九連環的新數理探討

高中組數學第二名

臺北市立中正高級中學　　作　者：陳　建　安
指導老師：潘偉廉・朱俊德

一、前　言：

九連環爲我國古代流傳下來的數學遊戲，其起源可追溯至西元前數百年之久，近年更廣爲流傳，世界各地都有人熱心的操練，並整理出固定的解環技巧，現在我們更以"二進位"記數法對它作更進一步的描述。

二、研究動機：

於偶然機會得一九連環，自此深感興趣，經常操練，慢慢學會其傳統解法，對於有關它的資料亦十分關心，後又自"科學月刊"第五卷第三期中有一專題指出，其解法所須操作次數與"二進位"有關，且指出解出N個環需操作 2^N-1 次，依序操作却發現實際情形與公式不符，如解出九連環只須341次而非 $2^9-1=511$ 次，於是引起想找出它與二進位制的確切關係及正確公式的興趣。

三、九連環及其傳統解法：

九連環的構造如圖㈠。

其玩法有二：一種是將各環由脫離狀態完全套上U形環上，另一種是將已套上的所有環，全部脫離U形環。此兩種玩法正好爲相逆的操作，它的傳統解法是這樣的：

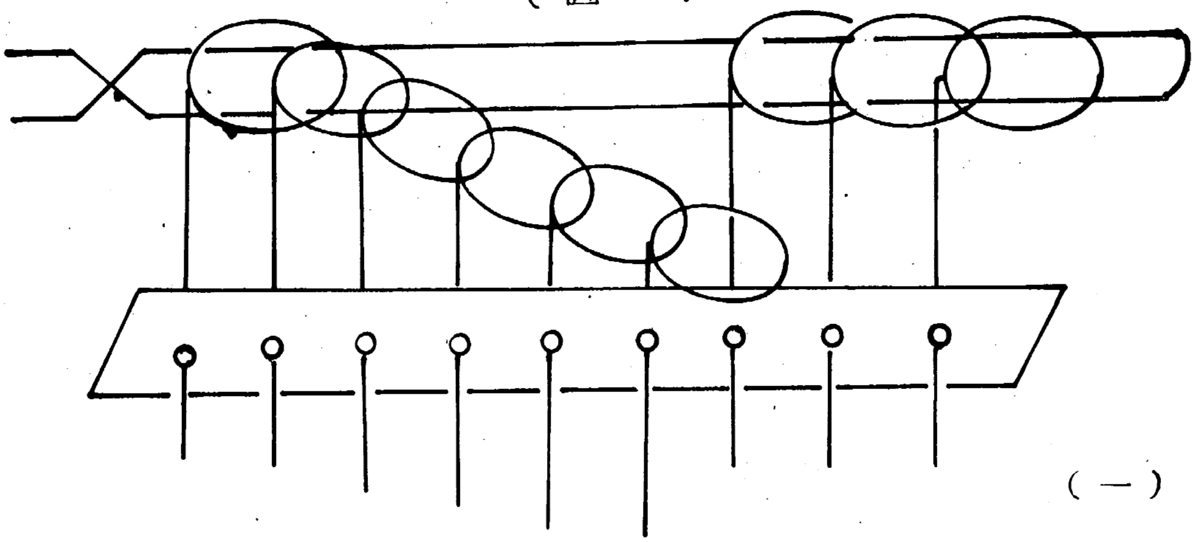
凡欲將環變位（脫離⇄套上）必須滿足下列兩條件：欲變位的環

1 其前一環必須在"套上"之狀態。

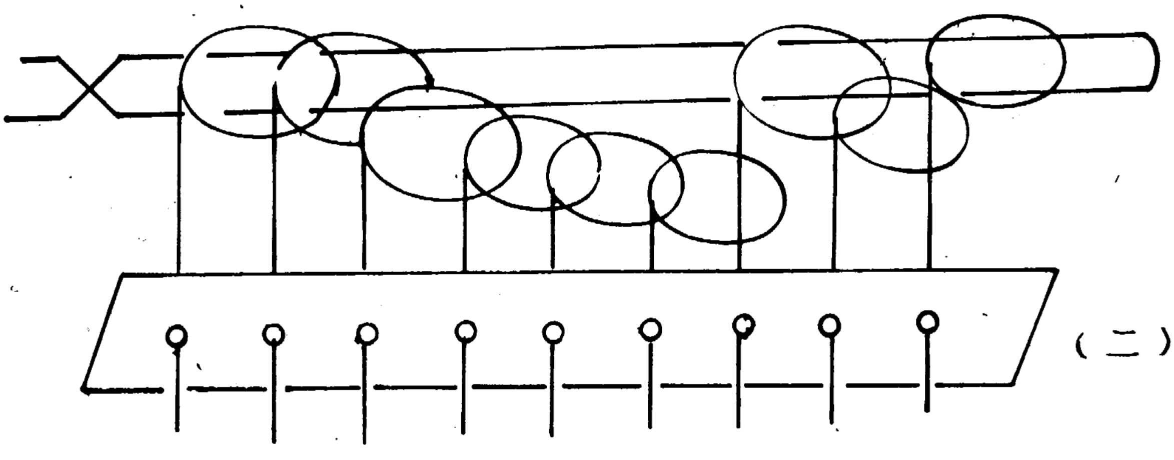
2. 其前第二環及更前的所有環必須在“脫離”狀態。（而一、二環可以一次套上爲例外情形）

參照圖(一)表示由前三環全套上至前四環全套上的操作過程

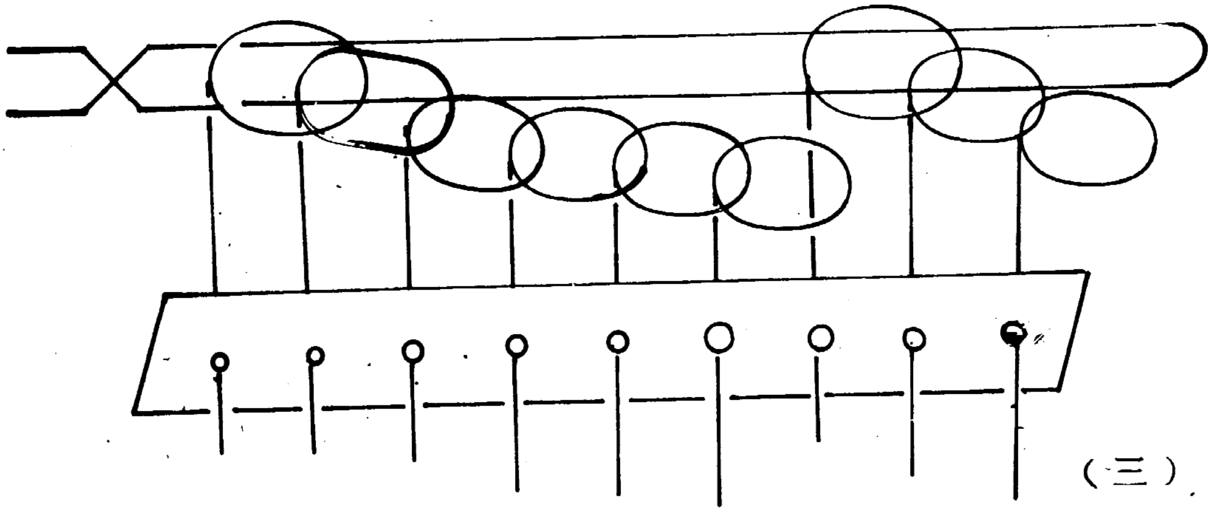
（圖一）



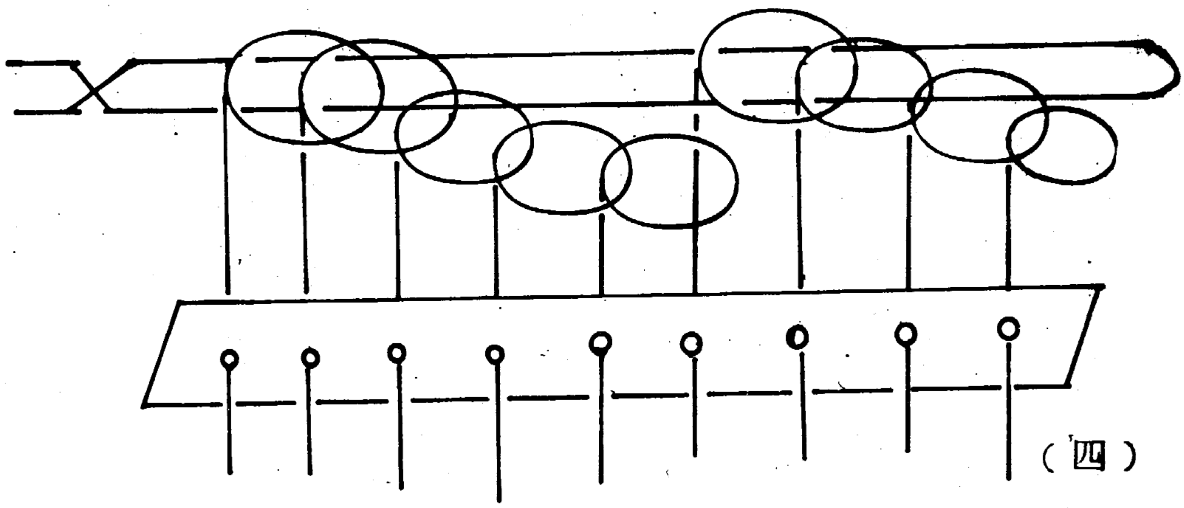
（一）



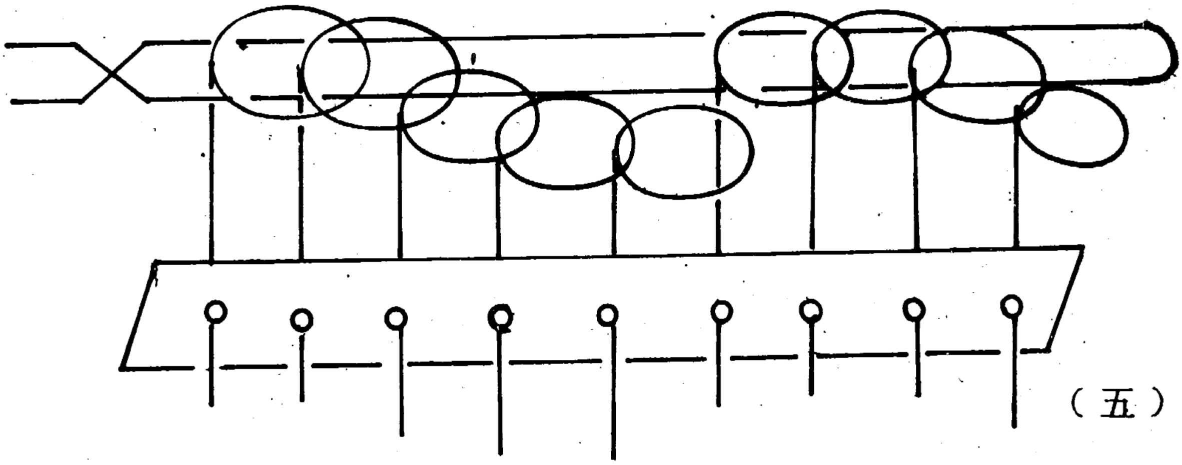
（二）



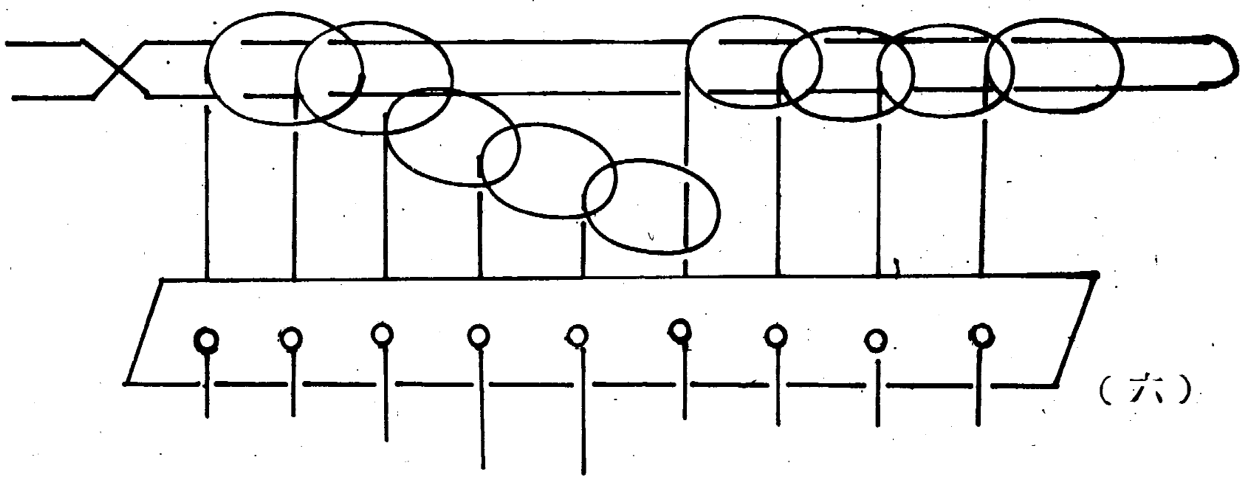
（三）



（四）



（五）



（六）

四、與二進制關係之探討：

我們在高中階段所學的代數部份，除了介紹些代數上基本觀念與方法外；培養我們探討數字間關係，觀察其間結構、法則的能力，也是相當重要的。

比如說，我們可能遇到下面這些問題：

（問題一）

一數列 3，5，5，8，16，20， a，試估計 a 之值使合乎其他數字間關係？

答：本題的關係經仔細觀察發現 $3+2=5$，$5\times1=5$，$5+3=8$，$8\times2=16$，$16+4=20$，知“加”“乘”兩種變化交互出現，「加 2，乘 1，加 3，乘 2，加 4」可見 $a=20\times3=60$

（問題二）

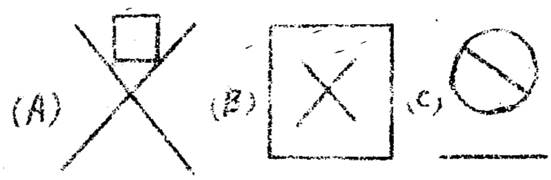
一數列 4，24，120，30，10，20，x。問 x 應爲何值？

答：本題的關係是「乘六，乘五，除四，除三，乘二」可見下一步爲「乘一」，

故 $x=20\times1=20$

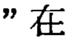
（問題三）

已知(A)(B)(C)三圖爲：



問下一圖該爲何？

答：先探求(A)(B)關係，(1)(A)中較小的正方形在(B)中放大了。(2)(A)中較大的“×”在(B)中縮小後置於正方形內。

故現在我們將  放大後，將其下的一橫縮小後裝入成

這些問題的解法，就全憑觀察力而已。

現在我們就來觀察九連環的操作情形，而試求找出其中之法則。首先，在所有操作過程中，雖有種種變化，而對每一個環總不外乎“脫”與“套”兩種變化而已。這就使我們聯想起二進制記數法了。爲什麼？二進制的原理本來亦不過如我們平日所用的十進制而已。其他還有六進制、八進制等等。

雖然二進制的結構最簡單，運算進位的速度緩慢，但在實用上有時反而更能發揮效用。以電子計算機爲例，就是利用電流控制開關的“開”與“關”，用來配合二進制的“1”與“0”以從事計算。現在九連環亦只有“套”、“脫”與“開”、“關”正好相類似。故很可能與二進制有關。

於是我們逐步操作，先套上第一環，再設法套上第二環，以至套上第一、二、三環………直至一至九環皆套上爲止。其脫與套情形排列成圖二之第一行，註明其對應的操作次數於第二行。最後將次數的二進制表示法，記於第三行。再仔細觀察之，發現九連環與二進制間確實有一種微妙的關係存在。

以第 38 列爲例：九連環爲脫脫套套脫套脫套，因下一步驟的目的在使最右的兩個“脫”換成“套”，故左前三個“脫”可以略去，寫成套套脫套脫套，再將對應時二進制數字排列於其下觀察之，首先我們發現如此記法的最左一定爲“套”而二進制數字最左一定爲“1”故排成

套　套　脫　套　脫　套

＼　／＼　／＼　／＼　／＼　／＼

1　0　0　1　1　0

先以上列爲準，拆開觀察之則爲：

套　套套　脫脫　套套　脫脫　套套

＼　／　＼　／　＼　／　＼　／　＼　／　＼

1　0　0　1　1　0

發現無固定法則存在

脫　套　脫　套

（因＼　／　且＼　／）

0　1

再以下列爲準

套　　套　　脫　　套　　脫　　套

＼　　／＼　　／＼　　／＼　　／＼　　／＼

1 1　　0 0　　0 0　　1 1　　1 1　　0

發現這是一種固定法則（相同數字與“脫”對應，相異數字與“套”對應）當然我們也曾將此關係與其他情形核對，知確實無誤，再進一步以“1”表“套”以“0”表“脫”則法則成爲

1　　0　　1　　0

／＼　　／＼　　／＼　　／＼

1　　0 0　　0 0　　1 1　　1

正與二進位加法相符，即$1+0=1$，$0+0=0$，$0+1=1$，$1+1=0$（但此處不進位而已）

今再任選一種排列討論之

例如想使九連環成1 1 1 1 0 1形，這回我們不看圖二，直接利用前述法則由

1　1　1　1　0　1

＼／＼／＼／＼／＼／＼　$=2^5+0\times 2^4+2^3+0\times 2^2+0\times 2^1+2^0=41$

1　0　1　0　0　1

知至多經41次操作即可達成。

註：以"1"表套以"0"表脫（第一行）

（圖二）

0	0	0
1	1	1
11	2	10
10	3	11
110	4	100
111	5	101
101	6	110
100	7	111
1100	8	1000
1101	9	1001
1111	10	1010
1110	11	1011
1010	12	1100
1011	13	1101
1001	14	1110
1000	15	1111
11000	16	10000
11001	17	10001
11011	18	10010
11010	19	10011
11110	20	10100
11111	21	10101
11101	22	10110
11100	23	10111
10100	24	11000
10101	25	11001
10111	26	11010
10110	27	11011
10010	28	11100
10011	29	11101
10001	30	11110
10000	31	11111
110000	32	100000
110001	33	100001
110011	34	100010
110010	35	100011
110110	36	100100
110111	37	100101
110101	38	100110
110100	39	100111
111100	40	101000

111101	41	101001
111111	42	101010
111110	43	101011
111010	44	101100
111011	45	101101
111001	46	101110
111000	47	101111
101000	48	110000
101001	49	110001
101011	50	110010
101010	51	110011
101110	52	110100
101111	53	110101
101101	54	110110
101100	55	110111
100100	56	111000
100101	57	111001
100111	58	111010
100110	59	111011
100010	60	111100
100011	61	111101
100001	62	111110
100000	63	111111
1100000	64	1000000
1100001	65	1000001
1100011	66	1000010
1100010	67	1000011
1100110	68	1000100
1100111	69	1000101
1100101	70	1000110
1100100	71	1000111
1101100	72	1001000
⋮	⋮	⋮
111110100	338	101011000
111111100	339	101010111
111111101	340	101010110
111111111	341	101010101

五、解九連環公式之探討：

今由完全脫離狀況，欲操作使前面n個環成“套上”狀態，分n為奇數、偶數兩種情形討論：

1.當n為奇數：環排列狀況為 $\overbrace{1\ 1\ 1\cdots\cdots 1}^{n}$

$$\text{因}\ \begin{array}{ccccccccc}
1 & & 1 & & 1\cdots\cdots 1 & & 1 & & \\
& \diagdown\ \diagup & & \diagdown\ \diagup & & \diagup\ \diagdown & & \diagup\ \diagdown & \\
& 1 & & 0\cdots\cdots 1 & & 0 & & 1 &
\end{array}$$

（注意二進制數字1與0交互出現共n個）

$$\Rightarrow\ 1\ 0\ 1\cdots\cdots 0\ 1 = 2^{n-1} + 0 + 2^{n-3} + 0 + \cdots\cdots + 2^2 + 0$$

$$+ 2^0 = \frac{1\times(4^{\frac{n+1}{2}} - 1)}{3} = \frac{2^{n+1} - 1}{3}$$

$$\text{2.當n為偶數}\ \begin{array}{ccccccc}
1 & & 1\cdots\cdots 1 & & 1 & & \\
& \diagdown\ \diagup & & \diagdown\ \diagup & & \diagdown & \\
& 1 & & 0\cdots\cdots 1 & & 0 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow 1\ 0\ 1\ 0\cdots\cdots 1\ 0 = 2^{n-1} + 2^{n-3} + \cdots\cdots + 2^1$$

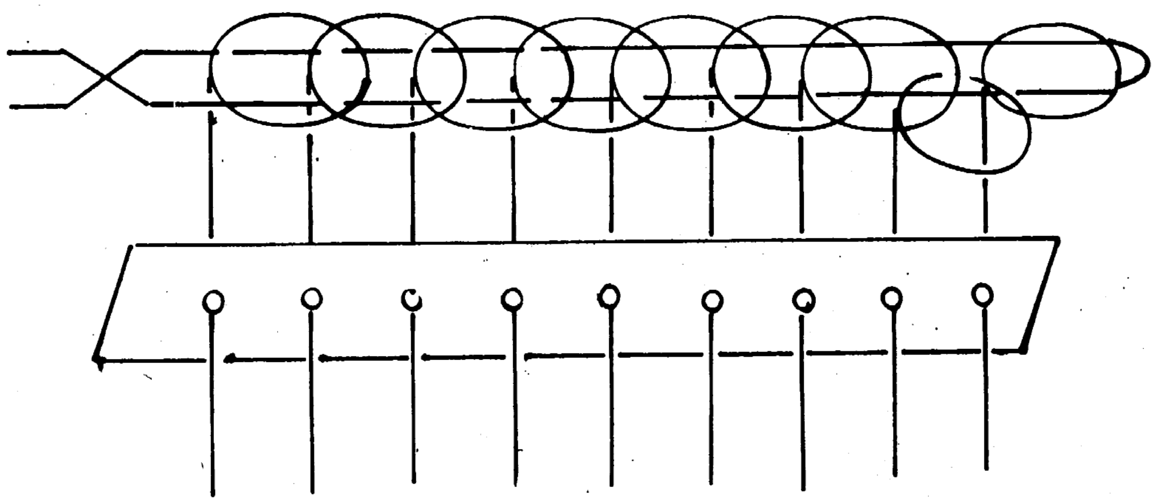
$$= \frac{2(4^{\frac{n}{2}} - 1)}{3} = \frac{2^{n+1} - 2}{3}$$

因此我們可以提出九連環公式：

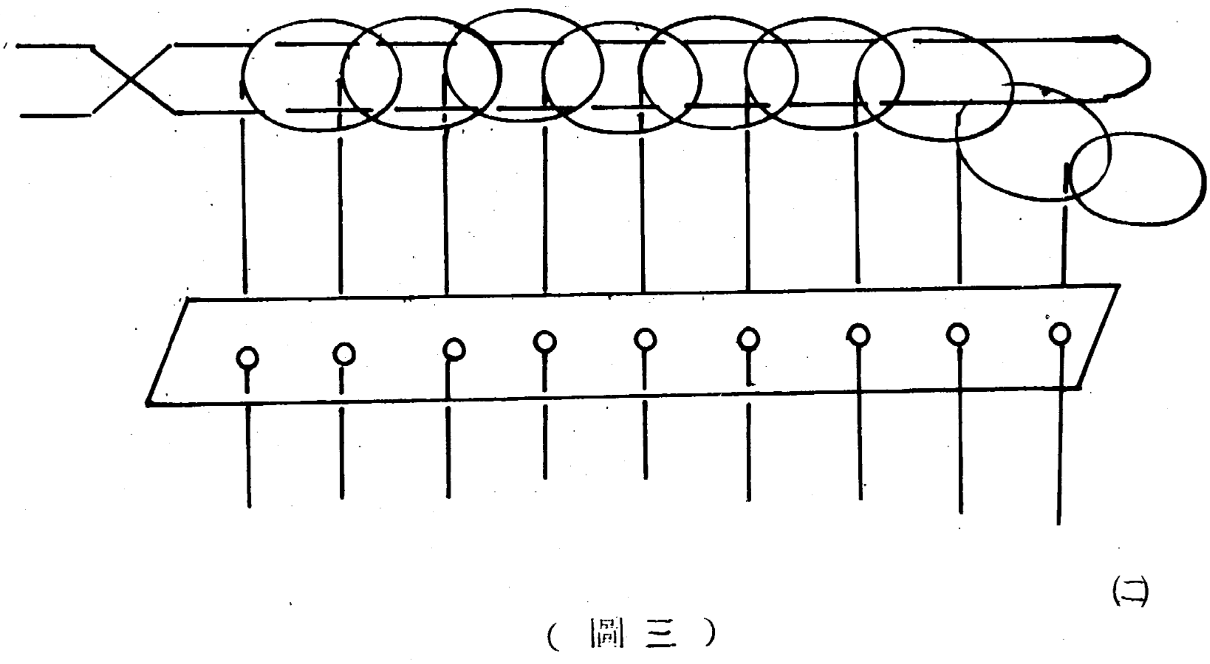
$$\boxed{\text{套上首n個環所需次數為}\begin{cases} \dfrac{2^{n+1}-1}{3} & (\text{n為奇數}) \\[2ex] \dfrac{2^{n+1}-2}{3} & (\text{n為偶數}) \end{cases}}$$

（公式一）

而解九連環的次數為 $\dfrac{2^{9+1}-1}{3} = 341$（次）



(一)



(二)

（圖三）

圖四

11	1	1
10	2	10
110	3	11
111	4	100
100	5	101
1100	6	110
1111	7	111
1110	8	1000
1010	9	1001
1011	10	1010
1000	11	1011
11000	12	1100
11011	13	1101
11010	14	1110
11110	15	1111
11111	16	10000
11100	17	10001
10100	18	10010
10111	19	10011
10110	20	10100
10010	21	10101
10011	22	10110
10000	23	10111
110000	24	11000
110011	25	11001
110010	26	11010
110110	27	11011
110111	28	11100
110100	29	11101
111100	30	11110
111111	31	11111
111110	32	100000
111010	33	100001
⋮	⋮	⋮
111110100	254	11111110
111111100	255	11111111
111111111	256	100000000
九連環排列	次數	對應二進制數字

六、補助速解公式：

其實傳統解法並不是最快的解法，只是特點在條理清楚，可將每一步驟皆交待明白，“每次一環”按步套上。

在我們實際操作中發現，最右（即最先）的兩環可以一次套上（或脫離），而不須分成兩次，先套第一環再套第二環，如圖三所示。（㈠㈡表傳統解法，㈢表速解法）。

故事實上我們可以輕易的減少步驟如圖四。將 1 2 3 4 5 6 7 8 9 環皆套上的情形特別列出，且分奇數、偶數排列成圖五。

圖　五

（奇）	（偶）	（次數）
1		1
	2	1
3		100
	4	111
5		10000
	6	11111
7		1000000
	8	1111111
9		10000000

顯然當 n 爲奇數時（ $n>1$ ）

$$次數=\overbrace{1000\cdots\cdots0}^{n-1\text{ 個 }0}$$

$$=1\times 2^{n-1}+0+0+\cdots\cdots+0=2^{n-1}$$

當 n 爲偶數時

$$次數=\overbrace{1111\cdots\cdots1}^{n-1\text{ 個}}$$

$$= 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots\cdots + 2^0 = \frac{(1 - 2^{n-1})}{1-2}$$

$$= 2^{n-1} - 1$$

$$\boxed{\text{套上首 } n \text{ 個環所須次數為} \begin{cases} 2^{n-1} & (n\text{ 為奇數}) \\ 2^{n-1}-1 & (n\text{ 為偶數}) \end{cases}}$$

（公式二）

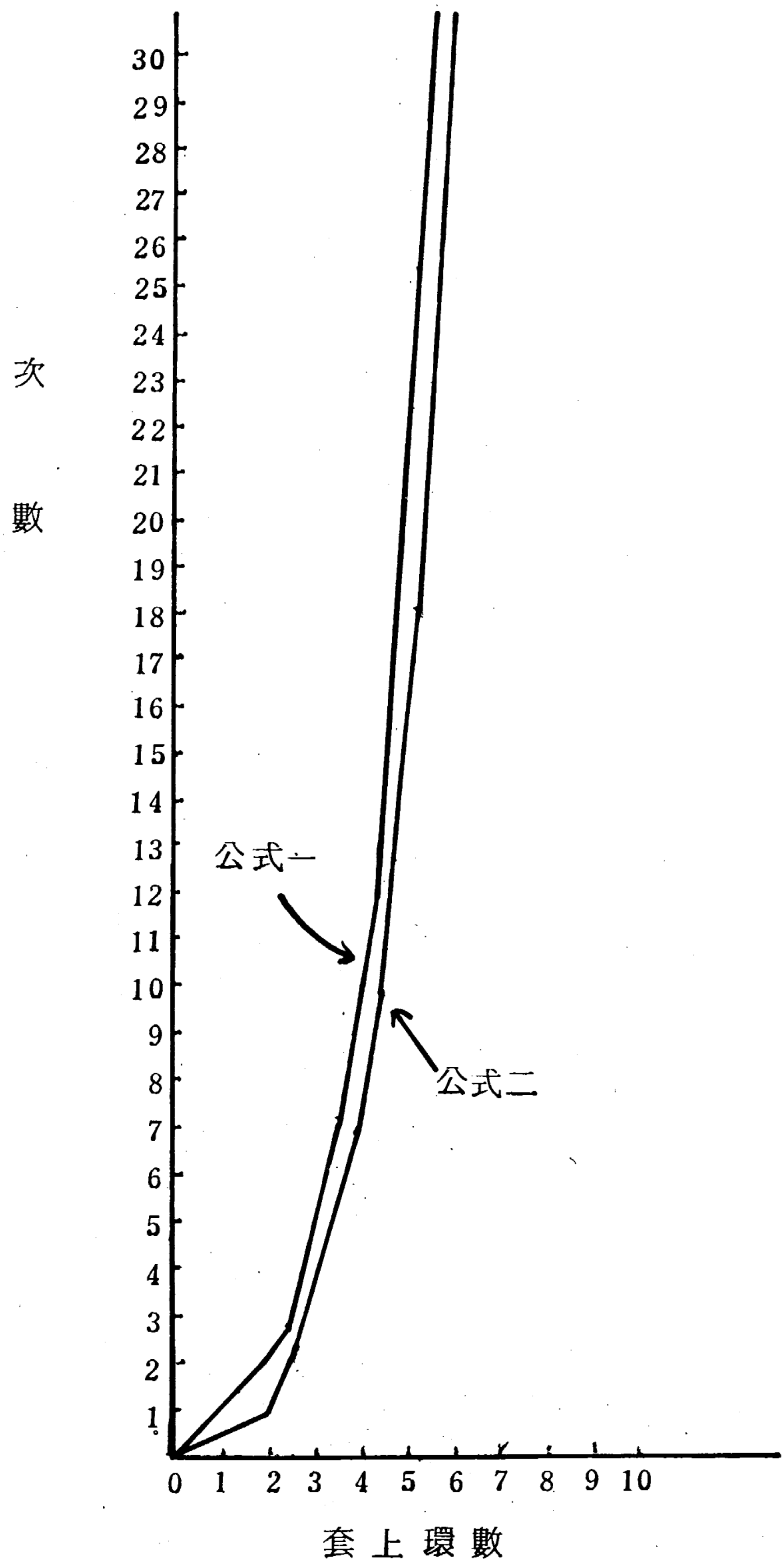
在九環皆套上就只須 $2^8 = 256$ 次

當然我們也知道，這種一、二環同時套上的方式只能算是操作手法上「技巧」而已。因為理論上來說，應該看成先套上第二環再套上第一環，就像 $2+3=5$，其實是 $(1+1)+(1+1+1)=5=1+1+1+1+1$。只是我們太熟練而已。萬一有人能苦練成功，使手一抖動同時套上三環，而我們只算次數為一次，則未免太過。所以前面所述的傳統解法雖有速解法的產生，依然不失其價值。

今再將公式(一)(二)的次數分配情形作成圖表如圖六（見後頁）所示

七、後　記：

我們求出解九連環的公式，感到十分的欣慰，後來我們在徐氏基金會出版的"數學趣味問題競試集"中發現俄國科學家利用數學歸納法解出公式，和我們以自己想出的方法所求出的公式(一)正不謀而合。現更進一步導出公式(二)，表示我們所用的方法雖僅有到初中程度，但都能瞭解等比級數求和公式，且能有更進一步的發展。


次數
30
29
28
27
26
25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
公式一
公式二
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
套上環數