

等圓內接三角形及外切三角形

面積的比較研究

國小組數學第一名

臺北市景美國民小學

製作學生：林啓聖、向可華

指導老師：王秀妙、梁聲鏞

甲、研究目的：

1. 等圓內接三角形面積那一種三角形面積最大？
2. 等圓外切三角形面積那一種三角形面積最小？
3. 等圓內接任意三角形一角與等腰三角形頂角相等時，是等腰三角形面積大、還是任意三角形面積大？
4. 等圓外切任意三角形一角與等腰三角形頂角相等時，是等腰三角形面積大、還是任意三角形面積大？

乙、研究過程：

一、等圓內接三角形分等腰三角形、任意三角形（以一角 20° 為定角代表其他附比較統計表中）隨等腰三角形頂角每差 10° 的變化為主，計算三角形面積，並加以比較研究。

A、等圓內接等腰三角形面積的變化（ r 為圓半徑 = 5 公分，

h 為三角形的高、 ℓ 為三角形底邊邊長）

1. 頂角 10°

$$\text{三角形面積} = \frac{9.9 \times 1.8}{2} = 8.91 \text{ (平方公分)}$$

2. 頂角 20°

$$\text{三角形面積} = \frac{9.7 \times 3.5}{2} = 16.975 \text{ (平方公分)}$$

3. 頂角 30°

$$\text{三角形面積} = \frac{9.3 \times 5.2}{2} = 24.18 \text{ (平方公分)}$$

4. 頂角 40°

$$\text{三角形面積} = \frac{8.8 \times 6.4}{2} = 28.16 \text{ (平方公分)}$$

5. 頂角 50°

$$\text{三角形面積} = \frac{8.2 \times 7.7}{2} = 31.57 \text{ (平方公分)}$$

6. 頂角 60°

$$\text{內接正三角形面積} = \frac{7.5 \times 8.6}{2} = 32.25 \text{ (平方公分)}$$

(等圓內接三角形面積以正三角形面積最大)

7. 頂角 70°

$$\text{三角形面積} = \frac{6.7 \times 9.4}{2} = 31.49 \text{ (平方公分)}$$

8. 頂角 80°

$$\text{三角形面積} = \frac{1.6 \times 9.8}{2} = 29.4 \text{ (平方公分)}$$

9. 頂角 90°

$$\text{三角形面積} = \frac{5 \times 10}{2} = 25 \text{ (平方公分)}$$

10. 頂角 100°

$$\text{三角形面積} = \frac{4.1 \times 9.8}{2} = 20.09 \text{ (平方公分)}$$

11. 頂角 110°

$$\text{三角形面積} = \frac{3.2 \times 9.3}{2} = 14.88 \text{ (平方公分)}$$

12. 頂角 120°

$$\text{三角形面積} = \frac{2.4 \times 8.5}{2} = 10.2 \text{ (平方公分)}$$

13. 頂角 130°

$$\text{三角形面積} = \frac{1.8 \times 7.7}{2} = 6.96 \text{ (平方公分)}$$

14. 頂角 140°

$$\text{三角形面積} = \frac{1.7 \times 6.27}{2} = 5.329 \text{ (平方公分)}$$

15. 頂角 150°

$$\text{三角形面積} = \frac{0.7 \times 5}{2} = 1.75 \text{ (平方公分)}$$

16. 頂角 160°

$$\text{三角形面積} = \frac{0.3 \times 3.2}{2} = 0.48 \text{ (平方公分)}$$

B、等圓內接任意三角形面積的變化（爲圓半徑 5 公分以一角爲定角 20 另一角隨等腰三角形頂角的變化爲主）

1. 一變化角爲 10°

$$\text{三角形面積} = \frac{0.6 \times 5.5}{2} = 1.65 \text{ (平方公分)}$$

2. 一變化角爲 20°

$$\text{三角形面積} = \frac{1.15 \times 6.4}{2} = 3.68 \text{ (平方公分)}$$

3. 一變化角爲 30°

$$\text{三角形面積} = \frac{1.75 \times 7.7}{2} = 6.7375 \text{ (平方公分)}$$

4. 一變化角爲 40°

$$\text{三角形面積} = \frac{2.2 \times 8.7}{2} = 9.57 \text{ (平方公分)}$$

5. 一變化角爲 50°

$$\text{三角形面積} = \frac{2.7 \times 9.55}{2} = 12.8925 \text{ (平方公分)}$$

6. 一變化角爲 60°

$$\text{三角形面積} = \frac{2.95 \times 9.85}{2} = 14.67625 \text{ (平方公分)}$$

7. 一變化角爲 70°

$$\text{三角形面積} = \frac{3.3 \times 9.8}{2} = 16.17 \text{ (平方公分)}$$

8. 一變化角爲 80°

$$\text{三角形面積} = \frac{3.4 \times 9.4}{2} = 18.83 \text{ (平方公分)}$$

9. 一變化角爲 90°

$$\text{三角形面積} = \frac{3.3 \times 10}{2} = 16.5 \text{ (平方公分)}$$

10. 一變化角爲 100°

$$\text{三角形面積} = \frac{3 \times 9.9}{2} = 14.85 \text{ (平方公分)}$$

11. 一變化角爲 110°

$$\text{三角形面積} = \frac{2.75 \times 9.6}{2} = 13.2 \text{ (平方公分)}$$

12. 一變化角爲 120°

$$\text{三角形面積} = \frac{2.25 \times 8.9}{2} = 10.0125 \text{ (平方公分)}$$

13. 一變化角爲 130°

$$\text{三角形面積} = \frac{1.75 \times 7.7}{2} = 6.7375 \text{ (平方公分)}$$

14. 一變化角爲 140°

$$\text{三角形面積} = \frac{1.2 \times 6.6}{2} = 3.96 \text{ (平方公分)}$$

15. 一變化角爲 150°

$$\text{三角形面積} = \frac{0.65 \times 5.15}{2} = 1.67375 \text{ (平方公分)}$$

三等圓外切三角形面積分等腰三角形、任意三角形（以一角 30° ）

爲定角)隨等腰三角形頂角每差 20° 的變化爲主,計算三角形面積,並加以比較研究。

A、等圓外切等腰三角形面積的變化(r 爲圓半徑 = 3 公分、 h 爲三角形的高、 l 爲三角形底邊邊長)

1 頂角 20°

$$\text{三角形面積} = \frac{20.1 \times 7.2}{2} = 72.36 \text{ (平方公分)}$$

2 頂角 40°

$$\text{三角形面積} = \frac{11.8 \times 8.6}{2} = 50.74 \text{ (平方公分)}$$

3 外切正三角形

$$\text{外切正三角形} = \frac{9 \times 10.5}{2} = 47.25 \text{ (平方公分)}$$

(等圓外切三角形面積以正三角形面積最小)

4 頂角 80°

$$\text{三角形面積} = \frac{7.7 \times 12.9}{2} = 49.665 \text{ (平方公分)}$$

5 頂角 100°

$$\text{三角形面積} = \frac{6.9 \times 16.5}{2} = 56.925 \text{ (平方公分)}$$

6 頂角 120°

$$\text{三角形面積} = \frac{6.5 \times 22.5}{2} = 73.125 \text{ (平方公分)}$$

7 頂角 140°

$$\text{三角形面積} = \frac{6.2 \times 33.5}{2} = 103.85 \text{ (平方公分)}$$

8 頂角 160°

$$\text{三角形面積} = \frac{6.15 \times 69}{2} = 212.17 \text{ (平方公分)}$$

B、等圓外切任意三角形面積的變化(r 爲圓半徑 = 3 公分、

以一角爲定角 30、另一角隨等腰三角形頂角的變化爲主)

1 一變化角爲 20°

$$\text{三角形面積} = \frac{6.3 \times 28.5}{2} = 89.775 \text{ (平方公分)}$$

2 (一變化角爲 40°

$$\text{三角形面積} = \frac{6.7 \times 19.3}{2} = 64.655 \text{ (平方公分)}$$

3 一變化角爲 60°

$$\text{三角形面積} = \frac{7.1 \times 16.3}{2} = 57.51 \text{ (平方公分)}$$

4 一變化角爲 80°

$$\text{三角形面積} = \frac{7.7 \times 14.9}{2} = 55.365 \text{ (平方公分)}$$

5 一變化角爲 100°

$$\text{三角形面積} = \frac{132 \times 19}{2} = 59.4 \text{ (平方公分)}$$

6 一變化角爲 120°

$$\text{三角形面積} = \frac{6.6 \times 22.7}{2} = 74.91 \text{ (平方公分)}$$

7 一變化角爲 140°

$$\text{三角形面積} = \frac{12.3 \times 48.35}{2} = 147.315 \text{ (平方公分)}$$

三將以上研究結果分別製成等圓內接、外切三角形面積變化比較表：

A等圓 (r = 5 公分) 內接等腰與任意三角形 (除以定角 20 外並附 50、70) 的面積計算數字 (單位平方公分) 隨角度變化比較表。

面積 三角形名稱		角 度	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	備註
等腰三角形			8.91	17.2175	4.18	28.16	31.57	32.25	31.49	29.4	25	20.09	14.88	10.2	6.96	5.3245	1.75	0.48				
任意 三角形	定角20°		1.65	3.68	6.7375	9.57	12.8925	14.6725	16.17	18.83	16.5	14.85	13.2	10.0125	6.7375	3.96	1.67375					
	定角50°		6.75	12.35	16.355	24.745	29.7	31.68	29.88	27.375	23.075	18.8	12.48	5.395								
	定角70°		8.91	16.665	23.03	28.14	31.49	31.39	28.67	23.03	15.5	7.28										

B等圓（ $r = 3$ 公分）外切等腰三角形與任意三角形（除一定角 20° 外並附定 $50^\circ 70^\circ$ ）的面積計算數字（單位平方公分）隨角度變化比較表。

面積 三角形名稱		角 度	○	20	40	60	80	100	120	140	160	備 註
等腰三角形				72.36	50.74	47.35	49.665	56.925	73.125	103.85	212.17	
任意 三角形	定角30°			89.775	64.655	57.51	57.365	59.4	74.91	147.315		
	定角50°			82.41	53.28	48	53.045	76.275	132.43			
	定角70°			74.52	51.84	49.44	58.4	125.07				

四依上表數字分別繪製等圓外切、內接三角形面積變化曲線圖。

A等圓 ($r = 5$ 公分) 內接等腰三角形與任意三角形 (除以定角 30° 外並附定角 $50^\circ 70^\circ$) 的面積曲線變化圖，以便比較、研究。

B等圓 ($r = 3$ 公分) 外切等腰三角形與任意三角形 (除以定角 30° 外，並附定角 $50^\circ 70^\circ$) 的面積曲線變化圖，以便比較、研究。

丙、研究結果：

由以上兩曲線圖與三角形面積隨角度變化數字的研究可得以下四點結論。

一圓內接等腰三角形面積隨頂角角度的增大而變大，至 60° 正三角形時，其面積大於等圓內接所有其他各三角形面積，然後再隨頂角角度的增加而其面積又逐漸減少。

二等圓內接任意三角形有一角和等腰三角形頂角相等時，等腰三角形大於任意三角形。

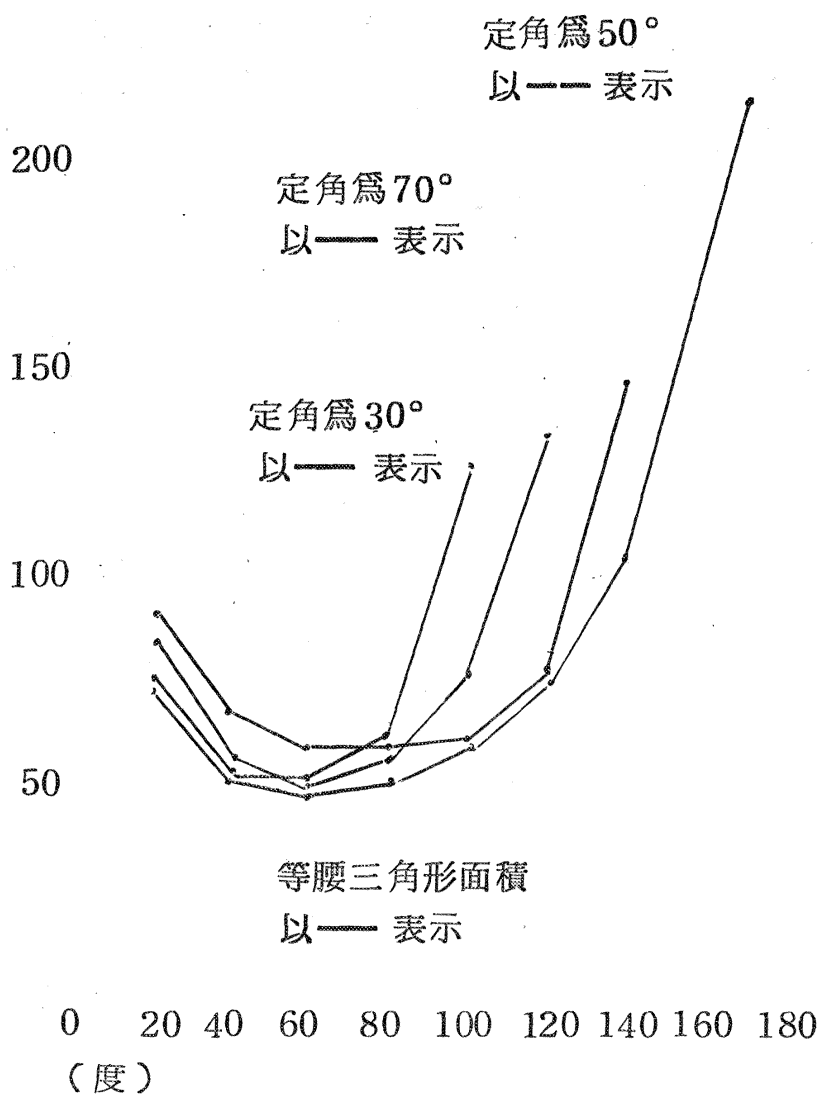
三圓外切等腰三角形面積隨頂角角度的增大而減少，至 60° 正三角形時，其面積小於等圓外切所有其他各三角形面積，然後再隨頂角角度的增加，而其面積又漸漸加大。

四等圓外切任意三角形，有一角和等腰三角形頂角相等時，等腰三角形小於任意三角形。

350

300

單位：公分
(外切三角形)



單位：平方公分
(內接三角形)

等腰三角形面積
以——表示

