由截痕及不變量來探討二元二次函數之極值

高中組數學第三名

省立新竹女子高級中學

作　　者：林秋妹・劉瑞貞
韓亞玲・袁慧卿

指導老師：鄭淸揚・張瑞欽

一、前　　言：

我們知一元二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$，一定有極值，當 $a>0$ 時，$f(x)$ 有極小值爲 $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$，$a<0$ 時 $f(x)$ 有極大值爲 $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$，如果再增加一個變數即二元二次函數，$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ 是否與一元二次函數相同一定有極值？若有，其值爲何？現在我們利用二元二次方程式圖形之討論及旋轉不變量對此問題做一個探討。

二、本　　文：

(一)二次函數 $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$，首先考慮　$b=0$　之情形

1. 若 $ac\neq 0$，$f(x,y)=a\left(x+\dfrac{d}{2a}\right)^2+c\left(y+\dfrac{e}{2c}\right)^2+$

$$\frac{4acf-d^2c-e^2a}{4ac}$$

令 $\delta = b^2 - 4ac \quad \triangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ a & e & 2f \end{vmatrix}$ 得

$$f(x,y) = a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + c\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 - \frac{\triangle}{\delta}$$

今考慮 $z = f(x,y) = a\left(x + \frac{d}{2a}\right) + c\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2$

$$- \frac{\triangle}{\delta} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$z = k \quad k \in R \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

得 $a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + c\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 = k - \left(-\frac{\triangle}{\delta}\right)$

考慮此二次方程式之圖形

(1) $ac > 0$ 時

(i) $a > 0$ ， $c > 0$ 時

(a) 當 $k > -\frac{\triangle}{\delta}$ 時，截痕爲橢圓或圓

①若 $a \neq c$ 截痕爲橢圓。

1. 方程式：$\dfrac{\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2}{\frac{k + \frac{\triangle}{\delta}}{a}} + \dfrac{\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2}{\frac{k + \frac{\triangle}{\delta}}{c}} = 1$

2. 中心 $\left(-\frac{d}{2a}, -\frac{e}{2c}, k\right)$

3. 四頂點 $\left(-\frac{d}{2a} \pm \sqrt{\frac{k + \frac{\triangle}{\delta}}{a}}, -\frac{e}{2c}, k\right)$，

$$\left(-\frac{d}{2a},\ -\frac{e}{ac}\pm\sqrt{\frac{k+\frac{\triangle}{\delta}}{c}},\ k\right)$$

4. 兩軸長分別爲 $2\sqrt{\dfrac{k+\frac{\triangle}{\delta}}{a}}$，$2\sqrt{\dfrac{k+\frac{\triangle}{\delta}}{c}}$

但若僅知與平面 $z=k$ 之截痕爲一橢圓，對實際上畫圖仍有困難，因此我們對每個截痕的中心軌跡及頂點軌跡軸長之變化做更進一步之探討。

1. 中心軌跡在過點 $\left(-\frac{d}{2a},-\frac{e}{2c},-\frac{\triangle}{\delta}\right)$ 且與 xy 平面垂直之直線上爲一半線。

2. 四頂點之軌跡爲兩拋物線

$$\begin{cases} y=-\dfrac{e}{2c} \\ \left(x+\dfrac{d}{2a}\right)^2=\dfrac{1}{a}\left(z+\dfrac{\triangle}{\delta}\right) \end{cases}$$

另一爲

$$\begin{cases} x=-\dfrac{d}{2a} \\ \left(y+\dfrac{e}{2c}\right)^2=\dfrac{1}{c}\left(z+\dfrac{\triangle}{\delta}\right) \end{cases}$$

3. 當截平面 $z=k$ 愈高，即 k 值愈大，所截出之橢圓愈大，k 愈接近 $-\frac{\triangle}{\delta}$，所截出之橢圓愈小。

4. 當 $a>c$ 時截痕之離心率爲 $\sqrt{1-\frac{c}{a}}$，$a<c$ 時爲 $\sqrt{1-\frac{a}{c}}$ 截出橢圓之離心率皆相同，即每個截痕均相似。

(2)若 $a = c$，截痕爲爲一圓中心坐標 $\left(-\frac{d}{2a}, -\frac{e}{2c}, k\right)$ 半徑 $=\sqrt{\frac{k+\frac{\triangle}{\delta}}{a}}$

(b)當 $k = -\frac{\triangle}{\delta}$ 時截痕爲一點坐標 $\left(-\frac{d}{2a}, -\frac{e}{2c}, -\frac{\triangle}{\delta}\right)$

(c)當 $k < -\frac{\triangle}{\delta}$ 時無截痕

例 1：二次函數 $z = \frac{1}{4}x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x + 4y + \frac{29}{4}$

（取 $a = \frac{1}{4}$，$b = 0$，$c = 1$，$d = -\frac{1}{2}$，$e = 4$，$\delta = \frac{29}{4}$）

①考慮 $z = \frac{1}{4}x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x + 4y + \frac{29}{4}$

$z = k \quad k \in R$ 　得

$$\frac{1}{4}(x-1)^2 + (y+2)^2 = k - 3$$

(a) $k > 3$ 時截痕爲橢圓方程式爲 $\frac{(x-1)^2}{4(k-3)} + \frac{(y+2)^2}{k-3} = 1$

中心 $(1, -2, k)$，頂點 $(1 \pm 2\sqrt{k-3}, -2, k)$，$(1, -2 \pm \sqrt{k-3}, k)$

頂點之軌跡爲兩拋物線

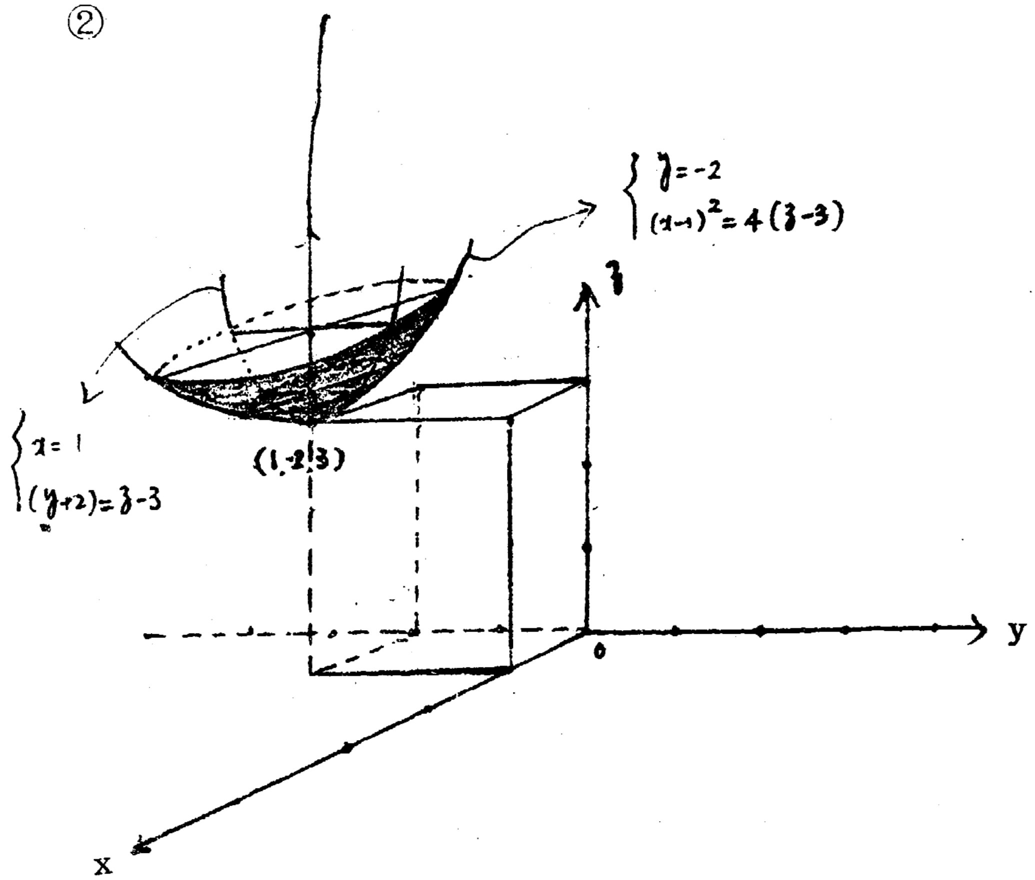
$\begin{cases} y = -2 \\ (x-1)^2 = 4(z-3) \end{cases}$，$\begin{cases} x = 1 \\ (a+2)^2 = z-3 \end{cases}$

(b) $k = 3$ 時截痕爲一點 $(1, -2, 3)$ 此爲圖形之

最低點。

(c) $k < 3$ 時無截痕

②



綜合(a)(b)(c)我們知

當 $b = c$. $a > 0$, $c > 0$ 時二次函數 $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ 有下列性質：

1. 圖形像鍋子（如例 1 ）開口向上（開口之形狀由 a ， c 決定）。

2. 點 $\left(-\frac{d}{2a}, -\frac{e}{2c}, -\frac{\triangle}{\delta}\right)$ 為圖形之最低點。

3. 當 $x = -\frac{d}{2a}$ ， $y = -\frac{e}{2c}$ 時 $f(x,y)$ 有最小值為

$$\frac{4acf - d^2c - e^2a}{4ac}$$

(ii)當 $a < 0$ ， $c < 0$ 時仿(i)之討論，我們得

$f(x,y) = ax^2 + cy^2 + dx + ey + f$

①圖形像鍋子，開口向下（開口之形狀由 a,c 決定）。

②點（$-\frac{d}{2a}$，$-\frac{e}{2c}$，$-\frac{\triangle}{\delta}$）爲圖形之最高點。

③當 $x=-\frac{d}{2a}$　$y=-\frac{e}{2c}$ 時 $f(x,y)$ 有最大值爲

$$\frac{4acf-d^2c-e^2a}{4ac}$$

(2) $ac<0$ 時（分爲 $a<0$，$c>0$ 及 $a>0$，$c<0$ 兩情形討論）

(i) $a<0$，$c>0$ 時

截痕之方程式爲 $a\left(x+\frac{d}{2a}\right)^2+c\left(y+\frac{e}{2c}\right)^2=k-\left(\frac{\triangle}{\delta}\right)$　$k\in R$

(a)當 $k>-\frac{\triangle}{\delta}$ 時截痕爲雙曲線方程式爲

$$-\frac{\left(x+\frac{d}{2a}\right)^2}{\frac{k+\frac{\triangle}{\delta}}{-a}}+\frac{\left(y+\frac{e}{2c}\right)^2}{\frac{k+\frac{\triangle}{\delta}}{c}}=1$$

中心坐標（$-\frac{d}{2a}$，$-\frac{e}{2c}$，k）

兩頂點坐標（$-\frac{d}{2a}$，$-\frac{e}{2c}\pm\sqrt{\frac{k+\frac{\triangle}{\delta}}{c}}$，$k$）

貫軸長：$2\sqrt{\frac{k+\frac{\triangle}{\delta}}{c}}$

共軛軸長：$2\sqrt{\dfrac{k+\triangle/\delta}{-a}}$ 經更進一步探討得

①中心軌跡在過點$\left(-\dfrac{d}{2a},-\dfrac{e}{2c},\dfrac{\triangle}{\delta}\right)$且與xy平面垂直之直線上爲一半線。

②兩頂點之軌跡爲一拋物線，方程式爲

$$\begin{cases} x=-\dfrac{d}{2a} \\ \left(y+\dfrac{e}{2c}\right)^2=\dfrac{1}{c}\left(z+\dfrac{\triangle}{\delta}\right) \end{cases}$$

③當截面 $z=k$ 愈高，即 k 值愈大所截出之雙曲線兩軸愈長，當 k 愈接近$-\dfrac{\triangle}{\delta}$所截出之雙曲線兩軸愈短。

④每個截痕之離心率皆爲$\sqrt{1-\dfrac{c}{a}}$，即所截出之雙曲線均相似。

⑤請截痕在xy平面上的正射影有共同的漸近線 $a\left(x+\dfrac{d}{2a}\right)^2+c\left(y+\dfrac{e}{2c}\right)^2=0$

(b)當 $k=-\dfrac{\triangle}{\delta}$時截痕爲兩相交直線方程式爲 $a\left(x+\dfrac{d}{2a}\right)^2+c\left(y+\dfrac{e}{2c}\right)^2=0$，交點爲$\left(-\dfrac{d}{2a},-\dfrac{e}{2c},-\dfrac{\triangle}{\delta}\right)$。

(c)當 $k<-\dfrac{\triangle}{z}$時截痕爲雙曲線方程式爲

$$\frac{\left(x+\frac{d}{2a}\right)^2}{\frac{k+\frac{\triangle}{\delta}}{a}}-\frac{\left(a+\frac{e}{2c}\right)^2}{\frac{k+\frac{\triangle}{\delta}}{c}}=1$$

此截痕有下列諸性質：

①中心軌跡在過點 $\left(-\frac{d}{2a},-\frac{e}{2c},-\frac{\triangle}{\delta}\right)$ 且與 xy 平面垂直之直線爲一半線。

②兩頂點軌跡爲一拋物線方程式爲

$$\begin{cases} y=-\frac{e}{2c} \\ \left(x+\frac{d}{2a}\right)^2=\frac{1}{a}\left(z+\frac{\triangle}{\delta}\right) \end{cases}$$

③當截平面 $z=k$ 愈低，即 k 值愈小，所截出之雙曲線，兩軸愈長，k 愈接近 $-\frac{\triangle}{\delta}$ 所截出雙曲線兩軸愈短。

④每個截痕之離心率皆爲 $\sqrt{1-\frac{a}{c}}$，即所截出之雙曲線均相似。

⑤諸截痕在 xy 平面上之正射影有共同之漸近線

$$a\left(x+\frac{d}{2a}\right)^2+c\left(y+\frac{e}{2c}\right)^2=0$$

例 2： $z=-x^2+y^2+4x-2y-6$

（取 $a=-1$，$b=0$，$c=1$，$d=4$，$e=-2$，$f=-6$）

考慮 $\begin{cases} z=-x^2+y^2+4x-2y-6 \\ z=k \quad k\in R \end{cases}$ 得

$$-(x-2)^2+(y-1)^2=k-(-3)$$

(a) $k > -3$ 截痕爲雙曲線方程式爲 $-\frac{(x-2)^2}{k+3}+\frac{(y-1)^2}{k+3}=1$

中心 $(2,1,k)$，頂點 $(2,1\pm\sqrt{k+3},k)$

頂點軌跡爲一拋物線 $\begin{cases} x=2 \\ (y-1)^2=z+3 \end{cases}$

(b) $k=-3$ 截痕爲相交兩直線方程式爲 $(y-1)^2-(x-2)^2=0$

即 $y=x-1$，$y=-x+3$，交點爲 $(2,1,-3)$

(c) $k<-3$ 截痕爲雙曲線方程式爲

$$\frac{(x-2)^2}{-(k+3)}-\frac{(y-1)^2}{-(k+3)}=1$$

中心 $(2,1,k)$，頂點 $(2\pm\sqrt{-(k+3)},1,k)$

頂點軌跡爲一拋物線 $\begin{cases} y=1 \\ (x-2)^2=-(z+3) \end{cases}$

(ii) $a>0$，$c<0$ 時與 $a<0$，$c>0$ 時相仿

綜合上述我們知，當 $b=0$，$ac<0$ 時

$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$

有下列性質：

①圖形像馬鞍（如例2，圖請見下頁）。

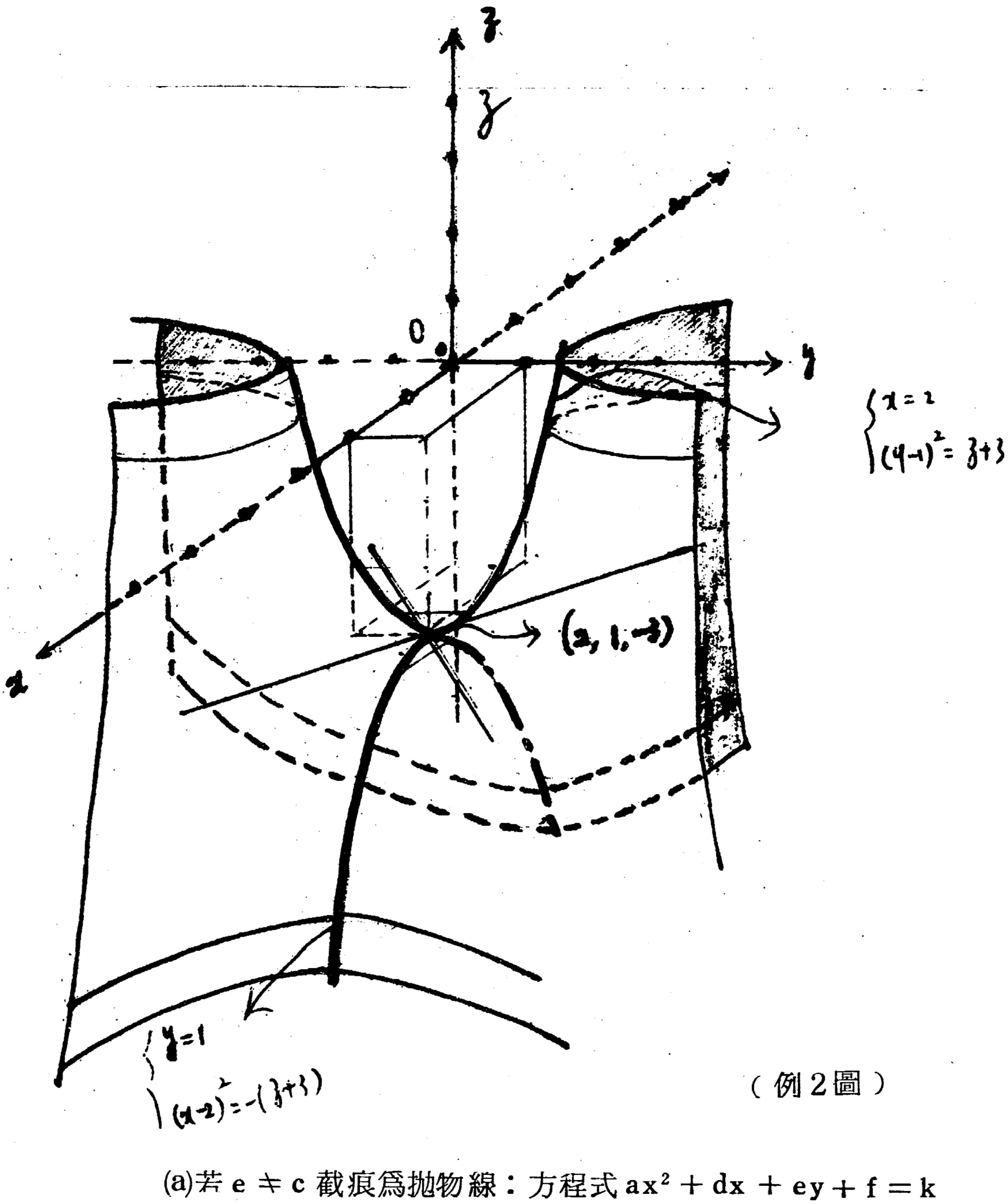
②沒有極大值也沒有極小值。

③鞍點爲 $\left(-\frac{d}{2a}-\frac{e}{2c},\frac{4acf-d^2c-e^2a}{4ac}\right)$

II 若 $ac=0$（分爲 $a>0,c=0$；$a<0$，$c=0$；$a=0$ $c>0$，$a=0$，$c<0$ 四種情形討論）

(1) $a>0$，$c=0$ 時我們考慮二次函數 $z=f(x,y)=ax^2+dx+ey+f$ 與平面 $z=k$。$k\in R$ 之截痕

$ax^2+ax+ey+f=k$



（例2圖）

(a)若 $e \neq c$ 截痕爲拋物線：方程式 $ax^2 + dx + ey + f = k$

經由配方整理得

$$\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 = -\frac{e}{a}\left[\, y - \left(\frac{d^2 - 4af}{4ac} + \frac{k}{e}\right)\right]$$

頂點 $\left(-\frac{d}{2a},\ \frac{d^2 - 4af}{4ae} + \frac{k}{e},\ k\right)$，正焦弦長 $\left|\frac{e}{a}\right|$

截痕有下列性質：

①頂點軌跡為一直線 $\begin{cases} x = -\dfrac{d}{2a} \\ z = ey - \dfrac{d^2 - 4af}{4a} \end{cases}$

e 決定直線傾斜情形。

②每個截痕正焦弦長皆為 $\left|\dfrac{e}{a}\right|$ 即截出之每個拋物線

例 3： $z = x^2 - ex + 2y + 2$

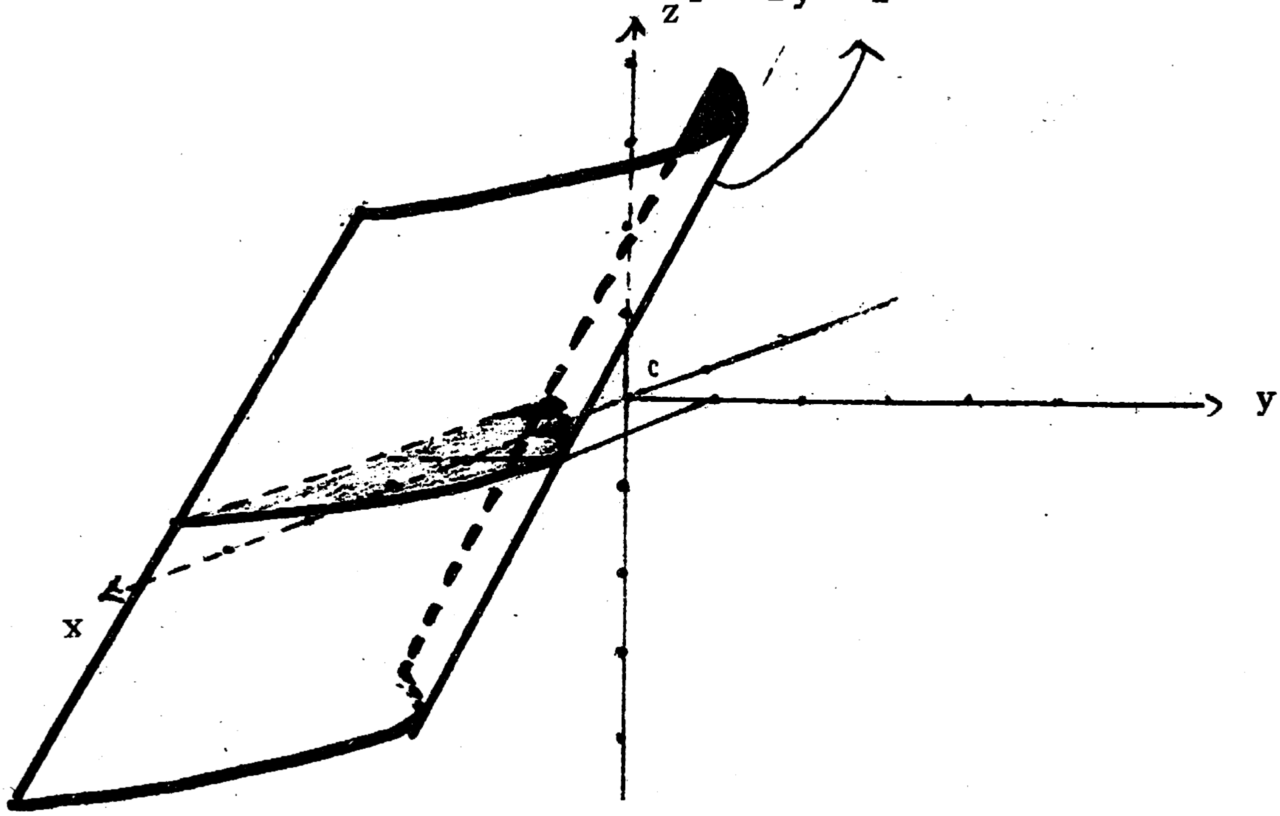
（取 $a=1$，$b=0$；$c=0$，$d=-4$；$e=2$，$f=2$）

考慮 $\begin{cases} z = x^2 - 4x + 2y + 2 \\ z = k \quad k \in R \end{cases}$ 得 $(x-2)^2 + 2(y-1) = k$

$k \in R$ 截痕均為拋物線，方程式為 $(x-2)^2 = -2\left[y - \left(1 + \dfrac{k}{2}\right)\right]$

頂點 $\left(2, 1 + \dfrac{k}{2}, k\right)$ 正焦弦長 $= 2$

頂點軌跡為一直線方程式為 $\begin{cases} x = 2 \\ z = 2y - 2 \end{cases}$



(i)若 $e=0$ 截痕方程式爲 $ax^2+ax+f=k$ 經由配方整理得

$$a\left(x+\frac{d}{2a}\right)^2=k-\frac{4af-d^2}{4a}$$

(a)當 $k>\dfrac{4af-d^2}{4a}$ 時截痕爲兩平行線

(b)當 $k=\dfrac{4af-d^2}{4a}$ 時截痕爲一直線

(c)當 $k<\dfrac{4af-d^2}{4a}$ 時無截痕

由 $z=ax^2+dx+f$ 與 $z=k$ 之截痕還不能很明確結出 $z=ax^2+dx+f$ 之圖形。我們再考慮 $z=ax^2+dx+f$ 與平面 $y=k$ 之截痕，我們知不論 k 爲何值，截痕恒爲拋物線，$z=ax^2+dx+f$，其頂點軌跡爲一與 xy 平面平行之直線

即 $x=-\dfrac{d}{2a}$ 與 $z=\dfrac{4af-d^2}{4a}$ 兩平面之交線

例 4：$z=x^2-2x+3$

（取 $a=1$，$b=0$；$c=0$，$d=-2$；$e=0$，$f=3$）

1. 考慮 $\begin{cases} z=x^2-2x+3 \\ z=k \quad k\in R \end{cases}$ 得 $(x-1)^2=k-2$

(a) $k>2$ 截痕爲兩平行線。

(b) $k=2$ 截痕爲一直線。

(c) $k<2$ 無截痕

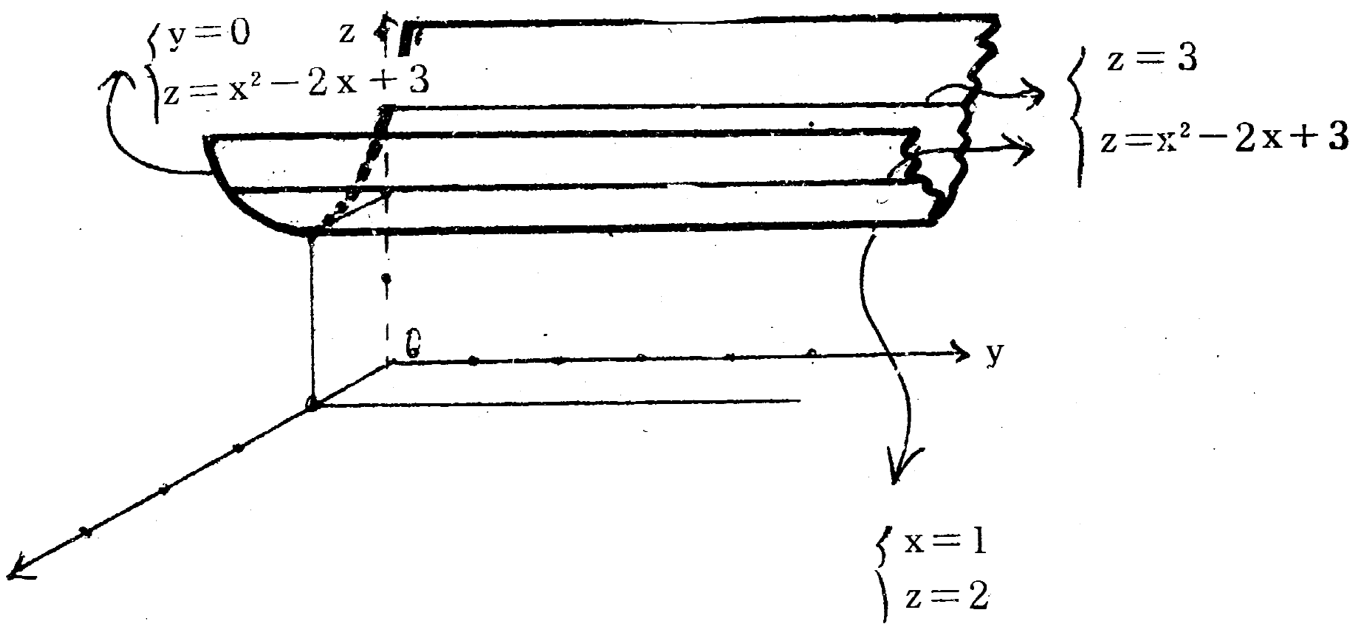
2. 再考慮 $z=x^2-2x+3$

$y=k \quad k\in R$

我們知 $k\in R$ 截痕恒爲拋物線 $z=x^2-2x+3$

頂點 $(1, k, 2)$

頂點軌跡爲一直線 $\begin{cases} x=1 \\ z=2 \end{cases}$



綜合上述我們知，當 $a>0$ ，$b=0$ ，$c=0$ 時二次函數 $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ 有下列性質：

①圖形像排水槽

②當 $e\neq 0$ 時槽底傾斜（如例3）函數 $z=f(x,y)$ 無極值

③當 $e=0$ 時槽底與 xy 平面平行且在下方（如例4）函數 $z=f(x,y)$ 有極小值 $\dfrac{4af-d^2}{4a}$

(2)當 $a<0$ ，$b=0$ ，$c=0$ 時仿(1)討論，我們得 $z=f(x,y)$ 有下列性質：

①圖形像排水槽

②當 $e\neq 0$ 時槽底傾斜，函數 $z=f(x,y)$ 無極值

③當 $e=0$ 時槽底與 xy 平面平行，且在上方函數 $z=f(x,y)$ 有極大值 $\dfrac{4af-d^2}{4a}$

(3)當 $a=0$ ，$b=0$ ，$c\neq 0$ 時，仿(1)(2)之討論，我們知函數 $z=f(x,y)=cy^2+dx+ey+f$ 有下列性質：

①圖形像排水槽

②當 $a=0$ ，$c>0$ 時

$$\begin{cases} \text{若 } d \neq 0 \text{ ， } f(x,y) \text{ 無極值} \\ \text{若 } d = 0 \quad f(x,y) \text{ 有極小值爲 } \dfrac{4cf - e^2}{4c} \end{cases}$$

③當 $a = 0$ ， $c < 0$ 時

$$\begin{cases} \text{若 } d \neq 0 \quad f(x,y) \text{ 無極值} \\ \text{若 } d = 0 \quad f(x,y) \text{ 有極大值爲 } \dfrac{4cf - e^2}{4c} \end{cases}$$

甲段總結：

當 $b = 0$ 時，關於二次函數 $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ 之極值有如下之結論：

(一) $ac > 0$（曲面像鍋子）

(1) $a > 0$ ， $c > 0$ ：開口朝上， $f(x,y)$ 有極小值

$$\frac{4acf - d^2c - e^2a}{4ac}$$

(2) $a < 0$ ， $c < 0$ ：開口朝下， $f(x,y)$ 有極大值

$$\frac{4acf - d^2c - e^2a}{4ac}$$

(二) $ac < 0$（曲面像馬鞍）

(1) $f(x,y)$ 無極值

(2)鞍點坐標 $\left(-\dfrac{d}{2a}, -\dfrac{e}{2c}, \dfrac{4acf - d^2c - e^2a}{4ac} \right)$

$b = 0$

(三) $ac = 0$（曲面像排水槽）

(1) $a > 0$ ， $c = 0$

① $e \neq 0$ 　 $f(x,y)$ 無極值

② $e = 0$ 　 $f(x,y)$ 極小值爲 $\dfrac{4af - d^2}{4a}$

(2) $a < 0$ ， $c = 0$

① $e \neq 0$ 　 $f(x,y)$ 無極值

② $e=0$　$f(x,y)$ 極大值爲 $\dfrac{4af-d^2}{4a}$

(3) $a=0$，$c>0$

① $d\neq 0$　$f(x,y)$ 無極值

② $d=0$　$f(x,y)$ 極小值爲 $\dfrac{4cf-e^2}{4c}$

(4) $a=0$，$c<0$

① $d\neq 0$　$f(x,y)$ 無極值

② $d=0$　$f(x,y)$ 極大值爲 $\dfrac{4cf-e^2}{4c}$

乙、二次函數 $z=f(x,v)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$，若 $b\neq 0$ 時，我們可以利用正交坐標變化將坐標軸做適當的旋轉，使新的二次函數不含 xy 項，現在我們逐步說明如下：

(一)在正交坐標系 $\epsilon_0\equiv(0, e_1, e_2, e_3)$ 中二次函數 $z=f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$，其中 $b\neq 0$，設其函數曲面爲T，現固定子軸將坐標系旋轉角度 θ，得一新坐標系 $\epsilon\equiv(0, e_1', e_2', e_3')$ 其中

$e_1'=\cos\theta e_1+\sin\theta e_2$　　$e_2'=-\sin\theta e_1+\cos\theta e_2$

$e_3'=e_3$

點 r 相關於 ϵ_0 之坐標爲 (x, y, z)，相關於 ϵ 之坐標爲 (x', y', z') 經運算可得 $x=x'\cos\theta-y'\sin\theta$，$y=x'\sin\theta-y'\cos\theta$，$z=z'$ 將其代入 $z=f(x,y)$ 中得 $z'=f(x',y')=a'x'^2+b'x'y'+c'y'^2+d'x'+e'y'+f'$ 即曲面T在坐標系 $\epsilon\equiv(0, e_1', e_2', e_3')$ 中與二次函數 $z'=f(x', y')$ 相對應，其中

$a'=a\cos 2\theta+b\sin\theta\cos\theta+c\sin^2\theta$

$b'=b\cos 2\theta+(c-a)\sin 2\theta$

$c'=a\sin^2\theta-b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta$

$d'=d\,\mathrm{eos}\,\theta+e\sin\theta$

$e'=e\cos\theta-d\sin\theta$　　　$f'=f$

(b) $\because\ \delta = 0^2 - 4a'c'$ $\quad \triangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2a' & 0 & d' \\ 0 & 2c' & e' \\ d' & e' & 2f' \end{vmatrix}$

$$= 4a'c'f' - d'^2c' - e'^2a'$$

$$\therefore \frac{4a'c'f' - d'^2c' - e'^2a'}{4a'c'} = -\frac{\triangle}{\delta}$$

(3)其他情形可仿此討論。

(2) $\delta = 0$ 時，曲面像排水槽

(a) $\triangle \neq 0$ 時槽底傾斜函數 $z = f(x,y)$ 無極值

(b) $\triangle = 0$ 時

① $H > 0$ 槽底與 xy 平面平行

函數 $z = f(x,y)$ 有極小值 $\frac{4H\delta - w}{4H}$

② $H < 0$ 槽底與 xy 平面平行

函數 $z = f(x,y)$ 有極大值 $\frac{4H\delta - w}{4H}$

說明：由甲段總結，我們知 $z = a'x'^2 + c'y'^2 + d'x' + e'y' + f'$

(1)當 $a'c' = 0$ 時，曲面像排水槽

但 $\delta = 0^2 - 4a'c'$ $\quad \therefore a'c' = 0 \Leftrightarrow \delta = 0$

(2)當 $a' \neq 0$ ， $c' = 0$ ， $e' \neq 0$ or $a' = 0$ ， $c' \neq 0$ ， $d' \neq 0$

時無極值

在 $\delta = 0$ 之條件下（即 $a'c' = 0$ ）

$$\triangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2a' & 0 & d' \\ 0 & 2c' & e' \\ d' & e' & 2f' \end{vmatrix} = 4a'c'f' - d'^2c' - e'^2a'$$

$$= d'^2c' - e'^2a'$$

$\therefore a' \neq 0$ ， $c' = 0$ ， $e' \neq 0$ or $a' = 0$ ， $c' \neq 0$ ， $d' \neq 0$

$\Leftrightarrow \triangle \neq 0$

(3)當 $a' \neq 0$ ， $c' = 0$ ， $e' = 0$ or $a' = 0$ ， $c' \neq 0$ ， $d' = 0$

時有極值

令$H=a+c$　　$\delta=b^2-4ac$　　$\triangle=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2a & b & d\\ b & 2c & e\\ d & e & 2f\end{vmatrix}$

$w=d^2+e^2$

$H'=a'+c'$　　$\delta'=b'^2-4a'c'$

$\triangle'=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2a' & b' & d'\\ b' & 2c' & e'\\ a' & e' & 2f'\end{vmatrix}$　　$w'=d'^2+e'^2$

經演算後可得下列結果

①若θ滿足$\cot 2\theta=\frac{a-c}{b}$　則$b'=0$

②$H=H'$，$\delta=\delta'$，$\triangle=\triangle'$，$w=w'$　此四量我們稱旋轉不變量。

(二)現在我們知道一個二次函數$z=f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$中，若$b\neq 0$時固定z軸將x，y軸旋轉$\theta$得到$z'=f(x',y')=a'x'^2+c'y'^2+a'x'+e'y'+f'$的形式，其中角$\theta$滿足$\cot 2\theta=\frac{a-c}{b}$，且$z=z'$。

由甲段之討論我們知，二次函數$z'=f(x',y')$在新坐標系中之曲面仍爲鍋子、馬鞍、排水槽三類也即當$b\neq 0$時，$z=f(x,y=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$之曲面也爲鍋子、馬鞍、排水槽三類。

現在我們的目的，在於想從旋轉不變量H，δ，$\triangle$，w直接判定二次函數$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$，當$b\neq 0$時極值存在否？若存在，其值爲何？現在考慮

$\xi_0\equiv(0, e_1, e_2, e_3)$中二次函數$z=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$（$b\neq 0$）所對應之曲面T，現固定z軸，將x

，y 軸旋轉 θ ，θ 滿足 $\cot 2\theta = \frac{a-c}{b}$ 得一新坐標系 $\xi \equiv ($ 0 ，e_1' ，e_2' ，e_3' ）曲面T在 ξ 中所對應之方程式為

$z = a'x'^2 + c'y' + d'x' + e'y' + f'$　　我們知

$H = a + c = a' + c'$　　$\delta = b^2 - 4ac = a^2 - 4a'c'$

$$\triangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2f \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2a' & 0 & d' \\ 0 & 2c' & e' \\ d' & e' & 2f' \end{vmatrix}$$

$= 4a'c'f' - d'^2c' - e'a'$

$w = d^2 + e^2 = d'^2 + e'^2$

綜合以上所述，關於二次函數 $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ ，有如下之總結：

(1) $\delta < 0$（曲面像鍋子）

(a) $H > 0$ 時開口朝上，函數 $z = f(x,y)$ 有極小值 $-\frac{\triangle}{\delta}$

(b) $H < 0$ 時開口朝下，函數 $z = f(x,y)$ 有極大值 $-\frac{\triangle}{\delta}$

說明：由甲段總結我們知 $z = a'x'^2 + c'y'^2 + d'x' + e'y' + f'$

(1)當 $a'c' > 0$ 時函數，圖形像鍋子　$\because a'c' > 0$　$\therefore -4a'c' < 0$　但 $-4a'c' = \delta$　$\therefore a'c' > 0 \Leftrightarrow \delta < 0$

(2)當 $a' > 0$ ，$c' > 0$ 時，　z 之極小值為 $\frac{4a'c'f' - d'^2c' - e'^2a'}{4a'c'}$

(a) $\because a' > 0$ ，$c' > 0$

$\therefore a' + c' > 0$　但 $a' + c' = H$　$\therefore H > 0$

$\therefore$ 在 $\delta < 0$ 之條件 $a' + c' > 0 \Leftrightarrow H > 0$

$a'c' > 0$

(a)仿(2)，在 $\delta=0$ 之條件下

$a'\neq 0$，$c'=0$，$e'=0$ or $a'=0$，$c'\neq 0$，$d'=0 \Leftrightarrow \triangle=0$

(b)當 $a'>0$，$c'=0$，$e'=0$ or $a'=0$，$c'>0$，

$d'=0$ 有極小值爲 $\dfrac{4a'f'-d'^2}{4a'}$，$\dfrac{4c'f'-e'^2}{4c'}$

(i) $\because H=a'+c'$　若 $a'=0$　則 $H=c'$

若 $c'=0$　則 $H=a'$

$\therefore$ 在 $\triangle=0$ 之條件下

$a'>0$，$c'=0$，$e'=0$ or $a'=0$，$c'>0$，$d'=0$

$H>0$

(ii)①若 $a'>0$，$c'=0$，$e'=0$

又 $H=a'+c'$　$w=d'^2+e'^2$　$f=f'$　則

$$\frac{4a'f'-d'^2}{4a'}=\frac{4Hf-w}{4H}$$

②若 $a'=0$，$c'>0$，$d'=0$

又 $H=a'+c'$　$w=d'^2+e'^2$　$f=f'$　則

$$\frac{4c'f'-e'^2}{4c'}=\frac{4Hf-w}{4H}$$

(c)其他情形可仿此討論。

(3) $\delta>0$ 時，曲面像馬鞍，鞍點之高度爲 $-\dfrac{\triangle}{\delta}$

函數 $z=f(x,y)$ 無極值（說明仿上）

三、結　　語：

利用平面之截痕及旋轉不變量我們能完全掌握二元二次函數，並由於二元二次函數一次項係數平方和旋轉後仍爲一不變量，此 w 之導出，我們可以很完整地寫出二元二次函數極值之結論。對於沒學過微積分的我們，也提供了求二元二次函數極值的一條路徑。