{\lambda}{\lambda'}$　則①式變成

$$\text{Cos}\left(\frac{2\pi t}{\lambda}\right)+K\,\text{Cos}\left(M\cdot\frac{2\pi t}{\lambda}\right)=0$$

取 $\theta=\dfrac{2\pi t}{\lambda}$ 則①式變成 $\text{Cos}\,\theta+K\,\text{Cos}\,(M\theta)=0$ …②

其中K與M爲二定數，要研究二點P與P′等高之問題時，可以說必須先解決三角方程式 $\text{Cos}\,\theta+K\,\text{Cos}\,(M\theta)=0$，但今該方程式之K，M值未知，無法直接求出 θ 值，即使給定K與M之值已知，要直接求得 θ 值，在我們高中數學階段實在不是一件可行得了的，不過從〔問題1〕到〔問題8〕中之所有問題，我們常常討論T時間內一動點過一定點或兩動點相遇（含等高）之次數。以下我們想，在〔問題9〕這種複雜的情況下，是否能尋求另一種方法可以不經解三角方程式②而直接求出在T時間內二點等高之次數來解決這個問題，在這之前我們先做幾個討論：

定義：在所予以K與M之情況下，令 $g_{KM}(T)$ 表T時間內P與P′二動點等高之次數。爲討論上之方便，常取T值爲 λ 之整數倍。

觀念：令 $C: y=f(\theta)=-\text{Cos}\,\theta$

$C_{KM}: y=f_{KM}(\theta)=K\,\text{Cos}\,M\theta$，

今欲求 $g_{KM}(T)$ 相當於求當 $0\le t<T$（即 $0\le\theta<\dfrac{2\pi T}{\lambda}$）

時方程式 $\text{Cos}\,\theta+K\,\text{Cos}\,M\theta=0$ 有若干解

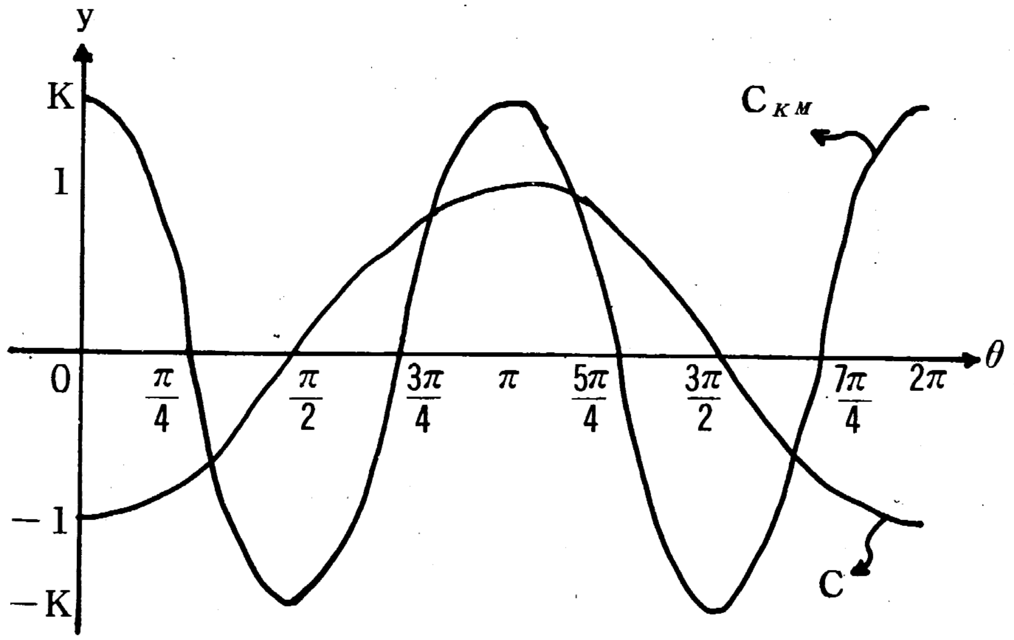
亦可求得曲綫C與 C_{KM} 有若干個交點。

利用以上觀念，求① $g_{K2}(\lambda)$，$g_{K2}(2\lambda)$，$g_{K2}(3\lambda)$ 之值，② $g_{K2}(\lambda)$，$g_{K3}(\lambda)$，$g_{K4}(\lambda)$ 之值，③ $g_{K2}(T)$ 有何性質。

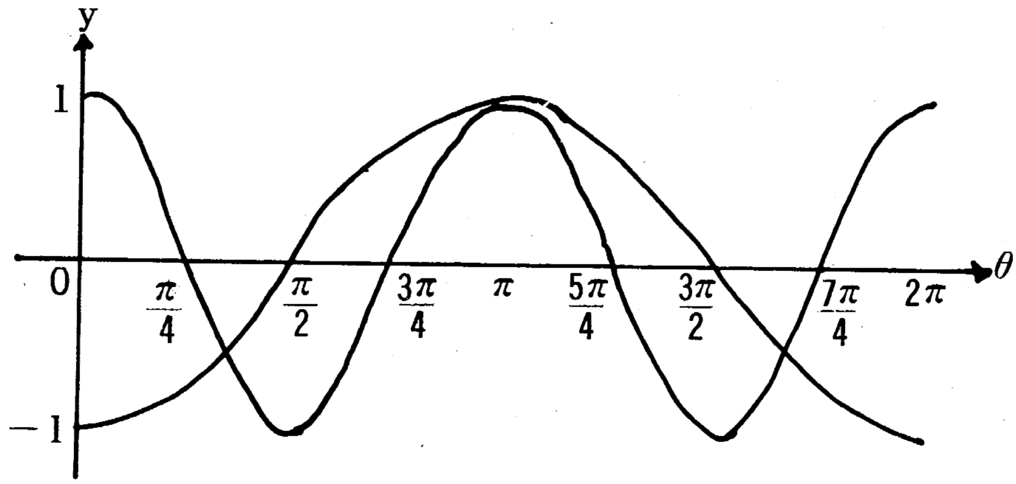
①M＝2時，求 $g_{K2}(\lambda)$ 之值，當 $0<t<\lambda$ 時

$0\le\dfrac{2\pi t}{\lambda}<2\pi$，　　即 $0\le\theta<2\pi$

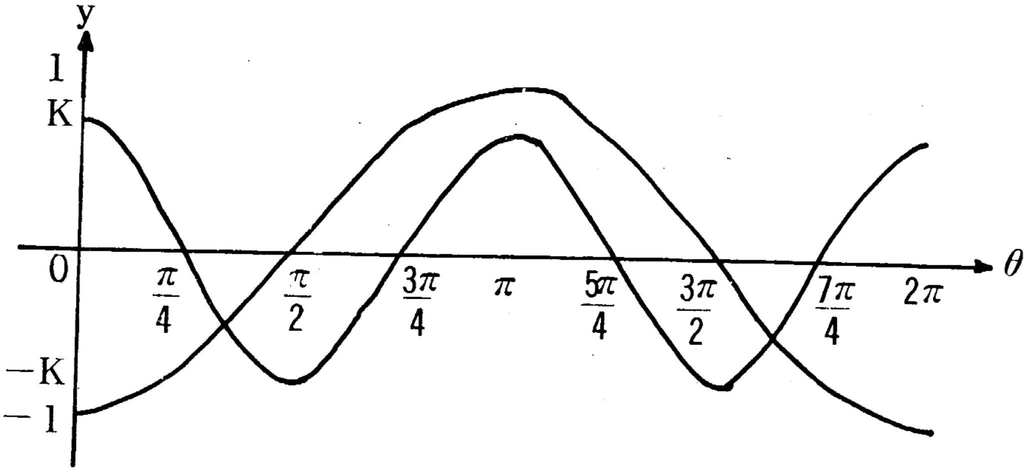
(a)當K＞1時，曲線C與$C_{K,M}$（$0 \leq \theta < 2\pi$）之圖形



(b)當K＝1時，曲線C與C_{KM}之圖形　（$0 \leq \theta < 2\pi$）



(c)當K＜1時，曲線C與C_{KM}之圖形　（$0 \leq \theta < 2\pi$）



由(a)(b)(c)得

$$g_{K2}(\lambda)=\begin{cases}4 & 當K>1時\\3 & 當K=1時\\2 & 當0<K<1時\end{cases}$$

若T取2λ時，$0\leq\theta<4\pi$，因C與C_{KM}皆爲週期函數，且週期皆不大於2π，故C與C_{KM}在$2\pi\leq\theta<4\pi$之相交情形相同於$0\leq\theta<2\pi$時。所以

$$g_{K2}(2\lambda)=\begin{cases}8 & 當K>1時\\6 & 當K=1時\\4 & 當0<K<1時\end{cases}$$

同理

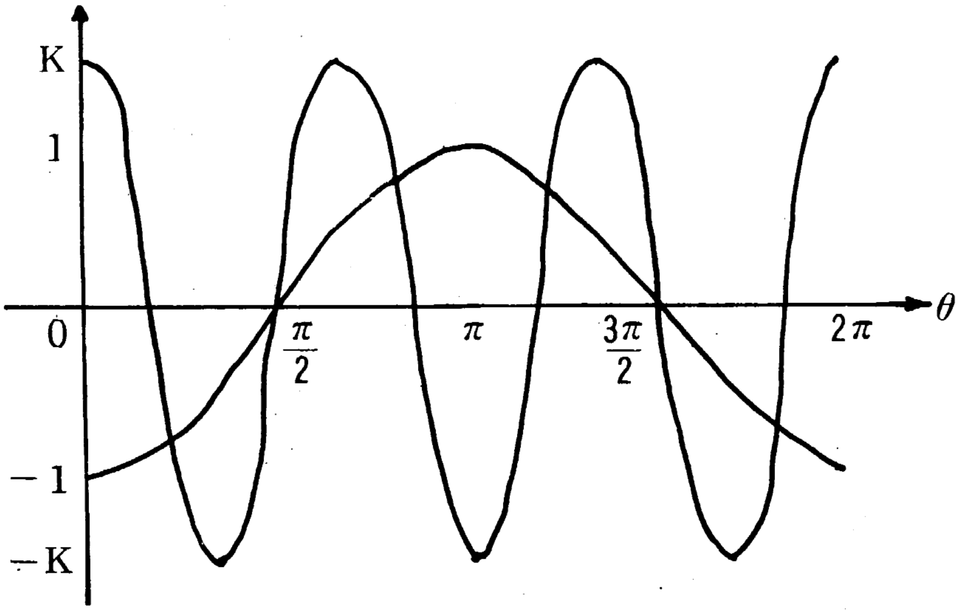
$$g_{K2}(3\lambda)=\begin{cases}12 & 當K>1時\\9 & 當K=1時\\6 & 當0<K<1時\end{cases}$$

∴由$g_{K2}(\lambda)$，$g_{K2}(2\lambda)$，$g_{K2}(3\lambda)$之值可歸納得：

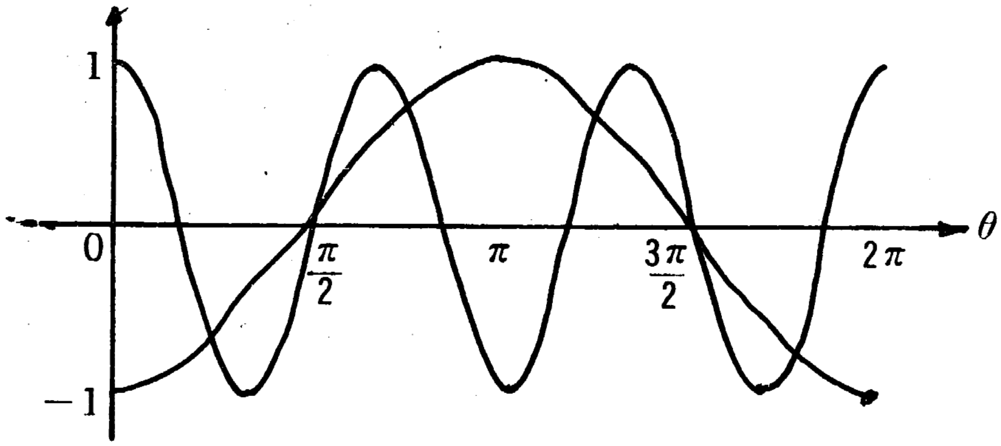
$$g_{K2}(N\lambda)=\begin{cases}4N & 當K>1時\\3N & 當K=1時\\2N & 當0<K<1時\end{cases}$$

②當M＝3時

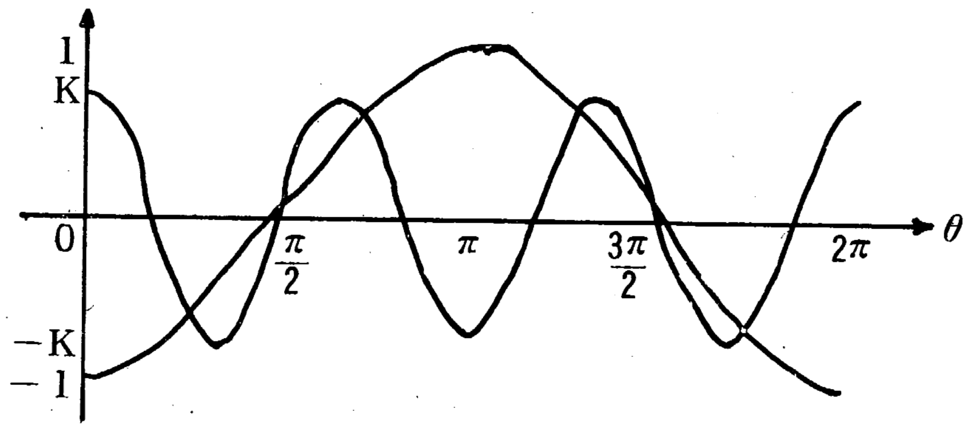
(a)當$K>1$時，曲綫C與C_{KM}之圖形　($0\leq\theta<2\pi$)



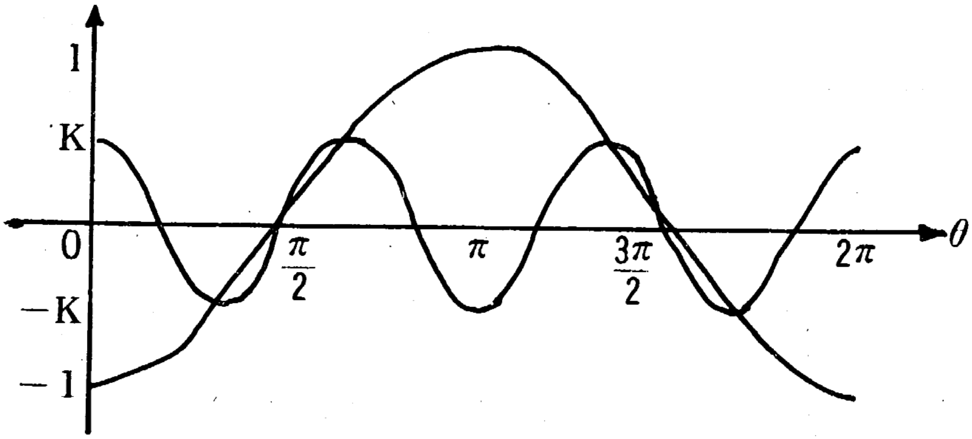
(b)當$K=1$時，曲線與C_{KM}之圖形　($0\le\theta<2\pi$)



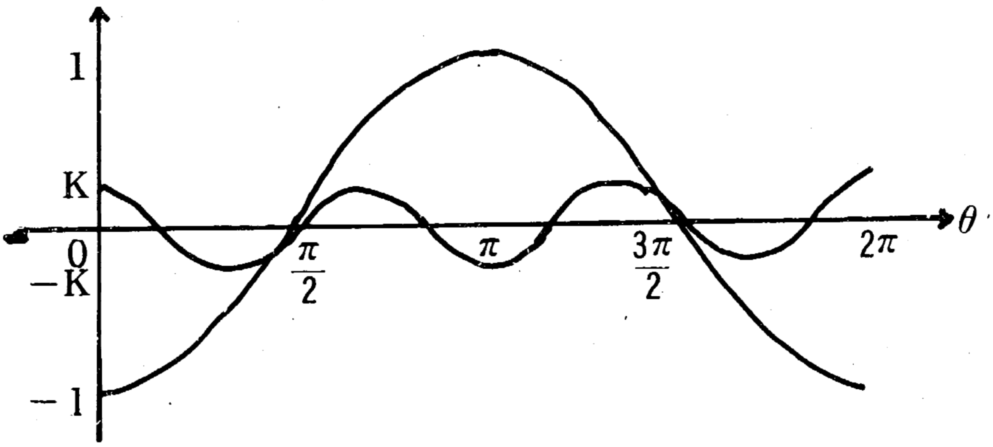
(c)當$\frac{1}{2}<K<1$時，曲線C與C_{KM}之圖形　($0\le\theta<2\pi$)



(d)當$K=\frac{1}{2}$時，曲線C與C_{KM}之圖形($0\le\theta<2\pi$)



(e)當 $0<K<\frac{1}{2}$ 時，曲線 C 與 C_{KM} 之圖形　$(0\leq\theta<2\pi)$

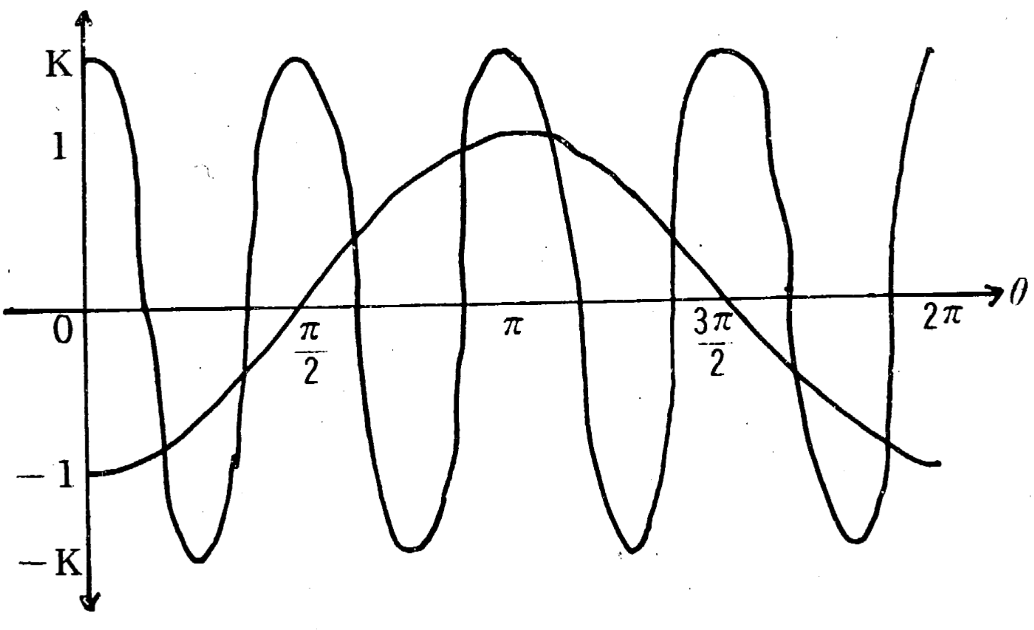


綜合上得：

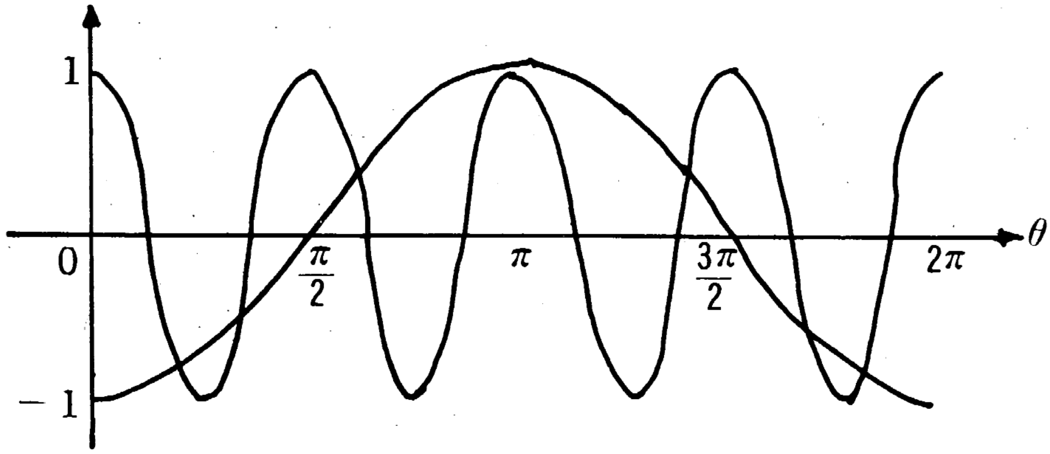
$$g_{K3}(\lambda)=\begin{cases}6 & 當K\geq\frac{1}{2}時\\ 2 & 當K<\frac{1}{2}時\end{cases}$$

③M＝4

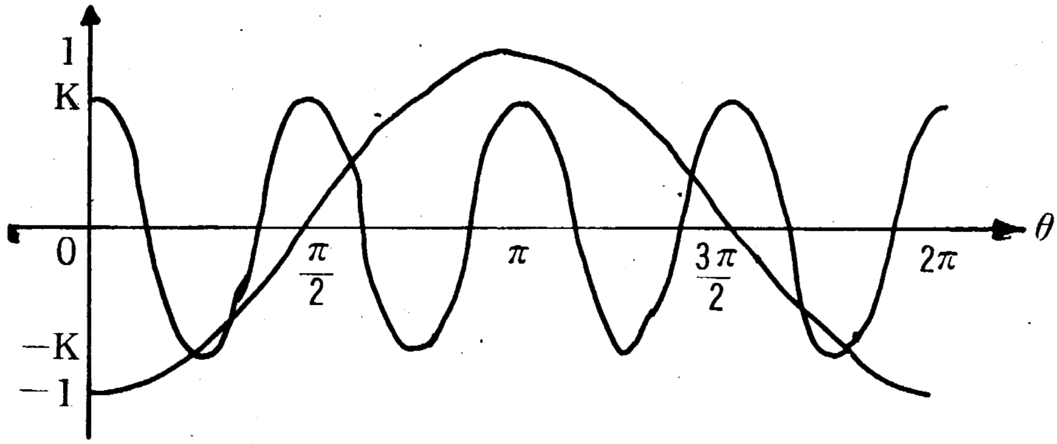
(a)當 $K>1$ 時，曲線 C 與 C_{KM} 之圖形 $(0\leq\theta<2\pi)$



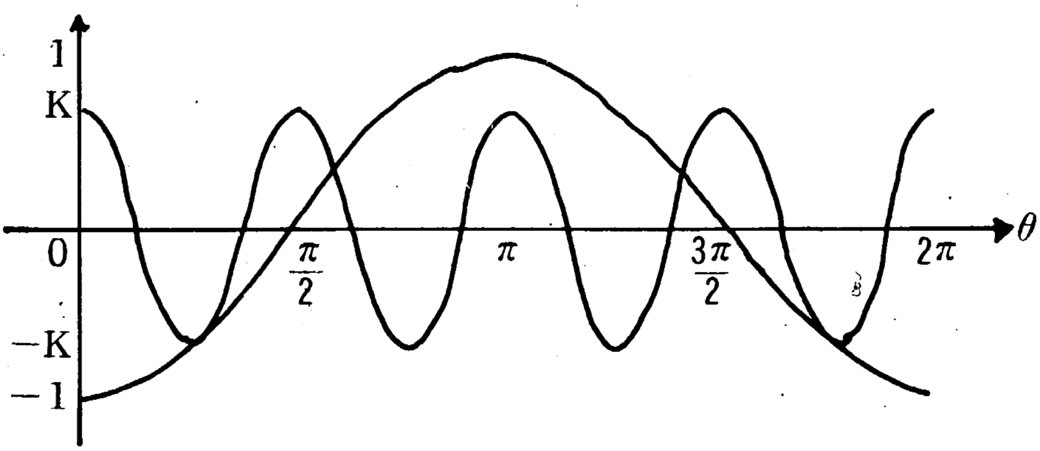
(b)當K＝1時



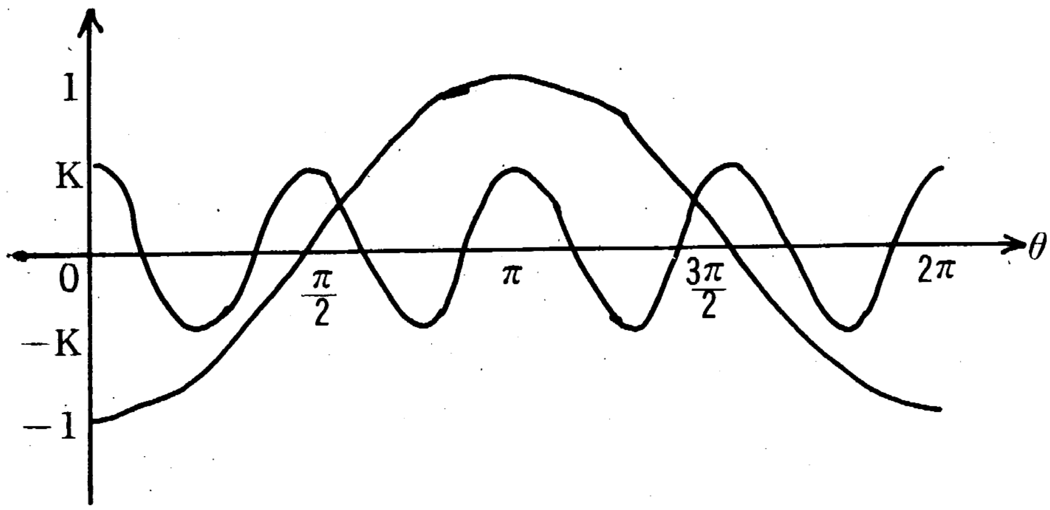
(c)當$\frac{\sqrt{2}}{2}<K<1$時



(d)當$K=\frac{\sqrt{2}}{2}$時



(e)當　$0 < K < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 時

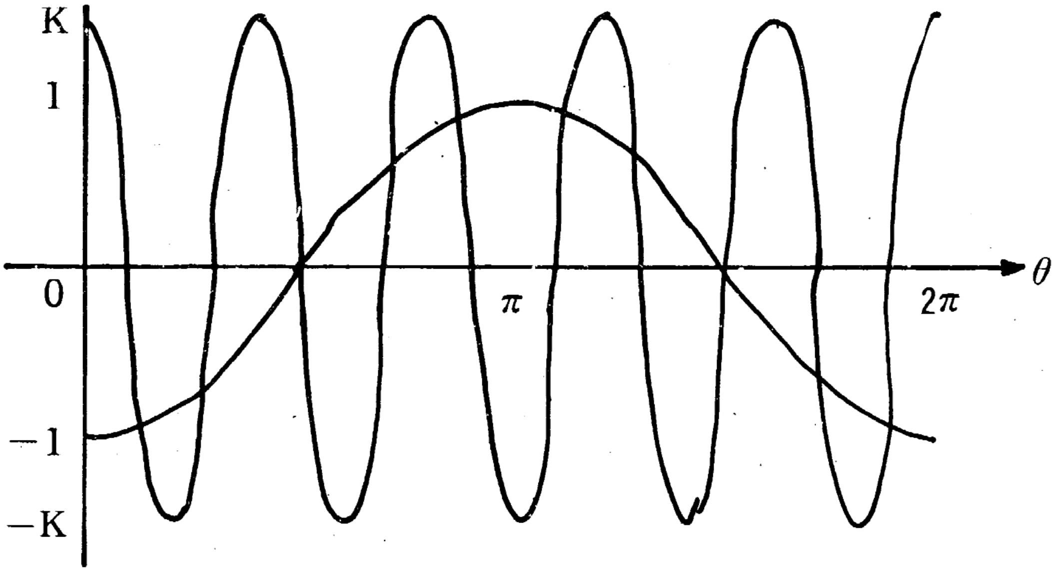


由上所得　$g_{K4}(\lambda) = \begin{cases} 8 & \text{當} K > 1 \\ 7 & \text{當} K = 1 \\ 6 & \text{當} \frac{\sqrt{2}}{2} < K < 1 \\ 4 & \text{當} K = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 & \text{當} 0 < K < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

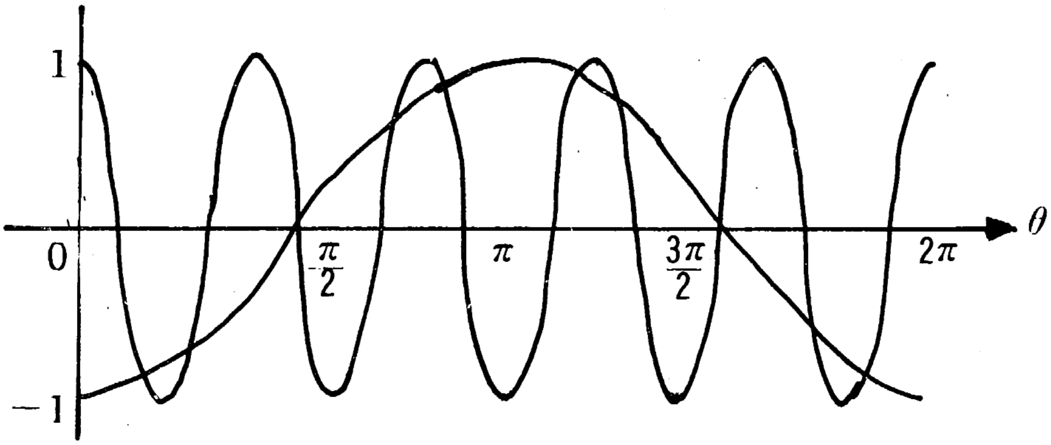
$g_{K4}(N\lambda) = \begin{cases} 8N & \text{當} K > 1 \\ 7N & \text{當} K = 1 \\ 6N & \text{當} \frac{\sqrt{2}}{2} < K < 1 \\ 4N & \text{當} K = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2N & 0 < K < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

④M＝5時

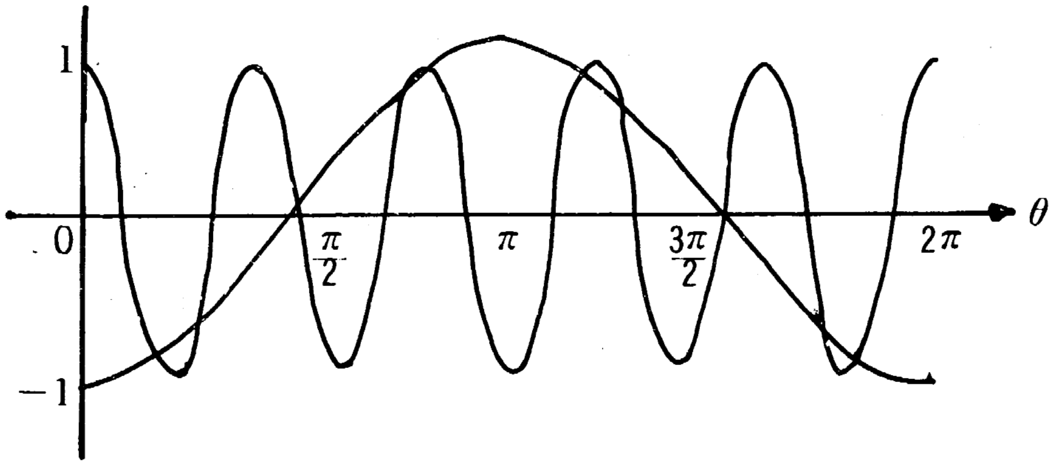
(a)當K＞1，曲線C與C_{KM}之圖形（$0 \leq \theta < 2\pi$）



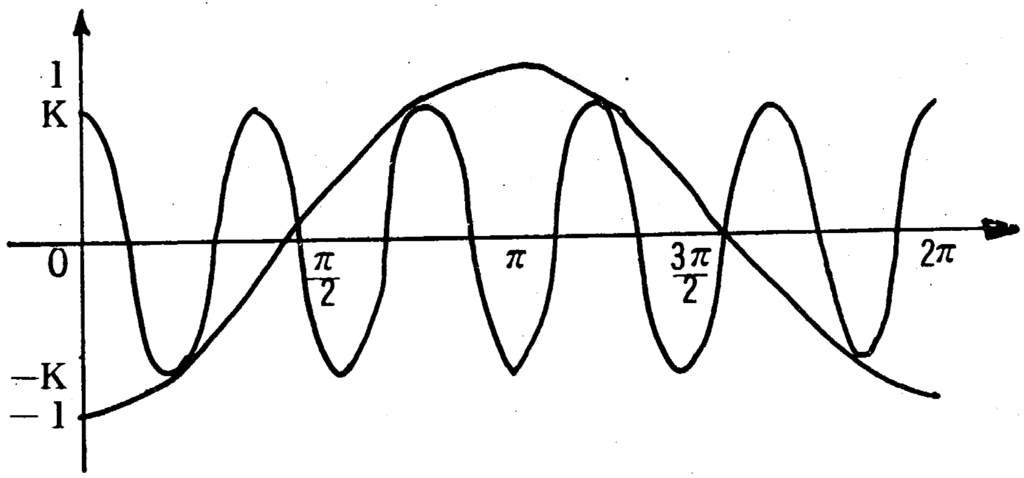
(b) K＝1 時



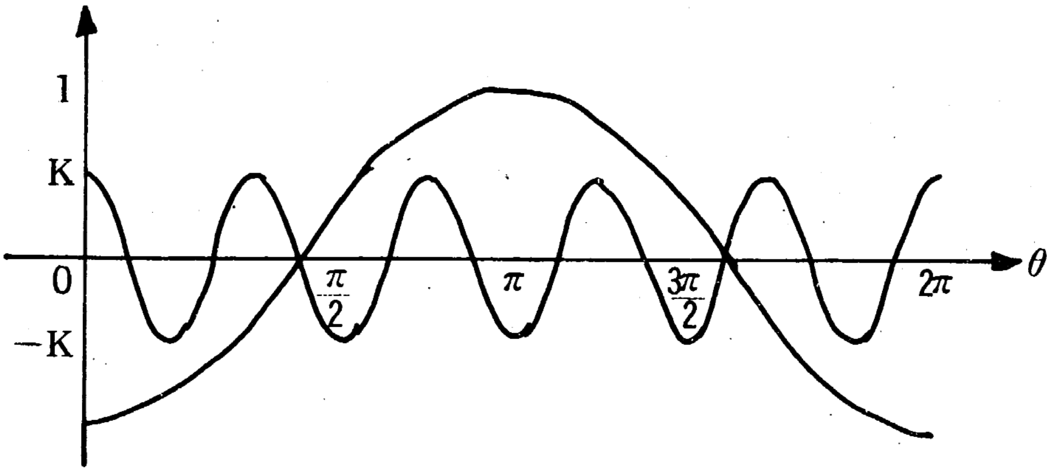
(c) $\cos\frac{\pi}{5}K<1$ 時



(d) $K = \cos\frac{\pi}{5}$ 時



(e) $0 < K < \cos\frac{\pi}{5}$ 時



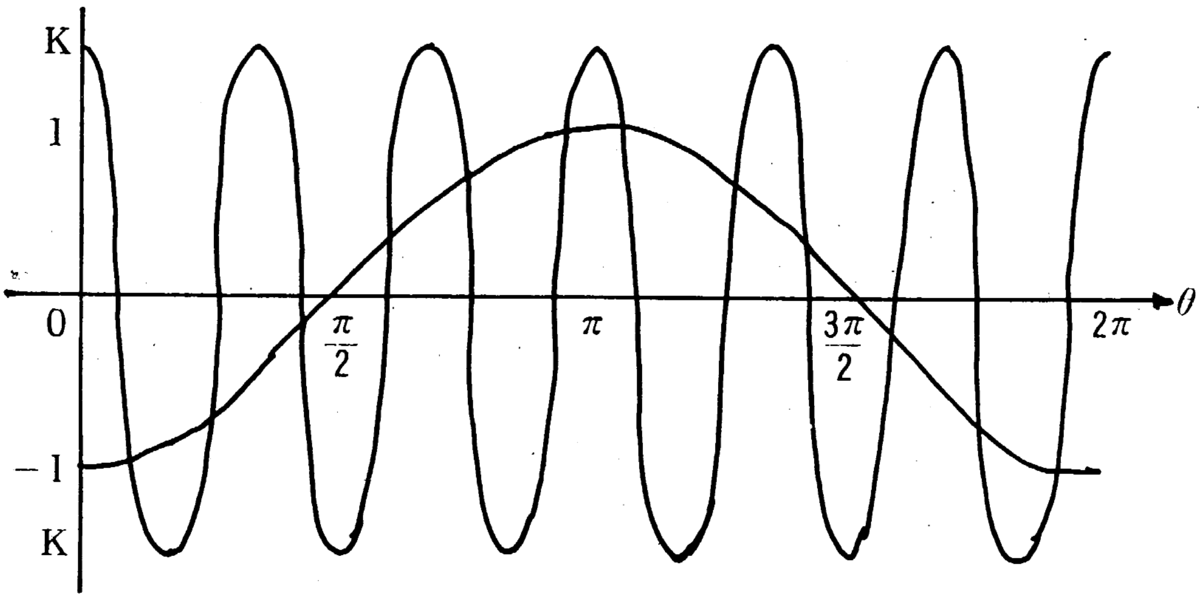
綜合上得

$$g_{K5}(\lambda) = \begin{cases} 10 & \cos\frac{\pi}{5} < K \leq 1 \\ 6 & K = \cos\frac{\pi}{5} \\ 2 & 0 < K < \cos\frac{\pi}{5} \end{cases}$$

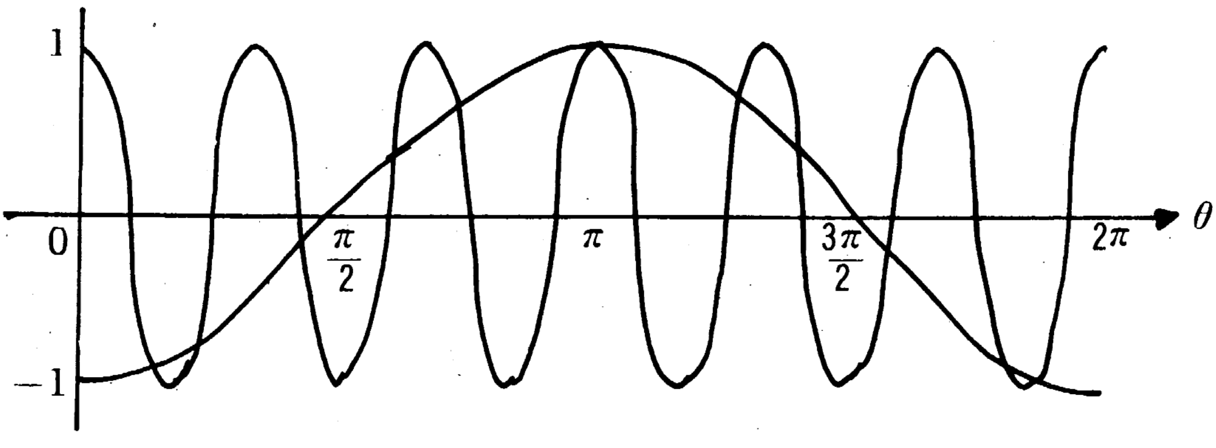
$$\therefore \quad g_{K5}(N\lambda) = \begin{cases} 10N & \cos\frac{\pi}{5} < K \leq 1 \\ 6N & K = \cos\frac{\pi}{5} \\ 2N & 0 < K < \cos\frac{\pi}{5} \end{cases}$$

⑤M＝6時，曲綫C與C_{KM}之圖形（$0 \leq \theta < 2\pi$）

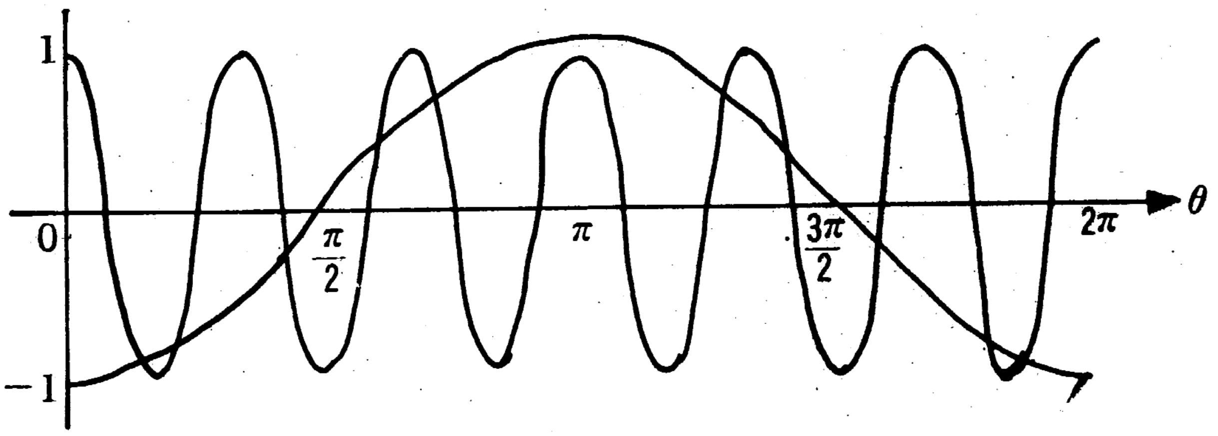
(a)K＞1時



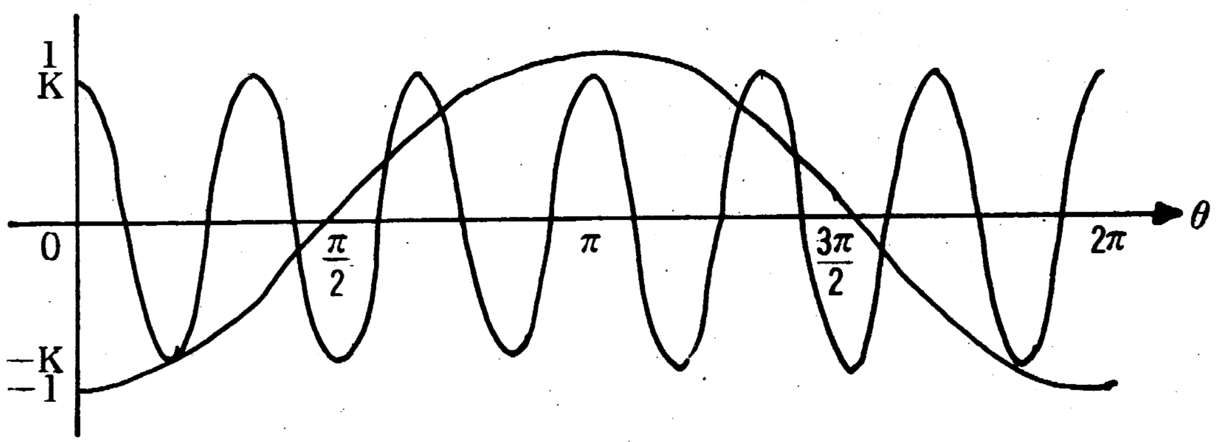
(b)K＝1時



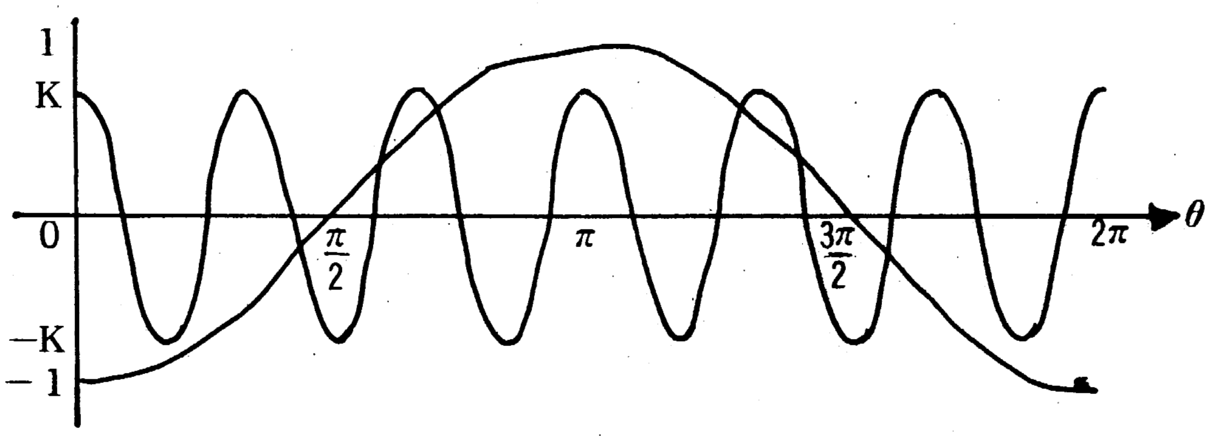
(c) $\frac{\sqrt{3}}{2} < K < 1$ 時



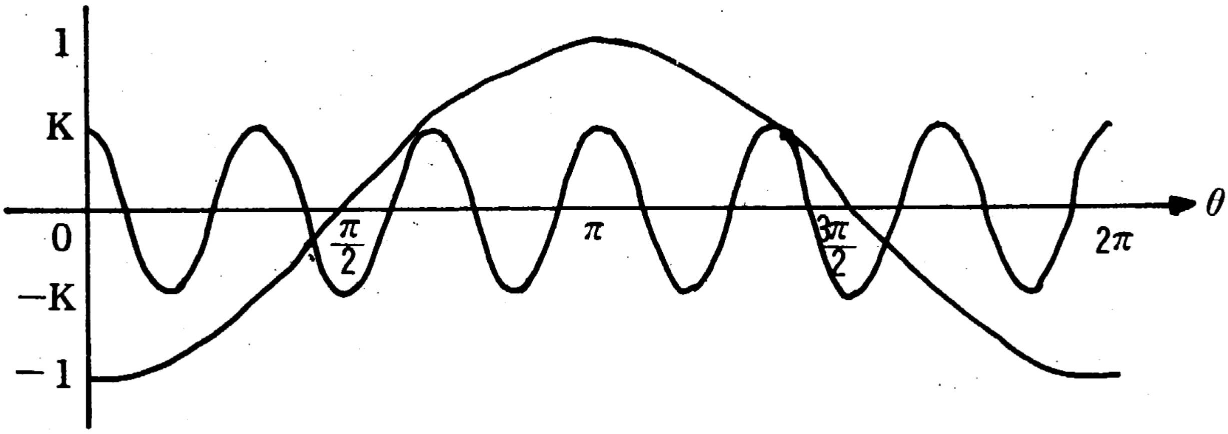
(d) $K = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 時



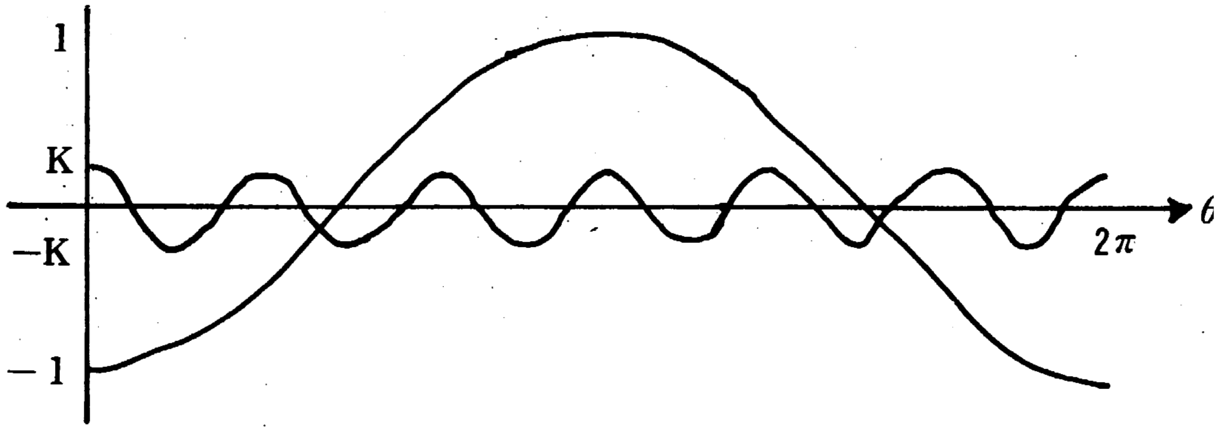
(e) $\frac{1}{2} < K < \frac{\sqrt{3}}{2}$ 時



(f) $K=\frac{1}{2}$ 時



(g) $0<K<\frac{1}{2}$ 時



綜合上得

$$g_{K6}(\lambda)=\begin{cases} 12 & K>1 \\ 11 & K=1 \\ 10 & \frac{\sqrt{3}}{2}<K<1 \\ 8 & K=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 6 & \frac{1}{2}<K<\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 4 & K=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 2 & 0<K<\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\therefore\quad g_{K6}(N\lambda)=\begin{cases} 12N & K>1\\ 11N & K=1\\ 10N & \frac{\sqrt{3}}{2}<K<1\\ 8N & K=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 6N & \frac{1}{2}<K<\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 4N & K=\frac{1}{2}\\ 2N & 0<K<\frac{1}{2}\end{cases}$$

四、有趣的巧合：

現在我們繼續再研究另外一種圓之運動，試圖在兩種不同之運動間找出共同的性質：

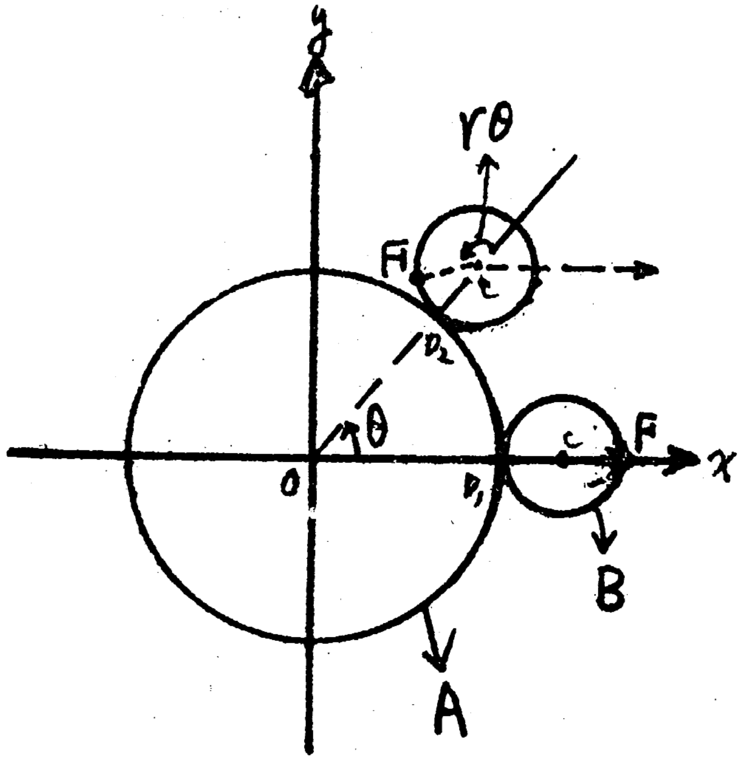
如果有一圓板A，其半徑爲r，將圓心固定在原點上，另外有一滾動之圓板B，其半徑爲1，當$t=0$時，其圓心C在$(r+1,0)$上，在B之圓周上取一點F，當B靜止時，F在$(r+2,0)$上，現將C從$(r+1,0)$開始，沿A之邊緣向逆時針方向滾動，每λ秒繞圓板A一圈，問t秒後F之位置爲何？設t秒後圓板B從$D_1=(r+1,0)$滾到D_2令$\overrightarrow{OC}$與x軸正向之夾角爲θ，則t秒後C之坐標爲$((r+1)\cos\theta,(r+1)\sin\theta)$，又因從$\angle(0,\overrightarrow{OD_1},\overrightarrow{OD_2})=\theta$，故動圓B需滾動$r\theta$而得t秒後$\overrightarrow{CF}$之矢角爲$r\theta+\theta=(r+1)\theta$，

$\therefore\ \overrightarrow{CF}=(\cos(r+1)\theta,\ \sin(r+1)\theta)$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CF}=((r+1)\cos\theta,(r+1)\sin\theta)+(\cos(r+1)\theta,\sin(r+1)\theta)$

$=((r+1)\cos\theta+\cos(r+1)\theta,$

$(r+1)\sin\theta+\sin(r+1)\theta)$



又因圓板B之圓心C繞圓板A 每λ秒一圈，故每秒轉$\frac{1}{\lambda}$圈，即$\frac{2\pi}{\lambda}$弧度，t 秒後卽轉$\frac{2\pi t}{\lambda}$弧度　$\therefore\theta=\frac{2\pi\cdot t}{\lambda}$，因此得 t 秒後F點之位置$\left((r+1)\cos\frac{2\pi t}{\lambda}+\cos(r+1)\frac{2\pi t}{\lambda},\right.$ $\left.(r+1)\sin\frac{2\pi t}{\lambda}+\sin(r+1)\frac{2\pi t}{\lambda}\right)$，若F點通過 y 軸時，$(r+1)\cos\frac{2\pi t}{\lambda}+\cos(r+1)\frac{2\pi t}{\lambda}=0$，卽恰爲方程式$(r+1)\cos\frac{2\pi t}{\lambda}+\cos(r+1)\frac{2\pi t}{\lambda}=0\cdots$①之根。今在問題 9 中之K與M適當之選擇。卽使彈簧 L 之週期爲λ，$t=0$時，P在最高點，而彈簧L′與L有相同之平衡點

，其週期與振幅皆為L之$\frac{1}{r+1}$倍，$t=0$時P′在最低點，則由問題9知P與P′相遇（即等高時）$\operatorname{Cos}\frac{2\pi t}{\lambda}+\frac{1}{r+1}\operatorname{Cos}(r+1)\frac{2\pi t}{\lambda}=0$ ……②，我們竟發現方程式①與方程式②恰為同義方程式，即P與P′相遇之時間與F之過y軸之時間完全相同，亦即當P與P′相遇時，F點必過y軸，而F點必過y軸時，P與P′正好相遇。

此結果如用物理方法去尋找可能不太容易，但我們以數學方法却很容易可以找出來，這同時說明到為什麼很多物理性質甚至天體原理，往往在數學上先發現的道理。

五、總結與今後的展望：

(一)總結：

從以上的內容，我們可以得到以下幾個結論：

1. 解決等速圓周運動與簡諧運動的問題，只需解二個三角方程式$\operatorname{Cos}\theta=\alpha$與$\operatorname{Cos}\theta+K\operatorname{Cos}M\theta=0$即可，且利用三角函數來說明該二運動最方便。

2. 一動點作等速圓周運動時，其位置之時間函數為

$$P(x,y)=\left(\operatorname{Cos}\frac{2\pi t}{\lambda},\ \operatorname{Sin}\frac{2\pi t}{\lambda}\right)$$

3. 若$G=(\operatorname{Cos}\theta,\ \operatorname{Sin}\theta)$，$0<\theta\leq 2\pi$，為單位圓上任一定點，則P過G之時間為$\left\{(N-1)+\frac{\theta}{2\pi}\right\}\lambda$，且T時間內過G點的次數為$\left[\frac{T}{\lambda}+1-\frac{\theta}{2\pi}\right]$。

4. 若P，Q二動點，如問題3中所述同時作等速圓周運動時：

①相遇時間為 $t=\frac{(2n-1)\lambda\lambda'}{2(\lambda+\lambda')}$ $n\in N$

②P，Q二點每間隔$\frac{\lambda\lambda'}{\lambda+\lambda'}$秒卽可相遇一次（卽二動點相遇亦呈週期性）

③T時間內二動點相遇的次數為$\left[\left(\frac{\lambda+\lambda'}{\lambda\lambda'}\right)T+\frac{1}{2}\right]$。

④當$\lambda+\lambda'=k$為一定值時，T時間內相遇次數之最小值為$\left[\frac{T}{4k}+\frac{1}{2}\right]$。

⑤當$\lambda=\lambda'$時二點相遇位置為$(0,(-1)^{N-1})$其位置與週期之大小無關。

⑥對於任一組$\lambda,\lambda'\in N$而言，P，Q二點僅可相遇於有限的幾個點。

5. 一動點P（如問題4）作簡諧運動時，其位置之時間函數為

$$y=\frac{\ell}{2}\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi t}{\lambda}\right)$$

6. 若P作簡諧運動，A，B，C，D，O，E，F，G，H為問題5中所予9個點時：

①過該9個點之時間與T時間內過該點之次數分別為：

A：$t=N\lambda$

B：$t=\frac{\lambda}{12}\{12\left[\frac{N}{2}\right]+(-1)^{N+1}\}$

C：$t=\frac{\lambda}{8}\{8\left[\frac{N}{8}\right]+(-1)^{N+1}\}$

D：$t=\frac{\lambda}{6}\{6\left[\frac{N}{2}\right]+(-1)^{N+1}\}$

O：$t=\frac{(2N-1)\lambda}{4}$

E：$t=\frac{\lambda}{6}\{6\left[\frac{N}{2}\right]+(-1)^{N+1}\cdot 2\}$

$F: t=\frac{\lambda}{8}\{8[\frac{N}{2}]+(-1)^{N+1}\cdot 3\}$

$G: t=\frac{\lambda}{12}\{12[\frac{N}{2}]+(-1)^{N+1}\cdot 5\}$

$H: t=\frac{(2N-1)\lambda}{2}$

次數：$A: [\frac{T}{\lambda}]$

$B: [\frac{T}{\lambda}+\frac{1}{12}]+[\frac{T}{\lambda}+\frac{11}{12}]$

$C: [\frac{T}{\lambda}+\frac{1}{8}]+[\frac{T}{\lambda}+\frac{7}{8}]$

$D: [\frac{T}{\lambda}+\frac{1}{6}]+[\frac{T}{\lambda}+\frac{5}{6}]$

$O: [\frac{2T}{\lambda}+\frac{1}{2}]$

$E: [\frac{T}{\lambda}+\frac{1}{3}]+[\frac{T}{\lambda}+\frac{2}{3}]$

$F: [\frac{T}{\lambda}+\frac{3}{8}]+[\frac{T}{\lambda}+\frac{5}{8}]$

$G: [\frac{T}{\lambda}+\frac{5}{12}]+[\frac{T}{\lambda}+\frac{7}{12}]$

$H: [\frac{T}{\lambda}+\frac{1}{2}]$

②若$R(0, \frac{\ell}{2}\cos\theta)$，$0<\theta<\pi$為$\overline{AH}$上除A、H外任一定點，則動點P過定點R之時間為$\frac{\theta}{2\pi}\{\frac{2\pi}{\theta}[\frac{N}{2}]+(-1)^{N+1}\}\lambda$，T時間內過R之次數為$[\frac{T}{\lambda}+\frac{\theta}{2\pi}]$

$$+\left[\frac{T}{\lambda}+\left(1-\frac{\theta}{2\pi}\right)\right]$$

③動點P僅在過最高點、平衡點與最低點時呈簡單之週期性，而其他各點均不呈週期性。

④簡諧運動在愈接近平衡點時速率愈快，越接近最高或最低點時越慢。

7. 方程式 $\mathrm{Cos}\,\theta+K\,\mathrm{Cos}\,M\theta=0\ (K>1)$ 之根之個數，在 2π 之範圍內當M爲一自然數時恰等於 $2M$。

8. 方程式 $\mathrm{Cos}\,\theta+K\,\mathrm{Cos}\,M\theta=0\ (K=1)$ 之根之個數，在 2π 範圍內，當M爲一個偶數時爲 $2M-1$，M爲奇數時爲 $2M$。

9. 當M爲自然數時，方程式 $\mathrm{Cos}\,\theta+K\,\mathrm{Cos}\,M\theta=0$ 在 2π 範圍內，最少有2個根。

10. 在問題9之情況下，令 $g_{KM}(T)$ 表T時間內P與P′二動點等高的次數，即三角方程式 $\mathrm{Cos}\,\theta+K\,\mathrm{Cos}\,M\theta=0$ 在 $0\leq\theta<\frac{2\pi t}{\lambda}$ 範圍內之根之個數，則

① $g_{K2}(N\lambda)=\begin{cases}4N & \text{當}K>1\\3N & \text{當}K=1\\2N & \text{當}0<K<1\end{cases}$

② $g_{K3}(N\lambda)=\begin{cases}6N & \text{當}K\geq\frac{1}{2}\\2N & \text{當}0<K<\frac{1}{2}\end{cases}$

③ $g_{K4}(N\lambda)=\begin{cases}8N & \text{當}K>1\\7N & \text{當}K=1\\6N & \text{當}\frac{\sqrt{2}}{2}<K<1\\4N & \text{當}K=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

$$\left\lfloor 2N \quad 當\ 0<K<\frac{\sqrt{2}}{2}\right.$$

④ $g_{K5}(N\lambda)=\begin{cases} 10N & 當\ \cos\frac{\pi}{5}<K<1 \\ 6N & 當\ K=\cos\frac{\pi}{5} \\ 2N & 當\ 0<K<\cos\frac{\pi}{5} \end{cases}$

⑤ $g_{K6}(N\lambda)=\begin{matrix} 12N & 當\ K>1 \\ 11N & 當\ K=1 \\ 10N & 當\ \frac{\sqrt{3}}{2}<K<1 \\ 8N & 當\ K=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 6N & 當\ \frac{1}{2}<K<\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 4N & 當\ K=\frac{1}{2} \\ 2N & 當\ 0<K<\frac{1}{2} \end{matrix}$

11.取二不同程式之運動：

①取一固定圓板A，圓心固定在原點，另一活動圓板B半徑為圓板A之$\frac{1}{r}$，圓板B繞圓板A每λ秒繞一圈（指圓心而言）研究圓板B上一定點F之與y軸之交會時間。

②取二彈簧L與L′當 $t=0$ 時，P在最高點，P′在最低點，令L′之週期與振幅皆為L之$\frac{1}{r+1}$倍，考慮P與P′之相遇過（即等高）。

我們可以發覺該二程式之運動，其實爲“同步”運動，即相會之時間完全吻合，故解決二圓板之滾動亦可以以方程式 $\cos\theta + K\cos M\theta = 0$ 來解釋。

六、今後之展望：

本研究報告，開始從一個點繞圓作等速圓周運動開始著眼，談到此點在直綫上之投影所表現出來之結果（即爲簡諧運動），再說一個點在數學上常被看成一個點圓（半徑爲0，爲圓之退化），因此使我們聯想到點繞圓周運動變成圓繞圓周運動，此運動在本文第四節當中曾約略的討論到，該觀念就數學觀念發展而言。從第四節中我們知F之位置函數爲 $F(x,y)=((r+1)\cos\theta+\cos(r+1)\theta,\ (r+1)\sin\theta+\sin(r+1)\theta)$。如同我們討論F過固定點之時間，F之軌跡，與F距離原點最遠，最近時之時間與位置，而要使所提出來的觀念一一得到答覆，必須引用微積分的觀念，此不在高中數學之範圍，因此我們不再繼續討論下去，而就其物理觀念的發展而言。在第四節中所提到的圓板B繞圓板A滾動，其實也可以看成圓板B之中心，繞原點在軌道 $x^2+y^2=(r+1)^2$ 上運動，而圓板本身又繞其中心C旋轉，此現象在天體運動上，一行星繞一恒星公轉，而行星本身又繞其中心自轉之現象極爲接近，因此若能按本文研究方向，將公轉軌道修正成橢圓（圓其實爲橢圓之特例），再修正其質量中心，繼續作較深入的探討，我們或許可以引用數學方法給天體運動作一合理的解釋，而天體上之一些現象諸如行星上一定點何時與恒星最近？何時最遠？最近與最遠的距離若干等問題，也可以引用坐標、三角函數等觀念得到相當接近的答案。