有關整變數多項之定理

高中組數學第一名

省立臺東高級中學

作　　者：陳　明　賢

指導老師：林　弘　光

一、前　　言：

我們看看一個多項式 $f(x) = x^2 - 2x - 2$。首先以………-3，-2，-1，0，1，2，3……等整數依次代入得一數列：……，13，6，1，-2，-3，-2，1……。再以此數列中相鄰兩項之差（後減前）得一新數列：……-7，-5，-3，-1，1，3……。到這裏，我們可看出此新數列成一等差數列，且公差為 2。（見下表）

$$f_{(x)} = x^2 - 2x - 2$$

	……	$f_{(-3)}$		$f_{(-2)}$		$f_{(-1)}$		$f_{(0)}$		$f_{(1)}$		$f_{(2)}$		$f_{(3)}$	……
		‖		‖		‖		‖		‖		‖		‖	
第一數列	……	13		6		1		-2		-3		-2		1	……
第二數列	……		-7		-5		-3		-1		1		3		……

※ 公差 $d = 2 = 1 \times 2! =$ 領導係數 ×（次數）！

經多次試驗別的多項式均有※之結果。因此我們便產生了一個疑問：

對於 $\forall\, f_{(x)} \in R_{(x)}$，領導係數 $= a_n$ $\deg(f_{(x)}) = n$，（$n \in N$），其第 n 數列必成等差數列嗎？若是，其公差必等於 a_n（

n！）嗎？

二、多項式定值定理：

本節主要在說明多項式定值定理（定理一）；利用它，我們可證出有關整值多項式之定理（定理二與系），亦可簡化一些計算。

【定理一】多項式定值定理

若 $f_{(x)}$ 為一實係數多項式，$\deg(f_{(x)})=n$，領導係數為 a_n，$m\in Z$，則

$$f_{(m+n\Delta x)}-\binom{n}{n-1}f_{(m+(n-1)\Delta x)}+\binom{n}{n-2}f_{(m+(n-2)\Delta x)}\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{1}f_{(m+\Delta x)}+(-1)^{n}f_{(m)}=a_n\cdot(\Delta x)^n\cdot n!$$

【證明】：由插值法可知

$$f_{(x)}=\frac{f_{(m)}(x-m-\Delta x)(x-m-2\Delta x)(x-m-3\Delta x)\cdots(x-m-(n-1)\Delta x)(x-m-n\Delta x)}{(m-m-\Delta x)(m-m-2\Delta x)(m-m-3\Delta x)\cdots(m-m-(n-1)\Delta x)(m-m-n\Delta x)}$$

$$+\frac{f_{(m+\Delta x)}(x-m)(x-m-2\Delta x)(x-m-3\Delta x)\cdots(x-m-(n-1)\Delta x)(x-m-n\Delta x)}{(m+\Delta x-m)(m+\Delta x-m-2\Delta x)(m+\Delta x-m-3\Delta x)\cdots(m+\Delta x-m-(n-1)\Delta x)(m+\Delta x-m-n\Delta x)}$$

$$+\cdots\cdots$$

$$+\frac{f_{(m+(n-1)\Delta x)}(x-m)(x-m-\Delta x)(x-m-2\Delta x)\cdots(x-m-(n-2)\Delta x)(x-m-n\Delta x)}{(m+(n-1)\Delta x-m)(m+(n-1)\Delta x-m-\Delta x)(m+(n-1)\Delta x-m-2\Delta x)\cdots(m+(n-1)\Delta x-m-(n-2)\Delta x)\cdot(m+(n-1)\Delta x-m-n\Delta x)}$$

$$+\frac{f_{(m+n\Delta x)}(x-m)(x-m-\Delta x)(x-m-2\Delta x)\cdots(x-m-(n-2)\Delta x)(x-m-(n-1)\Delta x)}{(m+n\Delta x-m)(m+n\Delta x-m-\Delta x)(m+n\Delta x-m-2\Delta x)\cdots(m+n\Delta x-m-(n-2)\Delta x)\cdot(m+n\Delta x-m-(n-1)\Delta x)}$$

而 $f_{(x)}$ 的領導係數爲 a_n ，故比較係數並化簡後得

$$a_n = (-1)^n \frac{f_{(m)}}{n!} + (-1)^{n-1} \frac{f_{(m+\triangle x)}}{1!\,(n-1)!} + \cdots\cdots + \frac{f_{(m+(n-2)\triangle x)}}{(n-2)!\;2!} + \frac{f_{(m+(n-1)\triangle x)}}{(n-1)!\;1!} + \frac{f_{(m+n\triangle x)}}{n!}$$

兩邊同乘 $(\triangle x)\,n!$ 並調整順序得

$$f_{(m+n\triangle x)} \quad \frac{n!}{(n-1)!\,1!} f_{(m+(n-1)\triangle x)} + \frac{n!}{(n-2)!\,2!} f_{(m+(n-2)\triangle x)} - \cdots\cdots + (-1)^{n-1} \frac{n!}{1!\,(n-1)!} f_{(m+\triangle x)} + (-1)^n f_{(m)}$$

$= a_n \cdot (\triangle x)^n\, n!$ ，亦即

$$f_{(m+n\triangle x)} - \binom{n}{n-1} f_{(m+(n-1)\triangle x)} + \binom{n}{n-2} f_{(m+(n-2)\triangle x)} - \cdots\cdots + (-1)^{n-1} \binom{n}{1} f_{(m+\triangle x)} + (-1)^n f(m) = a_n \cdot (\triangle x)^n \cdot n!$$

所以，定理由此得證。

例： $f_{(x)} = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{2x}{3} + \frac{4}{7}$ ，

求 $f_{(7.3812)} - 3f_{(5.3812)} + 3f_{(3.3812)} - f_{(1.3812)} = ?$

解：知 $a_n = \frac{1}{6}$ ， $n = 3$ ， $\triangle x = 2$ ，依多項式定值定理得

原式 $= \frac{1}{6} \times (2)^3 \times 3! = 8$

由於此定理只須以 $n+1$ 個成AP之實數代入，其值永遠一定，即 $a_n(n!)[(\triangle x)^n]$，故稱之爲「多項式定値定理」。下面這例題我們以三種方法來解，比較之下便可了解「多項式定値定理」的應用。可簡化計算。

例題：已知多項式 $f_{(x)}$ 次數爲4，領導係數爲1，$f_{(1)}=0$，$f_{(2)}=6$，$f_{(3)}=56$，$f_{(5)}=552$，求 $f_{(4)}=?$

【解一】：以「多項式定値定理」解，可知 $\triangle x=1$

$$\therefore f_{(5)}-4f_{(4)}+6f_{(3)}-4f_{(2)}+f_{(1)}=24$$

$$552-4f_{(4)}+6\times 56-4\times 6+0=24,$$

故 $f_{(4)}=210$

【解二】：以「揷值法」解，可知

$$f_{(x)}=\frac{6(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)}$$

$$+\frac{56(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)}$$

$$+\frac{f_{(4)}(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)}$$

$$+\frac{552(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}$$

因領導係數爲1，故 $-\frac{6}{6}+\frac{56}{4}-\frac{f_{(4)}}{6}+\frac{552}{24}$

$=1$ 得 $f_{(4)}=210$

【解三】：以一般解法解，可設 $f_{(x)}=(x-1)(x^3+ax^2+bx+c)$（$\because f_{(1)}=0$）

於是 $f_{(2)}=4a+2b+c+8=6$ ………………(1)

$f_{(3)}=18a+6b+2c+54=56$ ………(2)

$f_{(5)}=100a+20b+4c+500=552$ ……(3)

解聯立方程式(1)(2)(3) 得 $a=1$，$b=-2$，$c=-2$

即 $f_{(x)}=(x-1)(x^3+x^2-2x-2)=x^4-3x^2+2$，故 $f_{(4)}=(4)^4-3(4)^2+2=210$

然而，若 $f_{(1)}\neq 0$，一般解法計算之繁必然可知。

利用這定理可以證明一些有關整值多項式的性質，首先我們必須先知道整值多項式的定義。〔2〕

當變數 x 爲整數時，若一多項式 $f_{(x)}$的值常爲整數，則此多項式稱爲「整值多項式」。例如：$\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}-3$，$\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}-1$ 及一切整係數多項式均爲整值多項式。

【定理二】：若一多項式 $f_{(x)}$，$\deg(f_{(x)})=n$，對於連續 $n+1$ 個整數，多項式值恒爲整數，則此多項式必爲整值多項式。

【證明】：設此 $n+1$ 個整數爲 $m+n$，$m+n+1$，$m+n-2$，……，$m+1$，m，並令此 n 次多項式 $f_{(x)}$的領導係數爲 a_n，則由多項式定值定理知

$$a_n\cdot(\triangle x)^n n!=a_n\cdot n!=f_{(m+n)}-\binom{n}{n-1}f_{(m+n-1)}+\binom{n}{n-2}f_{(m+n-2)}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{1}f_{(m+1)}+(-1)^n f_{(m)}$$

，故 $a_n\cdot n!$ 爲整數。

(1)由多項式定值定理又可知

$$a_n(n!)=f_{(m+n+1)}-\binom{n}{n-1}f_{(m+n)}+\binom{n}{2}f_{(m+n-1)}-\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{1}f_{(m+2)}+(-1)^n f_{(m+1)}$$

故 $f_{(m+n+1)}=a_n(n!)+\binom{n}{n-1}f_{(m+n)}-\cdots\cdots-(-1)^{n-1}\binom{n}{1}f_{(m+2)}+(-1)^n f_{(m+1)}$ 爲一整數。同法可證得$f_{(m+n+2)}$，$f_{(m+n+3)}$……皆爲整數。

(2)依同法亦可證得 $f_{(m-1)}$，$f_{(m-2)}$，$f_{(m-3)}$ ……等均爲整數。

(3)綜合(1)(2)可得 $f_{(x)}$爲一整值多項式。　定理得證。

不但如此，我們又可以「多項式定值定理」來證明出下面的推論。

【系】：設 $f_{(x)}$ 爲整值多項式，$\deg(f_{(x)})=n$，領導係數爲 a_n，則 $a_n(n!)$ 必爲整數。

證明過程極其簡單，故不作省略。

三、巴斯卡定理的應用：

下面的定理（定理三）可說明巴斯卡定理的應用。這個定理對於證實前言之猜測極爲重要，因此，必須將它提出來說明。

【定理三】：

$$\left[\binom{k}{k}a_{k+1}-\binom{k}{k-1}a_k+\binom{k}{k-2}a_{k-1}-\cdots\cdots+(-1)^{k-1}\binom{k}{1}a_2+(-1)^k\binom{k}{0}a_1\right]-\left[\binom{k}{k}a_k-\binom{k}{k-1}a_{k-1}+\binom{k}{k-2}a_{k-2}-\cdots\cdots+(-1)^{k-1}\binom{k}{1}a_1+(-1)^k\binom{k}{0}a_0\right]=\binom{k+1}{k-1}a_{k+1}-\binom{k+1}{k}a_k+\binom{k+1}{k-1}a_{k-1}-\cdots\cdots+(-1)^k\binom{k+1}{1}a_1+(-1)^{k+1}\binom{k+1}{0}a_0$$

【證明】：原式經合併後得

$$\text{原式}=\binom{k+1}{k+1}a_{k+1}-\left[\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}\right]a_k+\left[\binom{k}{k-2}+\binom{k}{k-1}\right]a_{k-1}-\cdots\cdots+(-1)^{k-1}\left[\binom{k}{1}+\binom{k}{2}\right]a_2+(-1)^k\left[\binom{k}{0}+\binom{k}{1}\right]a_1+(-1)^{k+1}\binom{k+1}{0}a_0$$

由巴斯卡定理 $\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m}+\binom{n-1}{m-1}$ 可知

$$\text{故原式}=\binom{k+1}{k+1}a_{k+1}-\binom{k+1}{k}a_k+\binom{k+1}{k-1}a_{k-1}-\cdots\cdots+(-1)^k\binom{k+1}{1}a_1+(-1)^{k+1}\binom{k+1}{0}a_0$$

定理由此得證：

我們將利用定理一（多項式定值定理）以及定理三，來證明前言中的猜測，也就是下一節中所要講的「多項式差階數列定理」。

四、多項式差階數列定理：

本節主要目的在證實前言的猜測（多項式差階數列定理），並討論其用途，旁及有關性質。在敘述此定理之前，我們先定義

一些符號，以便了解與解釋。

$D_{(1)}$為原多項式以整數代入依序排列而成的數列，叫做第一差階數列。

$D_{(2)}$為$D_{(1)}$中相鄰兩項之差（後減前）所成的數列，叫做第二差階數列。

$D_{(3)}$為$D_{(2)}$中相鄰兩項之差（後減前）所成的數列，叫做第三差階數列。

……………………………………………………………………

$D_{(n)}$為$D_{(n-1)}$（$n \geq 2$）中相鄰兩項之差（後減前）所成的數列，叫做第 n 差階數列。

現在，我們就來說明這個定理的敘述。

【定理四】　多項式差階數列定理 一多項式 $f_{(x)} \subset R_{(x)}$，$\deg(f_{(x)})=n$,（$n \in N$），領導係數為 a_n，則$D_{(n)}$必為第差數列且公差 $d=a_n(n!)$

【證明】：我們看看$D_{(1)}$之各項

$\cdots\cdots, f_{(-2)}, f_{(-1)}, f_{(0)}, f_{(1)}, f_{(2)}, f_{(3)}, \cdots\cdots$

可知$D_{(2)}$之各項為

$\cdots\cdots, f_{(-1)}-f_{(-2)}, f_{(0)}-f_{(-1)}, f_{(1)}-f_{(0)}, f_{(2)}-f_{(1)}, f_{(3)}-f_{(2)}, \cdots\cdots\cdots$

其中每項之係數正和「定理三」之敘述相同。

因此，我們可得$D_{(3)}$，$D_{(4)}$，……$D_{(n)}$均合於「定理三」。

故$D_{(n+1)}$中各項係數也合於定理三，所以$D_{(n+1)}$之通項為

$f_{(r+n)}-\binom{n}{n-1}f_{(r+n-1)}+\binom{n}{n-2}f_{(r+n-2)}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{1}f_{(r+1)}+(-1)^n f_{(r)} \qquad r \in Z$

而其通項又正合於「多項式定值定理」，其$\triangle x=1$，故其每項均為 $a_n(n!)$。所以，$D_{(n)}$成一等差數列，且公差 $d=a_n(n!)$

定理由此得證。

現在，我們再看看一個例子吧：$f_{(x)}=2x^3-8x^2-6x+3$

知 $\deg(f_{(x)})=3$，$a_n=2$，我們看看差階表：

$f_{(-3)}, f_{(-2)}, f_{(-1)}, f_{(0)}, f_{(1)}, f_{(2)}, f_{(3)}, \cdots\cdots$　公差

		‖	‖	‖	‖	‖	‖	‖	
$D_{(1)}\cdots\cdots$		-105	-33	-1	3	-9	-25	-33	$d=12=2\times(3!)$
$D_{(2)}\cdots\cdots$		72	32	4	-12	-16	-8		
$D_{(3)}$	$\cdots\cdots$	-40	-28	-16	-4	8	$\cdots\cdots$		
$D_{(4)}$			12	12	12	12	$\cdots\cdots$		差階表

不錯，正是如此。

吾人再深入探討其性質：

某一多項式 $f_{(x)}\in R_{(x)}$，$\deg(f_{(x)})=n$，則 $D_{(n)}$ 稱爲最低差階數列，有了這個名詞，可便於解說某些性質。就如下面兩件推論：

(1)最低差階數列之公差 d 與領導係數與次數有關，而與其他係數無關。

(2)一多項式與其各階微分和不定積分之最低差階數列各公差必相等（卽 $d=a_n(n!)$）。

(3)多項式 $f_{(x)}$ 之最低差階數列爲 $D_{(n)}$，則 $D_{(n-m)}$（$-1\leq m<n$，且 $m\in Z$）各項之通項爲一個 $m+1$ 次多項式。

有了這個定理，便可推算出某些數列一般項之次數與領導係數。例如：一數列……3，1，0，0，1，3，6……由差階數列定理可以知道此數列之一般項爲次數 2，而領導係數爲½。

根據這個方法，我們可以推算出 $\Sigma_{k=1}^{n}K^{m}$ 之次數與領導係數。於是，我們便可得其次數爲 $m+1$，領導係數爲 $\frac{1}{m+1}$。