由不定方程 $1.\ x^2+y^2=z^2$ $2.\ x^2+y^2+z^2=w^2$ 之正整數解探求整數三角形結構

高中組數學第三名

省立新竹高級中學　　　　作　者：賴柏憲　黃啓祥

黃蘭翔　羅新衡

指導老師：鄭信傳　林雲壽

(一)動機．

在高中實驗課本第三册中曾提到用餘弦定律導出黑龍公式（Heron's Formula）：對於已知三邊之任意三角形，其面積可由此公式求得，即"若△ABC之三頂點爲ABC，其所對之邊長分別爲a、b、c、，且 $S=\frac{1}{2}(a+b+c)$，則△ABC之面積＝△＝$\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$"。

這個公式是古希臘時代，希臘的數學家Heron於西元前所發現的。爲熟悉此公式，我們舉三個邊長爲整數的三角形加以說明：

例：若a＝3，b＝4，c＝5　$S=\frac{1}{2}(a+b+c)=6$，則

$$a\triangle ABC=\sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}=6$$

例：若a＝5，b＝6，c＝7　$S=\frac{1}{2}(5+6+7)=9$，則

$$a\triangle ABC=\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}=6\sqrt{6}$$

例：若a＝5，b＝5，c＝8　$S=\frac{1}{2}(5+5+8)=9$，則

$$a\triangle ABC=\sqrt{9(9-5)(9-5)(9-8)}=12$$

縱觀前面三個例子，我們發現：邊長為整數之三角形，它的面積未必是整數。但是，很明顯的有一個問題，即

※到底三角形之邊長為那些整數時，才能使其面積亦為整數呢？※

㈡整數三角形之定義：

為徹底了解此一問題，我們把三角形歸類為兩種：

(A)直角三角形。

(B)非直角三角形。

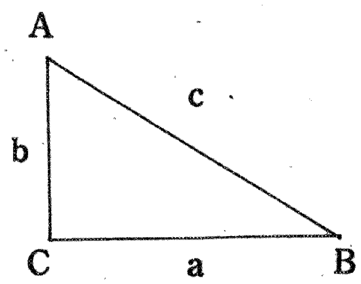
在探討之前，我們先作如下之定義：

定義：邊長為整數且面積為整數之三角形叫"整數三角形"。

㈢直角整數三角形之求法及規律性：

(A)當直角三角形時，其邊長若為 a b c（如下圖）得知

$$a\triangle ABC=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\sin 90^\circ=\frac{1}{2}ab$$



因此我們只要得知 a b 之中是否至少有一為偶數，即可推知 $a\triangle ABC$ 是否為整數。

定理 1：直角三角形$\triangle ABC$若 $a^2+b^2=c^2$ 則 a b 兩者中至少有一為偶數。

證明：假設定理 1 敘述不真，即 a b 均為奇數，可令 $a=2k+1$，$b=2\ell+1$（$k,\ell\in N\cup\{0\}$）代入 $a^2+b^2=c^2$ 得

$c^2=a^2+b^2=(2k+1)^2+(2\ell+1)^2=4(k^2+\ell^2+k+\ell)+2$

又對於任一正整數 C，C 可表成 $4m+1$ 或 $4m+2$ 或 $4m+3$ 或 $4m$（$m\in N\cup\{0\}$）四者之中恰有一成立。但

$(4m+1)^2=4^2m^2+8m+1=4(4m^2+2m)+\underset{\sim}{1}$

$(4m+2)^2=4^2m^2+16m+4=4(4m^2+4m+1)+\underset{\sim}{0}$

$(4m+3)^2=4^2m^2+24m+9=4(4m^2+6m+2)+\underset{\sim}{1}$

$(4m)^2=4(4m^2)+\underset{\sim}{0}$

由上述可知對於任一正整數C，其平方值被4除餘2者並不存在。故假設錯誤。

$\therefore$ a,b 兩者之中必有一為偶數

由定理1知 $a\triangle ABC=\frac{1}{2}ab$ 為整數，故邊長為整數之直角三角形必為整數三角形。

(B)直角整數三角形之求法

(1)若 $a^2+b^2=c^2$ 則 $(ka)^2+(kb)^2=(kc)^2$ $(k\in N)$

因此要求所有直角整數三角形只需求 $(a,b,c)=1$ 之所有解，再取k值，使ka，kb，kc 為直角三角形之三邊，而求得所有的直角三角形。我們定"若 $(a,b,c)=1$，$a^2+b^2=c^2$；則稱a，b，c為一組母數"。

(2)我們如何找 (a,b,c) 呢？

從拉格蘭日恒等式（Lagrange idendity）正整數解之方法，即 $x^2+y^2=z^2$ 之正整數解可由恒等式 $(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)=(x_1x_2+y_1y_2)^2-(x_1y_2-y_1x_2)^2$ 得之。因令 $x_1=m$，$y_1=n$，$x_2=n$，$y_2=m$ 代入得 $(m^2+n^2)(n^2+m^2)=(mn+nm)^2+(mm-nn)^2$ 即 $(m^2+n^2)^2=(2mn)^2+(m^2-n^2)^2$ 所以我們可令 $a=2mn$，$b=m^2-n^2$，$c=m^2+n^2$

(3)定理2：

1. $a^2+b^2=c^2$ 之正整數解若適合 $(a,b,c)=1$，

$a=2mn$，$b=m^2-n^2$，$c=m^2+n^2$，其中$(m,n)=1$，$m>n>0$，則m,n 爲一奇一偶，反之亦然。

2. 如此之數對(a,b,c)與(m,n)成一一對應，即不同之(m,n)對應於不同之(a,b,c)。

證明：

1. 因$a=2mn$爲偶數，又已知$(a,b,c)=1$，所以b,c至少有一爲奇數。

(1)(i)若b爲奇數，因$a^2+b^2=c^2$

$\therefore c^2=a^2+b^2$　　$\therefore c$亦爲奇數

(ii)若c爲奇數，因$a^2+b^2=c^2$

$\therefore b^2=c^2-a^2$　　$\therefore b$亦爲奇數

所以b,c皆爲奇數

(2)(i)因b,c皆爲奇數，

故 $\dfrac{c+b}{2}$，$\dfrac{c-b}{2}$ 亦爲整數

又　$a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b)$

$\Rightarrow$　$\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=\dfrac{c+b}{2}\cdot\dfrac{c-b}{2}$；

令　$u=\dfrac{c+b}{2}$，$v=\dfrac{c-b}{2}$

則$c=u+v$，$b=u-v$；但b,c均爲奇數

故u,v中有一奇一偶

(ii)若$(u,v)=d>1$，即$d\mid u$，$d\mid v \Rightarrow d\mid u+v=c$；$d\mid u-v=b$

$\therefore d\mid c$，$d\mid b$，因此$(b,c)\neq 1$　故可令$(b,c)=m>1$，則必$\exists P$（P爲質數），使得$P\mid m$

$\Rightarrow$　$P\mid b, P\mid c$　$\Rightarrow$　$P\mid b^2$　$P\mid c^2$

$\Rightarrow$　$P\mid c^2-b^2=a^2$

$\Rightarrow$　$P\mid a$

既已（a，b，c）＝1，即$P\mid a$為不可能

（$\because P\mid b$，$P\mid c$）

故（b，c）＝1$\Rightarrow$（u，v）$\neq d>1$

即　（u，v）＝1

(iii) $a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b)=2u\cdot 2v$

$\therefore (\frac{a}{2})^2=\frac{c+b}{2}，\frac{c-b}{2}=u\cdot v$

令$\frac{a}{2}=\prod_{i=1}^{r} P_i^{b_i}$（$P_1$，$P_2$……$P_r$為質數，$b_i\in N\cup\{0\}$）〔為質因數表示法〕

$\therefore u\cdot v=(\frac{a}{2})^2=(\prod_{i=1}^{r} P_i^{b_i})^2=\prod_{i=1}^{r} P_i^{2b_i}$

再令$u=\prod_{i=1}^{r} P_i^{c_i}$，$v=\prod_{i=1}^{r} P_i^{d_i}$代入上式得

$(\prod_{i=1}^{r} P_i^{c_i})(\prod_{i=1}^{r} P_i^{d_i})=(\prod_{i=1}^{r} P_i^{2b_i})\quad\Rightarrow$

$c_i+d_i=2b_i$（c_i，$d_i\in N\cup\{0\}$）

(iv)假若c_i，d_i對某一i而言均非0時，則存在質數P_i，使$P_i\mid u$，$P_i\mid v$，此又與(ii)的（u，v）＝1不合，因此對任一i而言，恰有

$\begin{cases} c_i=2b_i \\ d_i=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} c_i=0 \\ d_i=2b_i \end{cases}$ 成立。故可令

$\begin{cases} c_i=2u_i \\ d_i=2v_i \end{cases}$（$u_i$，$v_i\in N\cup\{0\}$）

所以$u=\prod_{i=1}^{r} P_i^{c_i}=\prod_{i=1}^{r} P_i^{2u_i}=(\prod_{i=1}^{r} P_i^{u_i})^2$

$v=\prod_{i=1}^{r} P_i^{d_i}=\prod_{i=1}^{r} P_i^{2v_i}=(\prod_{i=1}^{r} P_i^{v_i})^2$

卽得$\frac{c+b}{2}$（$=u$），$\frac{c-b}{2}$（$=v$）皆爲完全平方數，且爲一奇一偶。

(3)所以我們可以令$\frac{b+c}{2}=m^2$，$\frac{c-b}{2}=n^2$，且由(2)得知$m>n>0$，且$(m,n)=1$，m，n爲一奇一偶。

(4)反之，若$a=2mn$，$b=m^2-n^2$，$c=m^2+n^2$，其中$(m,n)=1$，$m>n>0$，m，n爲一奇一偶，則$a^2+b^2=(2mn)^2+(m^2-n^2)^2=(m^2+n^2)=c^2$，又$a=2mn$爲偶數，所以若$(a,b,c)=d$，則

$$d\mid m^2-n^2,\ d\mid m^2+n^2 \quad\Rightarrow\quad d\mid 2(m^2,n^2);$$

因$(m,n)=1$，故$d\mid 2$，得$d=1$或$d=2$，但m，n爲一奇一偶，故b，c皆爲奇數，故$d=2$不合，所以$d=1$，卽$(a,b,c)=1$

2若(m_1,n_1)及(m_2,n_2)表一組解，則$\frac{b+c}{2}=m_1^2=m_2^2$；$\frac{c-b}{2}=n_1^2=n_2^2$，故$m_1=m_2$，$n_1=n_2$（$\because m_1,m_2,n_1,n_2$皆爲正數），而求得$m$，$n$之唯一性。

(C)由上述定理說明：只要找出任一正整數m，n，且$(m,n)=1$，$m>n$，$m\,n$一奇一偶，則$2mn$，m^2-n^2，m^2+n^2，必可唯一地構成直角三角形之三邊a，b，c；而其面積$\triangle=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}(2mn)(m^2-n^2)=mn(m^2-n^2)$亦爲整數。

如果再取ka，kb，kc爲另一三角形之邊長，則此三角形之面積亦必爲整數（固因$\triangle'=\frac{1}{2}a'b'=\frac{1}{2}(ka)(kb)=\frac{1}{2}k^2(ab)=k^2\triangle$），此時我們稱$a$，$b$，$c$爲$ka$，$kb$，$kc$之母數

，稱 ka，kb，kc 爲 a，b，c 之衍生數（亦即由 a，b，c 之 k 倍衍生而得）。

因此我們只要由 k 值之設定，即可求出 a，b，c 衍生而得的所有直角整數三角形。

例： 取 $m=2$，$n=1$，則

$$a=2mn=2\cdot 2\cdot 1=4$$
$$b=m^2-n^2=2^2-1^2=3$$
$$c=m^2+n^2=2^2+1^2=5$$

於是我們得一組母數 3－4－5，其面積 $\triangle=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=6$

今我們再取 $k=2$，則

$$a'=2\cdot 4=8$$
$$b'=2\cdot 3=6$$
$$c'=2\cdot 5=10$$

而 $8^2+6^2=100=10^2$ $\quad\therefore a', b', c'$ 亦爲一直角三角形

其面積 $\triangle'=\frac{1}{2}a'b'=\frac{1}{2}\times 8\times 6=24$

故 6－8－10 爲 3－4－5 之一衍生數。

表(一) 斜邊長不大於100之直角整數三角形

個數	種	類　公式	m	n	$a=2mn$ 或 $a'=ka$	$b=m^2-n^2$ 或 $b'=kb$	$c=m^2+n^2$ 或 $c'=kc$	$\triangle=\frac{1}{2}ab$ 或 $\triangle'=k^2\triangle$
1	A	母數	2	1	4	3	5	6
2	A	衍生數（k=2）			8	6	10	4×6
3	A	〃（k=3）			12	9	15	9×6
4	A	〃（k=4）			16	12	20	16×6
5	A	〃（k=5）			20	15	25	25×6
6	A	〃（k=6）			24	18	30	36×6
7	A	〃（k=7）			28	21	35	49×6
8	A	〃（k=8）			32	24	40	64×6

9	A	衍生數（k=9）			36	27	45	81×6
10	A	〃 （k=10）			40	30	50	100×6
11	A	〃 （k=11）			44	33	55	121×6
12	A	〃 （k=12）			48	36	60	144×6
13	A	〃 （k=13）			52	39	65	169×6
14	A	〃 （k=14）			56	42	70	196×6
15	A	〃 （k=15）			60	45	75	225×6
16	A	〃 （k=16）			64	48	80	256×6
17	A	〃 （k=17）			68	51	85	289×6
18	A	〃 （k=18）			72	54	90	324×6
19	A	〃 （k=19）			76	57	95	361×6
20	A	〃 （k=20）			80	60	100	400×6
21	B	母 數	4	1	8	15	17	60
22	B	衍生數（k=2）			16	30	34	4×60
23	B	〃 （k=3）			24	45	51	9×60
24	B	〃 （k=4）			32	60	68	16×60
25	B	〃 （k=5）			40	75	85	25×60
26	C	母 數	6	1	12	35	37	210
27	C	衍生數（k=2）			24	70	74	4×210
28	D	母 數	8	1	16	63	65	504
29	E	〃	3	2	12	5	13	30
30	E	衍生數（k=2）			24	10	26	4×30
31	E	〃 （k=3）			36	15	39	9×30
32	E	〃 （k=4）			48	20	52	16×30
33	E	〃 （k=5）			60	25	65	25×30
34	E	〃 （k=6）			72	30	78	36×30
35	E	〃 （k=7）			84	35	90	49×30
36	F	母 數	5	2	20	21	29	210
37	F	衍生數（k=2）			40	42	58	4×210

38	F	衍生數（k＝3）			60	63	87	9×210
39	G	母　　　　數	7	2	28	45	53	630
40	H	〃	9	2	36	77	85	1386
41	I	〃	4	3	24	7	25	84
42	I	衍生數（k＝2）			48	14	50	4×84
43	I	〃　（k＝3）			72	21	75	9×84
44	I	〃　（k＝4）			96	28	100	16×84
45	J	母　　　　數	8	3	48	55	73	1320
46	K	〃	5	4	40	9	41	180
47	K	衍生數（k＝2）			80	18	82	4×180
48	L	母　　　　數	7	4	56	33	65	924
49	M	〃	9	4	72	65	97	2340
50	N	〃	6	5	60	11	61	330
51	O	〃	8	5	80	39	89	1560
52	P	母　　　　數	7	6	84	13	85	546

由前頁的數據我們可以發現：若是只由m，n之設定而想求得所有的直角整數三角形是不可能的。這可分成下面三種情況：

(i)m，n找不到正整數解，但却有此三角形存在者：

例如：12－9－15這個三角形

由前面我們所設的 $a=2mn$，$b=m^2-n^2$，$c=m^2+n^2$，我們可以得到

$$\left.\begin{array}{l} m^2-n^2=9 \cdots\cdots① \\ m^2+n^2=15\cdots\cdots② \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} ①+②：2m^2=24 \\ ②-①：2n^2=6 \end{array} \Rightarrow 得$$

$m=\pm\sqrt{12}$，$n=\pm\sqrt{3}$ 皆爲不整數，因此有這類三角形存在。

(ii)找得到m，n之正整數解，但（m，n）≠1，而仍有此三角形存在者：

例如：16－12－20　這個三角形，我們有：

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = 12 \cdots\cdots ① \\ m^2 + n^2 = 20 \cdots\cdots ② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ①+②：2m^2 = 32 \\ ②-①：2n^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow 得$$

$m = 4$，$n = 2$ 皆爲正整數

但 $(m, n) = (4, 2) = 2 \neq 1$，因此有這類三角形存在

(iii)找得到m，n之正整數解，且 $(m, n) = 1$，但m，n却皆爲奇數而仍有此三角形存在者：

例如：取 $m = 3$，$n = 1$，則3，1皆爲正整數且 $(3, 1) = 1$；3，1皆奇數

又
$$\begin{aligned} a &= 2mn = 6 \\ b &= m^2 - n^2 = 8 \\ c &= m^2 + n^2 = 10 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 6^2 + 8^2 = 10^2 \\ \therefore 爲直角三角形 \\ \triangle = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\cdot 6 \cdot 8 \\ = 24 \quad \therefore 爲整數三角形 \end{cases}$$

$\therefore$ 6－8－10亦爲直角整數三角形

故有這類三角形存在。

從上面這三種情況看來，由“衍生”的方法來求得m，n所不能及的直角整數三角形是一項十分重要的步驟，也由於“衍生”方法的奏功，我們才得以在尋求直角整數三角形的過程當中獲得相當的完整性。

例：(i)中之12－9－15即爲4－3－5之衍生數（其 $k = 3$）

(ii)中之16－12－20即爲4－3－5之衍生數（其 $k = 4$）

(iii)中之8－6－10即爲4－3－5之衍生數（其 $k = 2$）

此外我們也發現：若取 $a' = k^2a$，$b' = k^2b$，$c' = k^2c$，則其 $m' = km$ 且 $n' = kn$。如下表：

公式 ＼ 種類	A	A	A	A	B	B	B	B
$a = 2mn$	4	16	36	64	12	48	108	192
$b = m^2 - n^2$	3	12	27	48	5	20	45	80
$c = m^2 + n^2$	5	20	45	80	13	52	117	208
$\triangle = \frac{1}{2}ab$	6	96	486	1536	30	480	2430	7680

m	2	4	6	8	3	6	9	12
n	1	2	3	4	2	4	6	8
（k 值）		2	3	4		2	3	4

但是爲什麼會出現這種現象呢？這是因爲：

如果我們取 $m'=km$，$n'=kn$，則

$$a'=2m'n'=2(km)(kn)=k^2(2mn)=k^2a$$

$$b'=m'^2-n'^2=(km)^2-(kn)^2=k^2(m^2-n^2)=k^2b$$

$$c'=m'^2+n'^2=(km)^2+(kn)^2=k^2(m^2+n^2)=k^2c$$

$$S'=\frac{1}{2}(a'+b'+c')=\frac{1}{2}(k^2a+k^2b+k^2c)$$

$$=k^2\cdot\frac{1}{2}(a+b+c)=k^2S$$

得 $\triangle'=\sqrt{S'(S'-a')(S'-b')(S'-c')}$

$$=\sqrt{k^2S(k^2S-k^2a)(k^2S-k^2b)(k^2S-k^2c)}$$

$$=\sqrt{k^{16}\cdot S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$=k^4\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$=k^4\triangle$$

因此若 $m'=km$，$n'=kn$，我們即可得到：

$a'=k^2a$　$b'=k^2b$　$c'=k^2c$，而

$\triangle'=k^4\triangle$

(四)非直角整數三角形之求法及其規律性：

一般整數三角形可由 $x^2+y^2+z^2=w^2$ 之正整數解求出無窮多組

(A)爲簡易求出無窮組解整數三角形，我們假設在黑龍公式中 $\triangle=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$ 之 S，$S-a$，$S-b$，$S-c$，均「恰巧」爲完全平方數，則根號內爲完全平方數，故 $\triangle$ 爲整數，此時可令：$S=w^2$；$S-a=x^2$；$S-b=y^2$；$S-c=z^2$；則 $\triangle=\sqrt{w^2x^2y^2z^2}=wxyz$，且 $x^2+y^2+z^2=(S-a)+(S-b)+(S-c)=3S-(a+b+c)=3S-$

$2S=S=w^2$，故 x，y，z，w 爲任意正整數，且須滿足 $x^2+y^2+z^2=w^2$

又 $S=w^2 \Rightarrow a+b+c=2w^2>0$

$S-a=x^2 \Rightarrow b+c-a=2x^2>0$

$S-b=y^2 \Rightarrow c+a-b=2y^2>0$

$S-c=z^2 \Rightarrow a+b-c=2z^2>0$

且 $a=w^2-x^2>0$，$b=w^2-y^2>0$，$c=w^2-z^2>0$

而我們從 $b+c-a>0$，$c+a-b>0$，$a+b-c>0$，可以知道 a，b，c 可爲某三角形之三邊長，因此若能解決 $x^2+y^2+z^2=w^2$ 之正整數解的問題，則此整數三角形的問題卽可迎刄而解（取三邊 $a=w^2-x^2$，$b=w^2-y^2$，$c=w^2-z^2$）。

(B)“$x^2+y^2+z^2=w^2$”之正整數解

對於這個問題我們可用兩種方法求出：

(I)用 P_2 之“$x^2+y^2=z^2$之正整數解”之方法：

1.當 x^2+y^2 爲完全平方數時

令 $x^2+y^2=t^2$，則 $x=2mn$，$y=m^2-n^2$，$t=m^2+n^2$，$(m,n)=1$，$m>n$

且 m，n 爲一奇一偶。

又 $w^2=x^2+y^2+z^2=t^2+z^2 \Rightarrow t^2+z^2=w^2$，故

$t=r^2-s^2$，$z=2rs$，$w^2=r^2+s^2$，$(r,s)=1$

$r>s$，r，s 一奇一偶。

而 $t=m^2+n^2=r^2-s^2$，又因 $t=m^2+n^2$ 爲奇數，所以 $\frac{t+1}{2}$、$\frac{t-1}{2}$ 均爲整數，且 $t=\left(\frac{t+1}{2}\right)^2-\left(\frac{t-1}{2}\right)^2=r^2-S^2$

故令 $r=\frac{t+1}{2}=\frac{m^2+n^2+1}{2}$　$S=\frac{t-1}{2}=\frac{m^2+n^2-1}{2}$

則 $z=2\cdot\frac{m^2+n^2+1}{2}\cdot\frac{m^2+n^2-1}{2}=\frac{(m^2+n^2)^2-1}{2}$

得 $w=(\frac{m^2+n^2+1}{2})^2+(\frac{m^2+n^2-1}{2})^2=\frac{(m^2+n^2)^2+1}{2}$

因此 $x^2+y^2+z^2=t^2+z^2=(m^2+n^2)^2+[\frac{(m^2+n^2)^2-1}{2}]^2=[\frac{(m^2+n^2)^2+1}{2}]^2=w^2$

所以若 $(m,n)=1$，$m>n$，mn 一奇一偶，則

"取 $x=2mn$，$y=m^2-n^2$，$z=\frac{(m^2+n^2)^2-1}{2}$，

$w=\frac{(m^2+n^2)^2+1}{2}$ 即可滿足：$x^2+y^2+z^2=w^2$

例：取 $m=2$，$n=1$ $\Rightarrow$ $x=4$，$y=3$，$z=12$）

$w=13$，而 $4^2+3^2+12^2=13^2$ 成立

例：取 $m=3$，$n=2$ $\Rightarrow$ $x=12$，$y=5$，$z=84$，

$w=85$，而 $12^2+5^2+84^2=85^2$ 成立

2.當 x^2+y^2 不爲完全平方數時

令 $x^2+y^2=n$，則 $w^2=x^2+y^2+z^2=n+z^2$ $\Rightarrow$ $n=w^2-z^2=(w+z)(w-z)$，故 w 與 z 之正整數解視 n 值而定。（即 w 與 z 之正整數解有時存在，有時不存在。

例：$x=1$，$y=2$，$x^2+y^2=5$，$5=(w+z)(w-z)$ 因 w，z 爲正整數

$\therefore \begin{cases} w+z=5 \\ w-z=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} w+z=1 \\ w-z=5 \end{cases}$ 得 $w=3$，$z=2$

故有正整數解

例：$x=1$，$y=1$，$x^2+y^2=2$，$2=(w+z)(w-z)$

因 w，z 爲正整數

$\therefore \begin{cases} w+z=2 \\ w-z=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} w+z=1 \\ w-z=2 \end{cases}$ 得 $w=\frac{3}{2}$，$z=\frac{1}{2}$ 或

$w=\frac{3}{2}$，$z=\frac{-1}{2}$ 故無正整數解

(II)用拉格蘭日恒等式（Lagrange idendity）正整數解之方法

由恒等式 $(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)=(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4)^2+(x_1y_2-x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3)^2+(x_1y_3-x_3y_1+x_4y_2-x_2y_4)^2+(x_1y_4-x_4y_1+x_2y_3-x_3y_2)^2$

中，令 $x_1=p$，$x_2=q$，$x_3=r$，$x_4=s$；再令

$y_1=q$，$y_2=p$，$y_3=s$，$y_4=r$ 代入式中，得

$(p^2+q^2+r^2+s^2)(q^2+p^2+s^2+r^2)=(pq+qp+rs+sr)^2+(pp-qq+rr-ss)^2+(ps-rq+sp-qr)^2+(pr-sq+qs-rp)^2$

整理得 $(p^2+q^2+r^2+s^2)^2=(2pq+2rs)^2+(p^2-q^2+r^2-s^2)^2+(2ps-2qr)^2$

所以若 p，q，r，s 爲任意正整數或至多有一爲 0，且

$(p,q,r,s)=1$；$p^2+r^2>q^2+s^2$ $ps>qr$，則

$w=p^2+q^2+r^2+s^2$，$x=2pq+2rs$，$y=p^2-q^2+r^2-s^2$

$z=2ps-2qr$

爲 $x^2+y^2+z^2=w^2$ 之一組正整數解。

例：$p=1$，$q=0$，$r=1$，$s=1$ 則 $x=2$，$y=1$，$z=2$，$w=3$， 有 $2^2+1^2+2^2=3^2$

例：$p=2$，$q=0$，$r=1$，$s=1$，則 $x=2$，$y=4$，$z=4$，$w=6$ 有 $2^2+4^2+4^2=6^2$

又當 p，q，r，s 有兩個爲 0 時，w，x，y，z 之關係可能縮爲“$x^2+y^2=z^2$”之形式，也就是直角三角形的三邊。這在前面已經討論過了，在此不再複述。

例：$p=2$，$q=0$，$r=0$，$s=1$，則 $x=0$，$y=3$，$z=4$，$w=5$，$3^2+4^2=5^2$

(C)一般整數三角形的一個公式解

若 p，q，r，s 爲任意正整數或至多有一爲 0，且 $(p,q,r,s)=1$，$p^2+r^2>q^2+s^2$，$ps>qr$，則令

$w=p^2+q^2+r^2+s^2$，$x=2pq+2rs$，$y=p^2-q^2+r^2-s^2$；

$z=2ps-2qr$

令 $a=w^2-x^2$

$b=w^2-y^2$

$c=w^2-z^2$　　以 a，b，c 爲三邊之三角形爲整數三角形

又若有一個三角形以 ka，kb，kc（$k\in N$）爲三邊，我們發現

$$\because\quad S'=\frac{1}{2}(ka+kb+kc)=k\cdot\frac{1}{2}(a+b+c)=ks$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \triangle'&=\sqrt{S'(S'-ka)(S'-kb)(S'-kc)}\\&=\sqrt{ks(ks-ka)(ks-kb)(ks-kc)}\\&=\sqrt{k^4s(s-a)(s-b)(s-c)}\\&=k^2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\&=k^2\triangle\end{aligned}$$
亦爲整數

故以 ka，kb，kc 爲三邊之三角形，亦爲整數三角形（我們可以稱它爲 a，b，c 之一組衍生數）

例：$p=1$，$q=0$，$r=1$，$s=1$，則 $x=2$，$y=1$，$z=2$，$w=3$

$a=w^2-x^2=8$

$b=w^2-y^2=5$

$c=w^2-z^2=5$

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c)=9$$

$$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{9\cdot1\cdot4\cdot4}=12$$

故 8－5－5 爲邊長之三角形爲整數三角形（因 $8^2\neq5^2+5^2$ 故非直角三角形）

又取 $k=2$

$a'=ka=2\cdot8=16$

$b'=kb=2\cdot5=10$

$c'=kc=2\cdot5=10$

$$s'=\frac{1}{2}(16+10+10)=18$$

$$\triangle'=k^2\triangle=4\cdot12=48$$

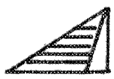
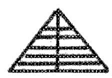
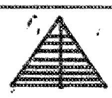
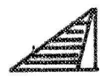
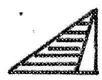
故邊長爲 16－10－10（爲 8－5－5 衍生數）之三角亦爲整數

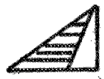
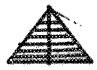
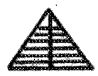
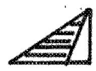
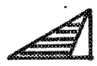
表(二) 爲數個一般整數三角形之實例

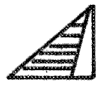
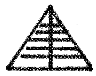
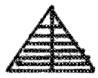
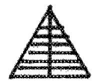
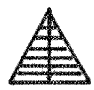
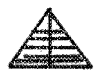
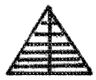
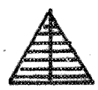
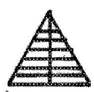
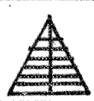
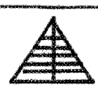
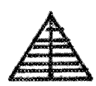
公式 / 種類	p	q	r	s	$x=2pq+2rs$	$y=p^2-q^2+r^2-s^2$	$z=2ps-2qr$	$w=p^2+q^2+r^2+s^2$	a	b	c	s	△
母數	1	0	1	1	2	1	2	3	8	5	5	9	12
衍生數 (k=2)									16	10	10	18	48
〃 (k=3)									24	15	15	27	108
〃 (k=4)									32	20	20	36	192
母數	2	1	1	1	6	3	2	7	13	40	45	49	252
衍生數 (k=2)									26	80	90	98	1008
〃 (k=3)									39	120	135	147	2268
〃 (k=4)									52	160	180	196	4032
母數	1	0	2	1	4	4	2	6	20	20	32	36	192
衍生數 (k=2)									40	40	64	72	768
〃 (k=3)									60	60	96	108	1728
〃 (k=4)									80	80	128	144	3072
母數	2	1	0	1	4	2	4	6	20	32	20	36	192
衍生數 (k=2)									40	64	40	72	768
〃 (k=3)									60	96	60	108	1728
〃 (k=4)									80	128	80	144	3072
母數	3	2	1	2	16	2	8	18	68	320	260	324	4608
衍生數 (k=2)									136	640	520	648	18432
〃 (k=3)									204	960	780	972	41472
〃 (k=4)									272	1280	1040	1296	73728

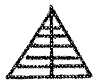
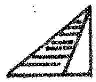
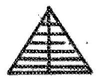
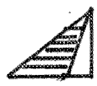
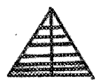
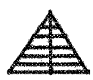
㈤三邊長不大於 100 之一般整數三角形之規律性。

表 ㈢

a	b	c	$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$	$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$	分類：直角整數三角形	分類：編號	分類：非直角整數三角形	周長 ‖ 面積	融合 ( 或 )：種類	融合：融合之編號
3	4	5	6	6=6×1	√	①				
3	25	26	27	36=6×6			√			{②×2 ③×1
4	13	15	16	24=6×4			√			{①×5 ②×1
5	5	6	18	12=6×2			√			{①×1 ①×1
5	5	8	9	12=6×2			√			{①×1 ①×1
5	12	13	15	30=6×5	√	②		√		
5	29	30	32	72=6×12			√			{③×⅕ (24·143·145)⅕
6	8	10	12	24=6×4	√			√		
6	25	29	30	60=6×10			√	√		{⑦×1 ①×5
6	50	52	54	144=6×24			√			{②×4 ③×2
7	15	20	20	42=6×7			√	√		{①×4 ①×3
7	24	25	25	84=6×14	√	③				
8	15	17	17	60=6×10	√	④				

8	26	30	30	96=6×16			√			{ ①×10 ②×2
8	29	35	35	84=6×14			√			{ ①×7 ⑦×1
9	10	17	17	36=6×6			√	√		{ ①×2 ④×1
9	12	15	15	54=6×9	√					
9	40	41	41	180=6×30	√	⑤				
10	10	12	12	48=6×8			√			{ ①×2 ①×2
10	10	16	16	48=6×8			√			{ ①×2 ①×2
10	13	13	13	60=6×10			√			{ ②×1 ②×1
10	17	21	21	84=6×14			√			{ ①×2 ④×1
10	24	26	26	120=6×20	√					
10	35	39	39	168=6×28			√			{ (112,441,455) 1/13 (33,56,65) 2/13
11	13	20	20	66=6×11			√			{ ②×1 ①×4
11	25	30	30	132=6×22			√			{ ①×6 ③×1
12	16	20	24	96=6×16	√					
12	17	25	27	90=6×15			√			{ ①×5 ④×1
12	35	37	42	210=6×35	√	⑥				

12	39	45	48	216=6×36			√			①×9 ②×3
13	13	24	25	60=6×10			√			②×1 ②×1
13	14	15	21	84=6×14			√			②×1 ①×3
13	20	21	27	126=6×21			√			①×4 ②×1
13	30	37	40	180=6×30			√			⑥×10/37 (319,360, 481) $\frac{1}{37}$
13	37	40	45	240=6×40			√			⑥×1 ②×1
13	40	45	49	252=6×42			√			(33,56,65)×2/15 ③×8/5
15	15	18	24	108=6×18			√			①×3 ①×3
15	15	24	27	108=6×18			√			①×3 ①×3
15	26	37	44	156=6×26			√			(104,153, 185)3/37 156,455, 481)2/37
15	20	25	30	150=6×25	√					
15	28	41	42	126=6×21			√			⑤×28/41 (84,187, 205)×3/41
15	34	35	42	252=6×42			√			③×3/5 (204,253, 325)×2/13
15	36	39	45	270=6×45	√					
15	37	44	48	264=6×44			√			①×3 ⑥×1
16	17	17	25	60=6×10			√			④×1 ④×1

16	25	39	40	120=6×20			√			②×3 ①×5
16	30	34	80	240=6×40	√					
17	17	30	32	120=6×20			√			④×1 ④×1
17	25	26	34	204=6×34			√			(85,204,211)9/13 (204,253,325)×2/13
17	25	28	35	210=6×35			√			①×5 ④×5
17	39	44	50	330=6×55			√			④×1 ②×3
17	40	41	49	336=6×56			√			137,84,205)8/41 (185,672,697)1/41
18	20	34	36	144=6×24			√			①×4 ④×2
18	24	30	36	216=6×36	√					
18	41	41	50	360=6×60			√			⑤ ⑤
19	20	37	38	114=6×19			√			⑥ ①×4
20	20	24	32	192=6×32			√			①×4 ①×4
20	20	32	36	192=6×32			√			①×4 ①×4
20	21	29	35	210=6×35	√	⑦				
20	34	42	48	336=6×56			√			①×4 ④×2
21	28	35	42	294=6×49	√					

24	32	40	48	384=6×64	√					
24	37	37	49	336=6×56			√			{ ⑥ ⑥
25	25	14	32	168=6×28			√			{ ③ ③
25	25	30	40	300=6×50			√			{ ①×5 ①×5
25	25	40	45	300=6×50			√			{ ①×5 ①×5
25	25	48	49	168=6×28			√			{ ③ ③
25	29	36	45	360=6×60			√			{ ⑦ ①×5
30	30	36	48	432=6×72			√			{ ①×6 ①×6
32	34	34	50	480=6×80			√			{ ④×2 ④×2
29	29	40	49	420=6×70			√			{ ⑦×2 ⑦×2
29	29	42	50	420=6×70			√			{ ⑦×2 ⑦×2

由上表我們可以發現幾項重要的規律性，現在分述於後：

(A)在所有整數三角形當中，其面積之值恰好等於三邊長之和者，正好只有5組（即最多5組，且至少5組）。經過我們一番探討後，可證明如下：

〔證明〕：已知$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=a+b+c=2s$

令 $\begin{cases} s-a=x \\ s-b=y \\ s-c=z \end{cases}$ ⇨ 三式相加得 $x+y+z=3s-(a+b+c)=3s-2s=s$

則$\triangle=\sqrt{(x+y+z)\cdot x\cdot y\cdot z}=2(x+y+z)$

平方得：$(x+y+z)xyz=4(x+y+z)^2$；又因 $s \neq 0$，故 $x+y+z \neq 0$

$\therefore xyz=4(x+y+z)$……①

又 x，y，z 可能全為整數或分母為2的分數（這全決定於 s 是整數呢？還是分母為2的分數？）但若 s 是分母為2的分數，則①式之左邊為一分母為8之分數（$\because \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$），而右邊却為一個整數（$\because 4(x+y+z)=4s$ 為整數）這顯然不合理，故 x，y，z 皆為整數。

又

$$x=s-a=\frac{1}{2}(b+c-a)>0$$

$$y=s-b=\frac{1}{2}(a+c-b)>0$$

$$z=s-c=\frac{1}{2}(a+b-c)>0$$

（因兩邊長之和大於第三邊，故 $\begin{cases} b+c>a \\ a+c>b \\ a+b>c \end{cases}$）

$\therefore$ x，y，z 皆為正整數

故設 $x \geq y \geq z > 0$（$\because x$，y，z 為任意正整數，$\therefore$ 可如此設定）……………………………………②

又①可改為 $x(yz-4)=4y+4z \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{4y+4z}{yz-4}$

由②之 $x \geq y$ 得 $\dfrac{4y+4z}{yz-4} \geq y$

又因 $4y+4z=$（正數）+（正數）>0，且 $\dfrac{4y+4z}{yz-4}=x>0$

故得 $yz-4>0$

故可將上式兩邊各乘 $(yz-4)$（$\because$ 不等式兩邊各乘正數則不等號方向不變）

得 $4y+4z \geq y(yz-4)$ 即 $y^2z-8y-4z \leq 0$ ………③

我們又可將此 y 之不等式改寫成 $(y-y_1)(y-y_2) \leq 0$

（其中 y_1，y_2 表示 $zy^2-8y-4z=0$ 之兩根（z 爲定值））

則 $y_1=\dfrac{4+\sqrt{16+4z^2}}{z}$，$y_2=\dfrac{4-\sqrt{16+4z^2}}{z}$

但因 $\sqrt{16+4z^2}>\sqrt{16+0}$ ， $\therefore y_2=\dfrac{4-\sqrt{16+4z^2}}{z}$ 爲負

$\therefore y-y_2=y+(-y_2)=$（正數）+（正數）$>0$

故 $(y-y_1)(y-y_2) \leq 0$ 之條件爲 $y-y_1 \leq 0$　即 $y \leq y_1$

$\therefore\quad y \leq \dfrac{4+\sqrt{16+4z^2}}{z} \Rightarrow z \cdot z \leq y \cdot z \leq 4+\sqrt{16+4z^2}$

即　$z^2 \leq 4+\sqrt{16+4z^2}$

得　$z^2-4 \leq \sqrt{16+4z^2} \Rightarrow z^4-8z^2+16 \leq 16+4z^2 \Rightarrow$

$z^4 \leq 12z^2 \Rightarrow z^2 \leq 12$

又因 z 爲正整數，故 $z=1,2,3$（$\because 4^2=16>12$ 故 4 以上皆不合）

(i)當 $z=1$：

$y \leq \dfrac{4+\sqrt{16+4}}{1}<9$， $\therefore y<9$ ……………(a)

又　$x=\dfrac{4y+4z}{yz-4}>0$　且 $4y+4z>0$　$\therefore yz-4>0$

即　$y-4>0$　$\therefore y>4$ ………(b)；由(a)(b)得 $4<y<9$

1. $y=5 \Rightarrow x=24$　　　2. $y=6 \Rightarrow x=14$

3. $y=7 \Rightarrow x=\dfrac{32}{3} \notin N$（不合）　　　4. $y=8 \Rightarrow x=9$

(ii)當 $z=2$：

$y \leq \dfrac{4+\sqrt{16+4 \cdot 4}}{2}<5$　　$\therefore y<5$ ………(c)；

又　$x=\dfrac{4y+4z}{yz-4}=\dfrac{4y+8}{2y-4}=\dfrac{2y+4}{y-2}>0$

且 $2y+4>0 \quad \therefore y-2>0 \quad \therefore y>2$ ………(d)

由(c)(d)得 $2<y<5$ 。

1. $y=3 \Rightarrow x=10$ 　　2. $y=4 \Rightarrow x=6$

(iii)當 $z=3$：

$y \leq \dfrac{4+\sqrt{16+4\cdot 9}}{3}<4 \quad \therefore y<4$ ………(e)

又 $y \geq z=3 \quad \therefore y \geq 3$ ………………………(f)

由(e)(f)知 $y=3 \Rightarrow x=\dfrac{24}{5} \notin N$（不合）

綜合(i)(ii)(iii)之結果，我們可以求出這僅有的5組為

$s-a=x$	$s-b=y$	$s-c=z$	$s=x+y+z$	a, b, c	$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
24	5	1	30	6,25,29	60
14	6	1	21	7,15,20	42
9	8	1	18	9,10,17	36
10	3	2	15	5,12,13	30
6	4	2	12	6, 8,10	24

因此我們不但知道了所有整數三角形之中面積等於周長者恰有5組，更找出了這5組極為特殊的三角形。

(B)第二項重要的規律為"直角整數三角形之面積必為6之倍數"。

〔證明〕：由定理1得知 a 為偶數

b 為奇數

c 為奇數

又 $\triangle=\dfrac{1}{2}ab$

但因 $\begin{cases} a=2mn \\ b=m^2-n^2 \end{cases}$

故 $\triangle=\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{1}{2}(2mn)(m^2-n^2)=mn(m+n)(m-n)$

因此若mn有一爲3之倍數，則此敍述必成立。（因爲m，n爲一奇一偶，故mn中必有2之因數，詳見定理2）。

現在假設m，n均非3之倍數，則因m、n爲一奇一偶，故顯然下列二式：

$$\begin{cases} m=3t+1\text{（偶）} \\ n=3s+2\text{（奇）} \end{cases} \text{或} \begin{cases} m=3t+2\text{（奇）} \\ n=3s+1\text{（偶）} \end{cases} \text{中必有一式成立}$$

$\therefore \quad m+n=3(t+s+1)$ 爲3之倍數 $\therefore$ 令 $m+n=3\ell$

故 $\triangle=\dfrac{1}{2}ab=(mn)(m+n)(m-n)$

$$=(2k)(3\ell)(m-n)=6k\ell(m-n)$$

$\therefore \triangle$ 爲6之倍數

因此直角整數三角形之面積必爲6之倍數。

(C)當我們列完表㈢而與 P_{11} "一般整數三角形的公式解" 互相校對時，發現邊長爲 10－17－21 這組三角形符合整數三角形的定義，但却無法利用公式求得，見下：

$a=10$

$b=17$

$c=21$

$\Rightarrow \quad s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)=24$

$\Rightarrow \quad \triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{24\cdot14\cdot7\cdot3}$

$=\sqrt{7056}=84$

$\therefore$ 10－17－21 爲整數三角形

又 $\because 10^2+17^2 \neq 21^2 \quad \therefore$ 10－17－21 爲非直角整數三角形

但因 $s=24$

$s-a=14$

$s-b=7$

$s-c=3$

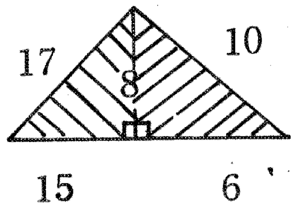
均非完全平方式，故無法以公式求出。

但是我們却發現所有的整數三角形似乎都可由兩個直角整數三角

形融合而成。舉上面的例子爲例：

例：上面所說不能以公式求出之 10－17－21 三角形，其實是 8－15－17 和 3－4－5 的衍生數 6—8—10 之融合，它們之間的圖形關係就如同下圖：

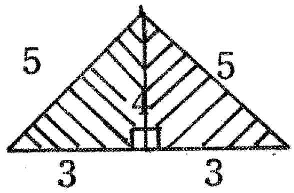
$(10,17,21):\left\{\begin{array}{l}(8,15,17)\\(3,4,5)_{\times 2}\end{array}\right.$ ⇨



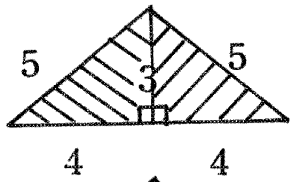
但是這只是一個銳角三角形的例子，以下再舉四個銳角三角形和四個鈍角三角形的例子：

銳　　角

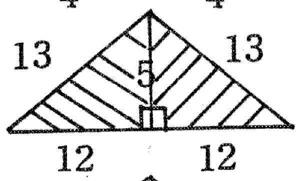
例：$(5,5,6):\left\{\begin{array}{l}(3,4,5)\\(3,4,5)\end{array}\right.$ ⇨



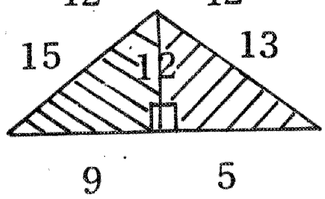
例：$(5,5,8):\left\{\begin{array}{l}(3,4,5)\\(3,4,5)\end{array}\right.$ ⇨



例：$(13,13,24):\left\{\begin{array}{l}(5,12,13)\\(5,12,13)\end{array}\right.$ ⇨

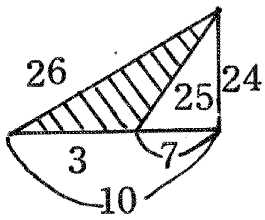


例：$(13,14,15):\left\{\begin{array}{l}(3,4,5)\\(5,12,13)\end{array}\right.$ ⇨

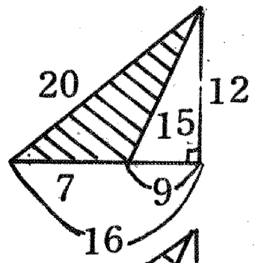


鈍　　角

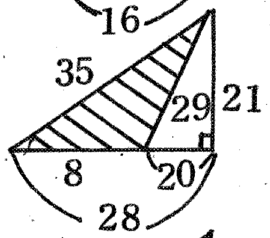
例：$(3,25,26):\left\{\begin{array}{l}(5,12,13)_{\times 2}\\(7,24,25)\end{array}\right.$ ⇨



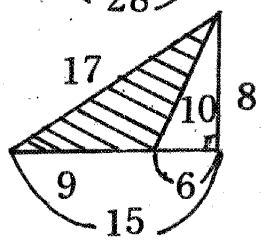
例：$(7,15,20):\begin{cases}(3,4,5)_{\times 4}\\(3,4,5)_{\times 3}\end{cases}$ ⇨



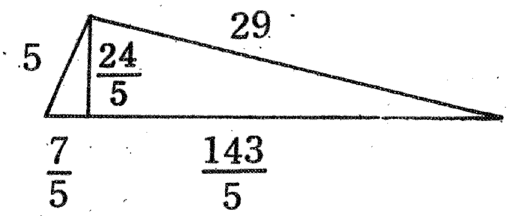
例：$(8,29,35):\begin{cases}(3,4,5)_{\times 7}\\(20,21,29)\end{cases}$ ⇨



例：$(9,10,17):\begin{cases}(8,15,17)\\(3,4,5)_{\times 2}\end{cases}$ ⇨



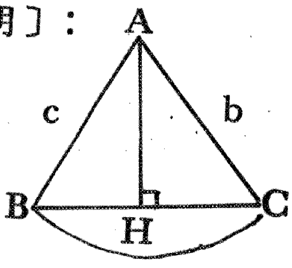
但是否所有的整數三角形都符合上面所說的"融合"關係呢？經過我們的探討，終於找出少數的整數三角形，其所構成的小直角三角形並非整數三角形而是邊長爲有理數的三角形。例如5—29—30它分解後得



因此我們整理出下面的定理。

定理3：任何一個整數三角形都是由兩個邊長皆爲有理數之直角三角形融合而成。

〔證明〕：



已知△ABC爲整數三角形，故a b c和面積(△)皆爲整數。今我們作AH垂直BC於H點。我們有

$$\begin{cases} \overline{AH}=c\cdot\sin B=c\cdot\dfrac{2\triangle}{ac}=\dfrac{2\triangle}{a}\ (\text{因}\triangle=\dfrac{1}{2}a\cdot c\sin B) \\ \overline{BH}=c\cdot|\cos B|=c\cdot\left|\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right|=\dfrac{|c^2+a^2-b^2|}{2a} \\ \overline{CH}=b\cdot|\cos C|=b\cdot\left|\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right|=\dfrac{|a^2+b^2-c^2|}{2a} \end{cases}$$

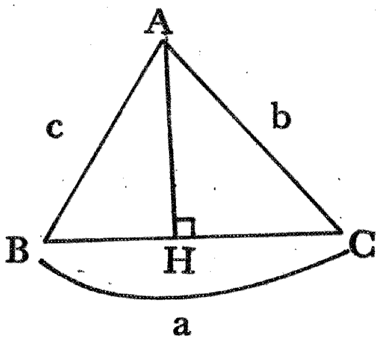
現因 a，b，c，△皆爲整數

故 $\dfrac{2\triangle}{a}$，$\dfrac{|c^2+a^2-b^2|}{2a}$，$\dfrac{|a^2+b^2-c^2|}{2a}$ 皆爲有理數，

即 AH，BH，CH 皆爲有理數

所以△ABH，△ACH 皆爲邊長是有理數的直角三角形。

現在我們知道了任何整數三角形都是由兩個邊長爲有理數的直角三角形融合而成，但是我們要如何求出這兩個直角三角形呢？請看下面的說明：

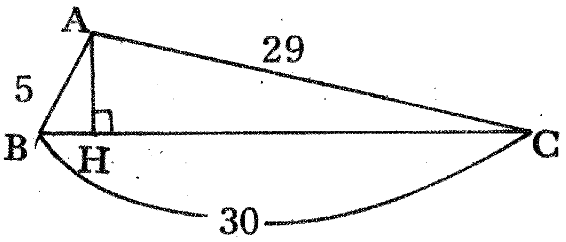


若△ABC爲整數三角形，a，b，c 分別爲 A，B，C 之對邊，$\overline{AH}$ 是 $\overline{BC}$ 邊上的高（如左圖）則

$$\begin{cases} \overline{AH}=\dfrac{2(\triangle ABC\text{面積})}{a} \\ \overline{BH}=\dfrac{|c^2+a^2-b^2|}{2a} \\ \overline{CH}=\dfrac{|a^2+b^2-c^2|}{2a} \end{cases}$$

（詳見前頁之證明）

例：如何求出融合成整數三角形 5－29－30 之兩個直角三角形？我們可以令 a＝30，b＝29，c＝5（如下圖），則 $\triangle=\sqrt{32\times2\times3\times27}=72$



$$\begin{cases} \overline{AH}=\dfrac{2\triangle}{a}=\dfrac{2\times 72}{30}=\dfrac{24}{5} \\ \overline{BH}=\dfrac{|c^2+a^2-b^2|}{2a}=\dfrac{|5^2+30^2-29^2|}{2\times 30}=\dfrac{7}{5} \\ \overline{CH}=\dfrac{|a^2+b^2-c^2|}{2a}=\dfrac{|30^2+29^2-5^2|}{2\times 30}=\dfrac{143}{5} \end{cases}$$

故融合成 5—29—30 之兩個直角三角形（即△ABH及△ACH）爲 $\frac{7}{5}-\frac{24}{5}-5$ 及 $\frac{24}{5}-\frac{143}{5}-29$。

㈥結論：

(A)直角整數三角形可以由㈢之(C)的公式完全求出，且面積必爲 6 之倍數。（詳見㈤之(B)）

(B)非直角整數三角形可以由 2 種方法求出：

(i)用㈣之(C)的公式求出無窮多組母數，再由這些母數求出無窮多組的衍生數。

(ii)但如 10—17—21 這個三角形不能用㈣之(C)的公式解出（詳見㈤之(C)），這時就可以用“融合”的方法去做，即“任何整數三角形皆可由邊長爲有理數的二個直角三角形融合而成”（詳見㈤之(C)）。

(C)在所有整數三角形當中，面積等於周長者恰有 5 組，此 5 組爲：6—25—29；7—15—20；9—10—17；5—12—13；6—8—10。（詳見㈤之(A)）

㈦參考資料：

1. 數論導引（先登出版社）

2. 整數論問題（W. Sierpinski 原著，林聰源譯）
3. 數學趣味問題競試集（吳英格譯）
4. An Introduction to the Theory of Numbers
(Ivan Niven & H. Zuckerman)
5. An Introduction to the Theory of Numbers
(4th edition : Hardy & Wright)
6. Introduction to Anaytic Number Theory (K. Chandrase Kharan)
7. Elementary Theory of Numbers (Le Veque, W.J.)
8. Elementary Introduction to Number Theory (Calvin T. Long)
9. Theory of Numbers (2nd edition : Stewart, B.M.)
10. 整數の問題（宮原繁著）