根的同次冪之和與係數的關係

高中組數學第二名

臺灣省立高雄高級中學　　作　　者：陳　英　夆
指導老師：林　文　東

一、前　　言：

在一元 n 次方程式中，其根與係數存在一種密切的關係。

例如：若一元三次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之三根 $\alpha\ \beta\ \gamma$

則　$\alpha+\beta+\gamma=-p$　$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q$　$\alpha\beta\gamma=-r$

這些都是根與係數的基本關係式。由於對稱式基本定理「每一個對稱式皆可表爲基本對稱式之多項式」（證明請參閱高中數學實驗教材自然組第六册第 96 項）所以我們可以將根之任何對稱式表成其係數之關係。

譬如(1) $\Sigma\alpha^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

$$=(\Sigma\alpha)^2-2\Sigma\alpha\beta$$

$$=p^2-2q$$

(2) $\Sigma\alpha^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$$=(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)+3\alpha\beta\gamma$$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$$

$$=\Sigma\alpha\,[(\Sigma\alpha)^2-2\Sigma\alpha\beta-\Sigma\alpha\beta]+3\alpha\beta\gamma$$

$$=(\Sigma\alpha)^3-3\Sigma\alpha\,\Sigma\alpha\beta+3\alpha\beta\gamma$$

$$=-p^3+3pq-3r$$

(3)因 $\Sigma\alpha\ \Sigma\alpha^2=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$

$$= \Sigma \alpha^3 + \Sigma \alpha \beta^2$$

故 $\Sigma \alpha \beta^2 = \Sigma \alpha \, \Sigma \alpha^2 - \Sigma \alpha^3$

$$= (-p)(p^2 - 2q) - (-p^3 + 3pq - 3r)$$

$$= -pq + 3r$$

由上述得知，一般言：$\Sigma \alpha^m \beta^m = \Sigma \alpha^m \, \Sigma (\alpha)^n - \Sigma \alpha^{m+n}$ ($m \neq n$)。欲求根之對稱式，以係數表示，除須利用根與係數之關係外，尚須利用根的同次冪之和與係數的關係。本文即在致力於探討根的同次冪之和與係數的關係。

二、三次方程式之根的同次冪和

今欲求一元 n 次方程式之根的同次冪和與係數之關係，先由三次方程式討論之：

設 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 之三根爲 α，β，γ，則

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \cdots\cdots\cdots ①$$

取 $y = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ $\left(\frac{1}{y}\right)^3 + p\left(\frac{1}{y}\right)^2 + q\left(\frac{1}{y}\right) + r$

$$= \left(\frac{1}{y} - \alpha\right)\left(\frac{1}{y} - \beta\right)\left(\frac{1}{y} - \gamma\right)$$

$$f(y) = ry^3 + qy^2 + py + 1 = (1 - \alpha y)(1 - \beta y)(1 - \gamma y)$$

$$f'(y) = 3ry^2 + 2qy + p = (-\alpha)(1 - \beta y)(1 - \gamma y) + (-\beta)(1 - \alpha y)(1 - \gamma y) + (-\gamma)(1 - \alpha y)(1 - \beta y)$$

故 $$\frac{-f'(y)}{f(y)} = \frac{-3ry^2 - 2qy - p}{ry^3 + qy^2 + py + 1} = \frac{\alpha}{1 - \alpha y} + \frac{\beta}{1 - \beta y} + \frac{\gamma}{1 - \gamma y} \cdots\cdots ②$$

依分解因式之公式 $1 - a^m = (1 - a)(1 + a + a^2 + \cdots\cdots + a^{n-1})$ $m \in N$

得 $$\frac{1}{1-a}=1+a+a^2+\cdots\cdots+a^{m-1}+\frac{a^m}{1-a}\cdots\cdots③$$

令 $a=\alpha y$

则 $$\frac{1}{1-\alpha y}=1+\alpha y+\alpha^2y^2+\cdots\cdots+\alpha^{m-1}\ y^{m-1}+\frac{\alpha^m\ y^m}{1-\alpha y}$$

故 $$\frac{\alpha}{1-\alpha y}=\alpha+\alpha^2 y+\alpha^3 y^2+\cdots\cdots+\alpha^m y^{m-1}+\frac{\alpha^{m+1}\ y^m}{1-\alpha y}$$

同理 $$\frac{\beta}{1-\beta y}=\beta+\beta^2 y+\beta^3y^2+\cdots\cdots+\beta^m y^{m-1}+\frac{\beta^{m+1}\ y^m}{1-\beta y}$$

$$\frac{\gamma}{1-\gamma y}=\gamma+\gamma^2y+\gamma^3y^2+\cdots\cdots+\gamma^m y^{m-1}+\frac{\gamma^{m+1}\ y^m}{1-\gamma y}$$

$$\therefore\ \frac{\alpha}{1-\alpha y}+\frac{\beta}{1-\beta y}+\frac{\gamma}{1-\gamma y}=\Sigma\alpha+y\,\Sigma\alpha^2+y^3\Sigma\alpha^3+\cdots\cdots$$

$$+y^{m-1}\Sigma\alpha^m+\frac{\phi\,y^m}{(1-\alpha y)(1-\beta y)(1-\gamma y)}$$

（其中$\phi=\alpha^{m+1}(1-\beta y)(1-\gamma y)+\beta^{m+1}(1-\alpha y)(1-\gamma y)+\gamma^{m+1}(1-\alpha y)(1-\beta y)$）

表 α，β，γ同次幂之和

卽令 $S_k=\Sigma\alpha^k$ （k=1，2，3， m）

则 $$\frac{\alpha}{1-\alpha y}+\frac{\beta}{1-\beta y}+\frac{\gamma}{1-\gamma y}=S_1+S_2y+S_3y^2+\cdots\cdots+$$

$$+S_m y^{m-1}+\frac{\phi\,y^m}{ry^3+qy^2+py+1}\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

另一方面　由(3)式得

$$\frac{1}{1-a}=1+a+a^2+\cdots\cdots+a^{m-1}+\frac{a^m}{1-a}$$

$$=\sum_{t=0}^{m-1} a^t+\frac{a^m}{1-a}$$

令 $a=\ py-qy^2-ry^3$　　代入上式得

$$\frac{1}{1+py+qy^2+ry^3}=\sum_{t=0}^{m-1}(-1)^x(py+qy^2+ry^3)^t$$

$$+\frac{\psi\, y^m}{1+py+qy^2+ry^3}$$

（其中　$\psi=(-p-qy-ry^2)^m$

再由多項式展開定理：

$$(py+qy^2+ry^3)^t=\sum\frac{(i+j+k)!}{i!\,j!\,k!}(py)^i(qy^2)^j(ry^3)^k$$

其中 i，j，k 爲非負之整數，且 $i+j+k=t$

$$\therefore\ \frac{-p-2qy-3ry^2}{1+py+qy^2+ry^3}=(p+2qy+3ry^2)\sum(-1)^{h+1}$$

$$(py+qy^2+ry^3)^t+E$$

$$\text{其中}E=\frac{(-p-2qy-3ry^2)\,4\,y^m}{1+py+qy^2+ry^3}$$

$$=(p+2qy+3ry^2)\sum_{0\leq i+j+k\leq m-1}(-1)^{i+j+k+1}$$

$$(py)^i(qy^2)^j(ry^3)^K\frac{(i+j+k)!}{i!\,j!\,k!}+E$$

$$=(p+2qy+3ry^2)\sum_{0\leq i+j+k\leq m-1}(-1)^{i+j+k+1}$$

$$\frac{(i+j+k)!}{i!\,j!\,k!}p^i q^j r^k y^{i+2j+3k}+E \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

由④式知 y^{m-1} 之係數爲 S_m

由⑤式知 y^{m-1} 之係數爲

$$p\sum_{0\leq i-j+k\leq m-1}(-1)^{i+j+k+1}\frac{(i+j+k)!}{i!\,j!\,k!}p^i q^j r^k$$

$$(i+2j+3k=m-1)\cdots\cdots\cdots\cdots\text{ⓐ}$$

$$+2q\sum_{0\leq i+j+k\leq m-1}(-1)^{i+j+k+1}\frac{(i+j+k)!}{i!\,j!\,k!}p^i q^j r^k$$

$$(i+2j+3k-1=m-1)\cdots\cdots\cdots\cdots\text{ⓑ}$$

$$+3r\sum_{0\leq i+j+k\leq m-1}(-1)^{i+j+k+1}\frac{(i+j+k)!}{i!\,j!\,k!}p^i q^j r^k$$

$$(i+2j+3k-2=m-1)\cdots\cdots\cdots\cdots\text{ⓒ}$$

在 ⓐ式中令 $r_1=i+1\qquad r_2=j\qquad r_3=k$

ⓑ式中令 $r_1=i\qquad r_2=j+1\qquad r_3=k$

ⓒ式中令 $r_1=i\qquad r_2=j\qquad r_3=k+1$

則 $$S_m=\sum(-1)^{r1+r2+r3}\frac{(r_1+r_2+r_3-1)!}{(r_1-1)!\,r_2!\,r_3!}p^{r1}q^{r2}r^{r3}$$

$$+2\sum(-1)^{r1+r2+r3}\frac{(r_1+r_2+r_3-1)!}{r_1!\,(r_2-1)!\,r_3!}p^{r1}q^{r2}r^{r3}$$

$$+3\sum(-1)^{r1+r2+r3}\frac{(r_1+r_2+r_3-1)!}{r_1!\,r_2!\,(r_3-1)!}p^{r1}q^{r2}r^{r3}$$

$$\therefore S_m=(r_1+2r_2+3r_3)\sum(-1)^{r1+r2+r3}\frac{(r_1+r_2+r_3-1)!}{r_1!\,r_2!\,r_3!}$$

$$p^{r1}q^{r2}r^{r3}$$

$$=m\Sigma(-1)^{r_1+r_2+r_3}\frac{(r_1+r_2+r_3-1)!}{r_1!\,r_2!\,r_3!}p^{r_1}q^{r_2}r^{r_3}$$

且 $r_1+2r_2+3r_3=m$

舉例：若有一個一元三次方程式

$x^3+C_1x^2+C_2x+C_3=0$ 之三根 α，β，γ

而求 $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$，因 $S_4=\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$ $\therefore r_1+2r_2+3r_3=m$

$\therefore(r_1,r_2,r_3)=(4,0,0)(2,1,0)(1,0,1)$

$(0,2,0)$

$$S_4=4\left[\frac{3!}{4!}(+C_1)^4-\frac{2!}{2!1!0!}(+C_1)^2(+C_2)\right.$$

$$\left.+\frac{1!}{1!1!}(+C_1)(+C_3)+\frac{1!}{2!}C_2^2\right]$$

$$=C_1^4-4C_1^2C_2+4C_1C_3+2C_2^2$$

三、結　論：

由以上三次方程式根與係數之關係的證明，我們可推得一般 n 次方程式 $x^n+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\cdots\cdots+C_n=0$ 之各根同次冪和的公式為

$$S_m=m\Sigma(-1)^{r_1+r_2+\cdots+r_n}\frac{(r_1+r_2+\cdots\cdots+r_{n-1})!}{r_1!\,r_2!\cdots\cdots r_n!}$$

$$C_1^{r_1}C_2^{r_2}\cdots\cdots\cdots C_n^{r_n}$$

其中 r_1 r_2 …… r_n 均為非負之整數，且

$r_1+2r_2+\cdots\cdots+nr_n=m$