里曼球面上任意圓
在複數平面上之投影的研究

高中組數學第二名

省立桃園高級中學　　　　作　　者：王勉行、林應泉
劉志亮
指導老師：劉柏堅、陳清海

X　動機

里曼球面在高中數學只是大略提過，上課時談到里曼球面投影，過北極的大圓投影爲一直線，那麼不經北極的大圓投影後圖形爲何？任一小圓的投影又爲何？前幾章講二次曲線，觀察里曼球面上，北極與圓上點的連綫掃出的形狀不應稱圓錐，而應稱爲橢圓錐，而此橢圓錐與複數平面相交的圖形又爲何？問幾位同學，有的說橢圓，有的說不成圖形，有的說成雞蛋形，（一邊曲率半徑較大，另一邊曲率半徑較小），因沒有實際式子，實也難以決定何者正確，隨即著手求證。

Y　里曼球面投影方式

里曼球面爲一以（０，０，$\frac{1}{2}$）爲球心，以$\frac{1}{2}$爲半徑，所構成之球面，（０，０，１）稱北極，（０，０，０）稱南極，連結北極與球面上點Ｑ（Ｘ，Ｙ，Ｚ）所成直線與複數平面相交於點Ｐ（ｘ，ｙ，ｏ），或連接北極與平面上點Ｐ（ｘ，ｙ，ｏ）所成直線與球面相交之點Ｑ（Ｘ，Ｙ，Ｚ）稱球面投影，其互換公式，可由相似三角性質推得：

$$X=\frac{x}{1+x^2+y^2} \quad Y=\frac{y}{1+x^2+y^2} \quad Z=\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}$$

$$x=\frac{X}{1-Z} \quad y=\frac{Y}{1-Z}$$ （見圖一）

Z　複數平面上的圓或直線，對應到里曼球面上爲一圓

設複數平面一圓或一直線之方程式爲

$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$

當其爲一直線，則 $a=0$，$b^2+c^2\neq 0$

且 $b, c, d\in R$

當其爲一圓，則 $a\neq 0$，

$b^2+c^2-4ad>0$ 且 $a b c d\in R$

Z

N

S　Y

X

圖一

利用Y中之關係式可得：

$$a\left[\left(\frac{X}{1-Z}\right)^2+\left(\frac{Y}{1-Z}\right)^2\right]+b\left(\frac{X}{1-Z}\right)+c\left(\frac{Y}{1-Z}\right)+d=0$$

$$\Rightarrow a\left(\frac{X^2+Y^2}{1-Z}\right)+bX+cY+d(1-Z)=0$$

因投影到球面上，所以合於球面方程　$X^2+Y^2+(Z-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$

$$\therefore a\left(\frac{Z-Z^2}{1-Z}\right)+bX+cY+d(1-Z)=0$$

$$\Rightarrow aZ+bX+cY+d(1-Z)=0$$

$$\Rightarrow bX+cY+(a-d)Z+d=0 \quad \#$$

$bX+cY+(a-d)Z+d=0$爲空間中之一平面，其與里曼球之截痕即爲一圓，故得證。

在一般書籍都採用以上由複數平面對應到里曼球面的推理方向，而今我們嘗試由里曼球面對應到複數平面的方向之推論。

首先我們由大圓投影去著手，第一步要在球面上製造大圓的參數方程，接著將其投影在複數平面上加以觀察。

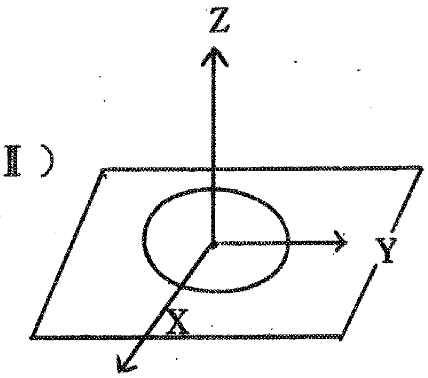
A　球面上大圓參數式之求得

1°XY平面上一圓C以（0，0，0）爲圓心，½爲半徑，則其

參數式為：

$$C:\begin{cases} X_1 = \frac{1}{2}\cos\theta \\ Y_1 = \frac{1}{2}\sin\theta \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \\ Z_1 = 0 \end{cases}$$

（見圖Ⅱ）

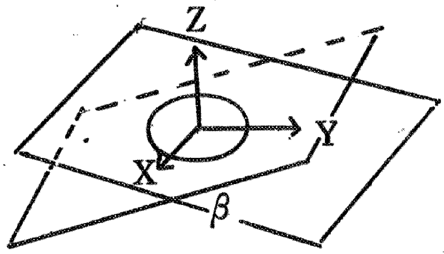


圖Ⅱ

2°圓 C 繞 X 軸旋轉一角度 β 成

$$\Gamma:\begin{cases} X_2 = \frac{1}{2}\cos\theta \\ Y_2 = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\beta \\ Z_2 = \frac{1}{2}\sin\theta\sin\beta \end{cases}$$

（見圖Ⅲ）

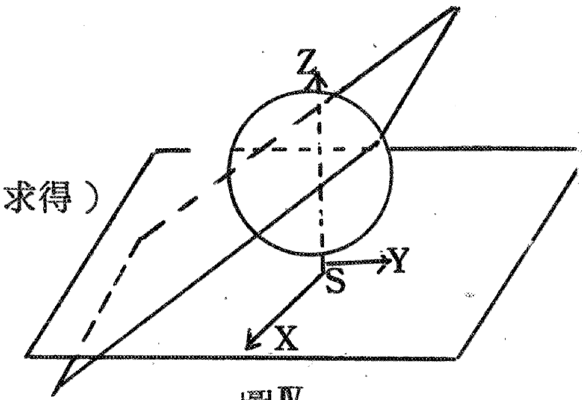


圖Ⅲ

3°Γ 平行 z 軸提升 ½ 成

$$S:\begin{cases} X_3 = \frac{1}{2}\cos\theta \\ Y_3 = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\beta \\ Z_3 = \frac{1}{2}\sin\theta\sin\beta + \frac{1}{2} \end{cases}$$

（見圖Ⅳ）



圖Ⅳ

（此時里曼球面上大圓 S 之參數式已求得）

B　大圓 S 投影後，得證亦為一圓

由 Y 之關係式知：

$$X_3 = \frac{1}{2}\cos\theta = \frac{x}{1+x^2+y^2}$$

$$Y_3 = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\beta = \frac{y}{1+x^2+y^2} \quad \cdots\cdots(1)$$

$$Z_3 = \frac{1}{2}\sin\theta\sin\beta + \frac{1}{2} = \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \quad \cdots\cdots(2)$$

$$\Rightarrow \frac{(2)-\frac{1}{2}}{(1)} = \frac{(\frac{1}{2}\sin\theta\sin\beta)-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sin\theta\cos\beta} = \frac{\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}-\frac{1}{2}}{\frac{y}{1+x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow \tan\beta = \frac{x^2+y^2-1}{2y}.$$

$\Rightarrow x^2+y^2-2y\tan\beta=1 \quad \Rightarrow x^2+(y-\tan\beta)^2=\sec^2\beta$

既然大圓的投影爲一圓，那小圓的投影是不是也是爲一圓，要討論之前首先要討論球轉動座標變換情形以爲工具，作更進一步的討論。

C　里曼球繞任意取定的直徑轉動，座標變換的關係

設球面上一點P（X，Y，Z）與原點O（即南極S）的距離爲R，則$R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，綫段$\overline{OP}$與z軸夾角爲ϕ，則 $Z=R\cos\phi$ 又$\overline{OP}$在XY平面的投影長爲$R\sin\phi$，投影綫段與x軸正向之夾角爲θ，則$X=R\sin\phi\cos\theta$，$Y=R\sin\phi\sin\theta$

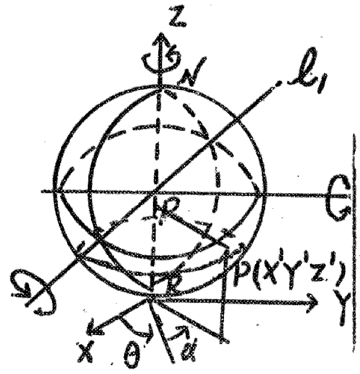
1°繞SN轉動$-\alpha$角，則新座標爲$P'(X',Y',Z')$

$$\Rightarrow\begin{cases}X^1=R\sin\phi\cos(\theta+\alpha)\\ Y^1=R\sin\phi\sin(\theta+\alpha)\\ Z^1=R\cos\phi\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}X^1=R\sin\phi\cos\theta\cos\alpha-R\sin\phi\sin\phi\sin\theta\sin\alpha\\ \quad=X\cos\alpha-Y\sin\alpha\\ Y^1=R\sin\phi\sin\theta\cos\alpha+R\sin\phi\cos\theta\sin\alpha\\ \quad=X\sin\alpha+Y\cos\alpha\\ Z^1=R\cos\phi=Z\end{cases}$$

同理可證

2°繞直線L_1: $Y=0$，$Z=\dfrac{1}{2}$旋轉$-\beta$角



$\Rightarrow X^1=X$，$Y^1=Y\cos\beta-\left(Z-\dfrac{1}{2}\right)\sin\beta$，

$$Z^1=Y\sin\beta+\left(Z-\frac{1}{2}\right)\cos\beta+\frac{1}{2}$$

3°繞直綫L_2：$X=0$，$Z=\dfrac{1}{2}$旋轉$-\gamma$角

$\Rightarrow X^1=(Z-½)\sin\gamma+X\cos\gamma$，$Y^1=Y$　（見圖V）

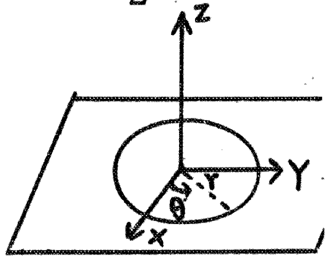
$$Z^1=\left(Z-\frac{1}{2}\right)\cos\gamma-X\sin\gamma+\frac{1}{2}$$

D　小圓參數式之求得

$1°$XY 平面上一圓 C 以（ 0 ， 0 ， 0 ）為圓心，γ（ $0<\gamma\leqslant\frac{1}{2}$ ）

為半徑的參數式為

$$X_1=\gamma\cos\theta$$
$$Y_1=\gamma\sin\theta \qquad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \quad （見圖Ⅵ）$$
$$Z_1=0$$



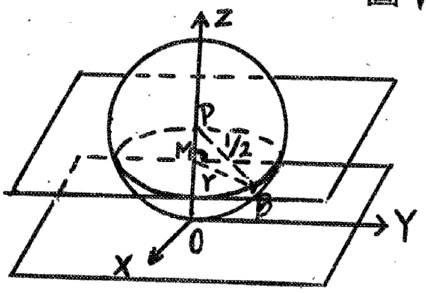
圖Ⅵ

$2°$平行 z 軸提升如右圖之OM高度，使圓C之半徑 $\gamma=MB$

$$\Rightarrow OM=\frac{1}{2}-PM=\frac{1}{2}-\sqrt{1/4-\gamma^2}\text{，令}T=\sqrt{1/4-\gamma^2}$$

$$\Rightarrow OM=\frac{1}{2}-T$$

$$\Rightarrow X_2=\gamma\cos\theta$$
$$Y_2=\gamma\sin\theta$$
$$Z_2=\frac{1}{2}-\sqrt{1/4-\gamma^2}=\frac{1}{2}-T \quad （見圖Ⅶ）$$

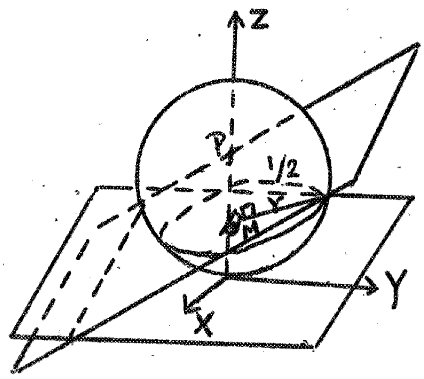


圖Ⅶ

$3°$以直線 $Y=0$ ，$Z=\frac{1}{2}$為轉軸，旋轉 $-\beta$ 角

由C得
$$X^3=\gamma\cos\theta$$
$$Y^3=\gamma\sin\theta\cos\beta+T\sin\beta$$
$$Z_3=\gamma\sin\theta\sin\beta-T\cos\beta+\frac{1}{2}$$

（見圖Ⅷ）



圖Ⅷ

E　小圓投影後得證亦為一圓

由Y之關係式如 $X_3=\gamma\cos\theta=\dfrac{x}{1+x^2+y^2}$

$$Y_3=\gamma\sin\theta\cos\beta+T\sin\beta=\frac{y}{1+x^2+y^2}\cdots\cdots(1)$$

$$Z_2=\gamma\sin\theta\sin\beta-T\cos\beta+\frac{1}{2}=\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\cdots(2)$$

$$(1)\times\sin\beta\Rightarrow\gamma\sin\theta\sin\beta\,\mathrm{so}\beta=\frac{y\sin\beta-T\sin^2\beta(1+x^2+y^2)}{1+x^2+y^2}\cdots(3)$$

$(2)\times\cos\beta\Rightarrow\gamma\sin\theta\cos\beta\sin\beta=$

$$\frac{2(x^2+y^2)\cos\beta+2T\cos^2\beta(1+x^2+y^2)-(1+x^2+y^2)\cos\beta}{2(1+x^2+y^2)}$$

$\because(3)=(4)$ $\therefore 2y\sin\beta-2T\sin^2\beta(1+x^2+y^2)$

$=2(x^2+y^2)\cos\beta+2(x^2+y^2)\cos\beta$

$+2T\cos^2\beta(1+x^2+y^2)-(1+x^2+y^2)\cos\beta$

$\Rightarrow(2T+\cos\beta)x^2+(2T+\cos\beta)y^2-2y\sin\beta$

$=-2T+\cos\beta$

同除 $2T+\cos\beta$

$$\Rightarrow x^2+y^2-(\frac{2\sin\beta}{2T+\cos\beta})y=\frac{-2T+\cos\beta}{2T+\cos\beta}$$

$$\Rightarrow x^2+(y-\frac{\sin\beta}{2T+\cos\beta})^2=\frac{-2T+\cos\beta}{2T+\cos\beta}+(\frac{\sin\beta}{2T+\cos\beta})^2$$

$$\Rightarrow x^2+(y-\frac{\sin\beta}{2T+\cos\beta})^2=\frac{1-4T^2}{(2T+\cos\beta)^2}\cdots\cdots$$

上式中，因 $T=\sqrt{1/4-\gamma^2}$ 故當 $r=1/2$ 時，即 $T=0$，則方程式化簡為

$$x^2+(y-\tan\beta)^2=\sec^2\beta$$

與B中之大圓投影圖形方程式相同。

F 結論

1°以上大圓與小圓的討論過程皆簡化，即過圓心而垂直圓所在平面的法向量，皆在 YZ 平面上，如再以 Z 軸為轉軸旋轉 $-\alpha$ 角，則由C式可求得球面上任一圓的投影圖形方程式：

$$(x+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{2T+\cos\beta})^2+(y-\frac{\cos\alpha\sin\beta}{2T+\cos\beta})^2=\frac{1-4T^2}{(2T+\cos\beta)^2}$$

2°B中當β角趨近90°時，大圓投影圖形趨近無限大，又$\beta=90°$時，此即過北極的大圓，投影圖形爲一直線。

3°過北極的小圓在1°之方程式中，其中$T=-\frac{1}{2}\cos\beta$，故其圓心在無窮遠處，半徑無窮大，而成一直線。

4°大圓航線在平射投影（置光源於地表一側，將另一側的景象描繪於與球相切的平面紙上）繪製的地圖上，兩地間的航綫爲一弧。

5°由以上的證明得知，球面上的任一圓只要不過北極，投影後圖形必爲一圓。