

圓、柱、球、錐的研究

國小組數學第二名

高雄市瑞豐國民小學

製作：蘇幸如、孫久惠
翁士元等 12 人

指導：梁婉真、顏月霞
陳弘行

一、動機和目的：

1. 去年我們研究“新型七巧板”得全國科學展覽第二名，對數學的研究增加信心，而更有興趣。
2. 學到圓的時候，老師常交代有趣的作業，如：收集圓的器物、測量圓周、尋找圓的直徑和圓心，再用直徑和圓周做實際的比較，有許多不同的數字出現，然後老師才告訴我們圓周率的近似值是 3.1416。
3. 作圓面積的習題時，把圓切成八塊、十六塊、三十二塊的△形，湊合起來像似“平行四邊形”再想到面積的求法，都可以了解。
4. 圓的面積經大家討論有好多種，其中蘇幸如同學說“圓面積用直徑×直徑×0.785是不是可以？”老師說“你們想想看，要有道理才可以”於是我們決定研究有關圓的問題。

二、研究問題：

1. 圓面積的求法有那些？
2. 圓和正方形的面積有什麼關係？
①內接時
②外接時

3 圓和正三角形、正六角形、正八角形有什麼關係？

4 圓柱和圓錐有什麼關係？ { ①表面積
②體積

5 角柱和角錐有什麼關係？

6 圓柱和球的體積有什麼關係？

三、研究的方法、經過和結果：

1 圓面積的求法：

(1) 半徑 $\times$ 半徑 $\times 3.14 =$ 圓面積

(2) 半徑 $\times$ 半圓周 $=$ 圓面積

(3) 半圓周 $\times$ 半圓周 $\div 3.14 =$ 圓形面積

此(3)是由(2)變化而來，因 半圓周 $=$ 半徑 $\times 3.14$

圓面積 $=$ 半徑 $\times$ 半圓周

所以：圓面積 $=$ 半圓周 $\times$ 半圓周 $\div 3.14$
半徑

(4) 直徑 $\times$ 直徑 $\times 3.14 \div 4 =$ 圓面積

此(4)是由(1)演變而來，因 直徑 $\times$ 直徑 $= 2$ 倍的直徑
 $= 4$ 倍的半徑

所以：直徑 $\times$ 直徑 $\times 3.14$ 又要除以 4

(5) 直徑 $\times$ 直徑 $\times 0.785 =$ 圓面積

此(5)是由(4)變化而來，因 $3.14 \div 4 = 0.785$

所以：直徑 $\times$ 直徑 $\times 0.785$ 也可以算
出圓面積

◎由此可知，如果半徑、直徑、半圓周、圓周的任何一項知道尺寸，就可以求出圓的面積。

2 圓和正方形的關係：

(1) 內接時：

知道直徑是 10 公分時

$10 \times 10 = 100$ (平方公分)……正方形面積

$10 \times 10 \times 0.785 = 78.5$ (平方公分)……圓形面積

100 平方公分 $- 78.5$ 平方公分 $= 21.5$ 平方公分……

知道對角線是 10 公分時

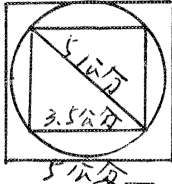
對角線 $\times$ 對角線 $\div 2 =$ 菱形或正方形面積

正方形面積 $\times 0.785 =$ 圓形面積

正方形面積 $-$ 圓面積 $=$ 斜線部分面積

◎正方形面積：圓形面積為 1 : 0.785

(2) 外接時：



對角線 $\times$ 對角線 $\div 2 =$ 正方形面積或菱形面積

直徑 $\times$ 直徑 $\times 0.785 =$ 圓形面積

圓形面積 $-$ 正方形面積 $=$ 斜線部分面積

◎正方形面積：圓形面積為 1 : 1.57

◎一邊長：直徑長 為 1 : 1.41

◎發現菱形面積求法，在圓和正方形的內外接時，求正方形、圓形、斜線部分的面積都可利用，且又很方便。

◎知道內接時，正方形面積：圓形面積 $= 1 : 0.785$

◎知道外接時，正方形面積：圓形面積：1 : 1.57

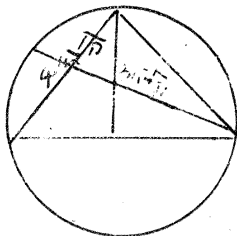
◎正方形的邊長不變時 ($1.57 \div 0.785 = 2$)，外接圓的面積是內接圓面積的兩倍。

如能應用此比例要計算正方形、圓形、斜線部分，面積均可極為便利。

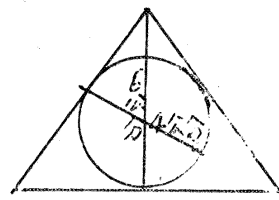
3. 圓和正三角形、正六角形、正八角形的關係：

(1) 內接正三角形

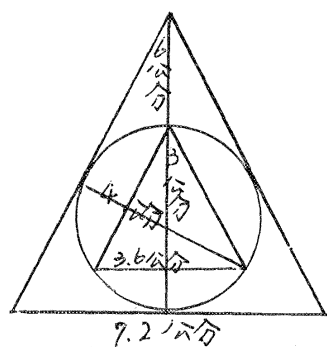
(2) 外接正三角形



直徑：高 $= 4 : 3$



直徑：高 $= 2 : 3$



$$3.6 \times 3 \div 2 = 5.4 \text{ (平方公分)} \cdots \cdots \text{內接正}\triangle \text{面積}$$

$$4 \times 4 \times 0.785 = 12.56 \text{ (平方公分)} \cdots \cdots \text{圓形面積}$$

$$6 \times 7.2 \div 2 = 21.6 \text{ (平方公分)} \cdots \cdots \text{外接正}\triangle \text{面積}$$

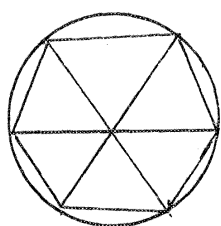
$$7.2 \div 3.6 = 2 \text{ (倍)} \cdots \cdots \text{外接}\triangle \text{長和內接}\triangle \text{長比}$$

$$21.6 \div 5.4 = 4 \text{ (倍)}$$

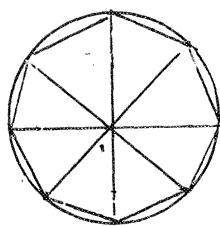
◎內接正三角形的邊長：外接正三角形的邊長
為 1 : 2

◎內接正三角形的高：外接正三角形的高
為 1 : 2

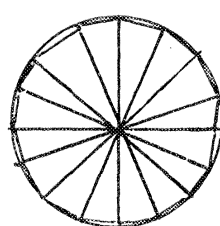
◎內接正三角形面積：外接正三角形面積
為 1 : 4



正六角形



正八角形



正十六角形

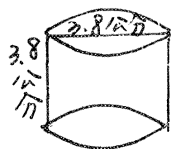
◎越多的正多角形的形狀是越近於圓形

◎由此也可以證明圓周和圓周率的近似值

4. 圓柱和圓錐：

(1)容量：用砂測量容量的結果。

圓柱的容量是圓錐的 3 倍



$$3.8 \times 3.8 \times 0.785 \times 3.8 = 43.07452 \text{ (立方公分)}$$

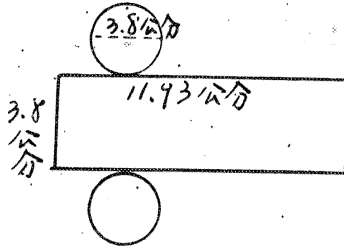
$$= 43.0752 \text{ 公撮}$$



$$3.8 \times 3.8 \times 0.785 \times 3.8 \div 3 = 14.358173 \text{ (立方公分)}$$

$$= 14.358173 \text{ 公撮}$$

(2)表面積：



$$3.8 \times 3.8 \times 0.785 \times 2 = 22.6708 \text{ (平方公分)}$$

……兩底面積

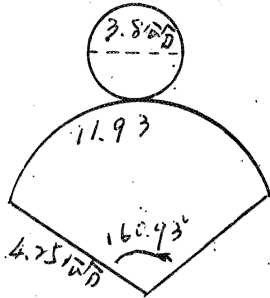
$$11.93 \times 3.8 = 45.334 \text{ (平方公分)}$$

……側面積

$$22.6708 + 45.334 = 68.0048$$

$$3.8 \times 3.8 \times 0.785 = 11.3354 \text{ (平方公分)}$$

……圓形面積



$$8.5 \times 8.5 \times 0.785 \times \frac{161}{360} = 25.3653$$

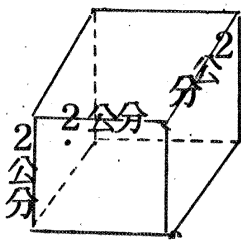
……扇形面積

$$11.3354 + 25.3653 = 36.7007$$

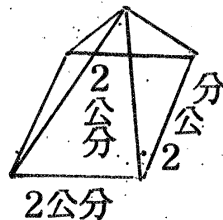
5. 角柱和角錐的關係：

用砂量和木塊切都是 3 : 1

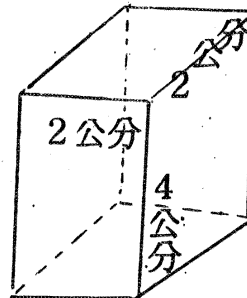
(1) 正方體



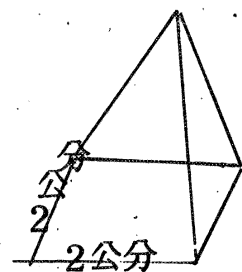
四角錐



(2) 長方形



四角錐



8 立方公分 2.6 立方公分

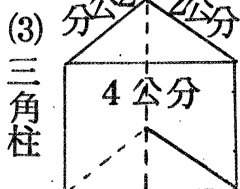
(8 公撮) (2.6 公撮)

16 立方公分 5.3 立方公分

(16 公撮) (5.3 公撮)

正方體和長方體都屬於四角柱。

正方底和長方底的錐體都是四角錐。



(3) 三角柱

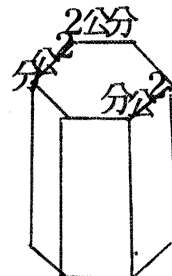
三角錐



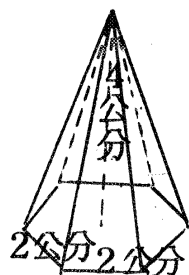
8 立方公分
(公撮)

2.6 立方公分
(公撮)

(4) 六角柱



六角錐



40.8 立方公分
(公撮)

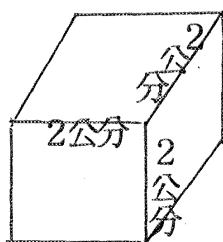
13.6 立方公分
(公撮)

◎由上面的三角柱、四角柱（正方體）（長方體）和六角柱各
和三角錐、四角錐、六角錐的容量的實測和切塊得知各種形
狀的柱和錐的體積都是 3 : 1

6. 圓柱和球、圓錐的關係：

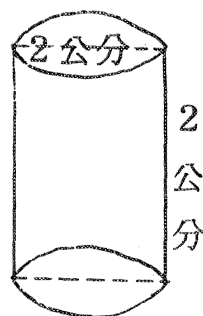
(1) 立方體和圓柱

體積比例（包括容量）



$$2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ (立方公分)}$$

$$= 8 \text{ 公撮}$$



$$2 \times 2 \times 0.785 \times 2$$

$$= 6.28 \text{ (立方公分)}$$

$$= 6.28 \text{ 公撮}$$

$$6.28 \div 8 = 0.785$$

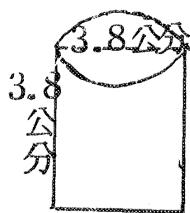
一邊³ = 正方體體積

$$\text{直徑}^2 \times \text{高} \times 0.785$$

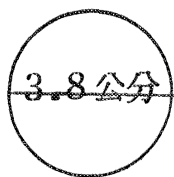
= 圓柱體體積

◎所以：正方體和圓柱體的體積比例是 1 : 0.785

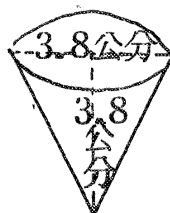
(2) 圓柱和球、圓錐、半球：



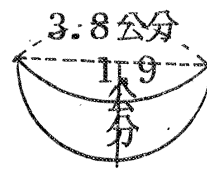
容量 43.07452
公撮



28.716346
公撮



14.358173
公撮



14.358173
公撮

比例 3 : 2 : 1 : 1

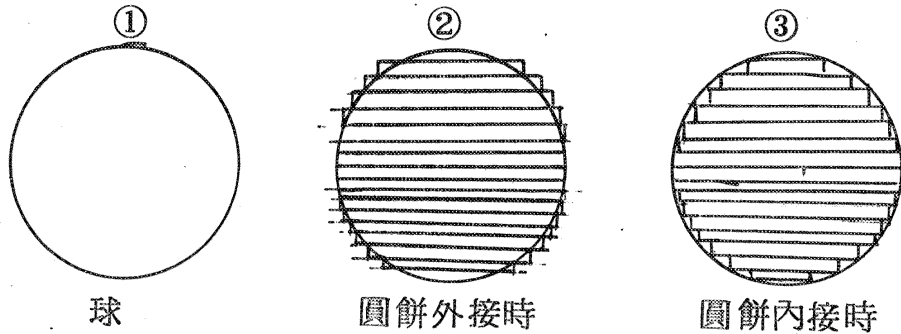
◎已知圓柱和圓錐的容量比例為 3 : 1

◎由測量得知圓錐容量等於半球容量比例為 1 : 1

◎球容量為半球的2倍，所以球容量為圓錐容量的2倍，其比例是2：1

◎容量的比例：圓柱：球：圓錐：半球＝3：2：1：1

7. 研究球體積的想法：



◎要求①球的體積時：用②的圓柱餅外接的方法和③的圓柱餅內接的方法來試試看；老師講的公式：

$$\text{球的體積} = \frac{4}{3} \times \text{圓周率} \times \text{半徑}^3$$

四、研究的結論：

1 圓面積的求法，不祇是課本上記載的一種，我們做出的有五種。但可以歸為用半徑和用直徑的兩種：

①半徑×半徑×3.14＝圓面積

②直徑×直徑×0.785＝圓面積

2 圓和正方形面積的比例是：

①內接正方形：圓＝1：0.785

②外接時正方形：圓＝1：1.57

3 發現如：

①外接圓的面積是內接圓面積的兩倍

②圓的內接正三角形和外接正三角形，它們的底和高的長度比是1：2。面積的比例是1：4。邊長兩倍時，面積為原來的4倍。

1. 由正三角形、正八角形、正十六角形……的內接於同圓的時候，越多的正多角形是越近於圓形。由此也可以推測圓周和圓周

率的近似值。

5. 由測量及裁切中得知各種柱體的容量和體積都是各種錐體的 3 倍。
6. 由圓柱、球、圓錐的實測中發現三者的容量（或體積）比例是 3 : 2 : 1 而球的一半容量等於圓錐的容量。