「連續自然數的乘方和定理」如何被我發現

國中敎師組數學第三名

屏東縣立中正國民中學　　　　　　　　作　者：許　榮　家

一、研究動機：喬治•波利亞（George Polya）所着「數學研究法」（Mathematics and Plausible Reasoning）給我很多的啓示與靈感。書中引數學家高斯（Gauss）的話說：「數論中，常常有料想不到的好運氣，藉歸納法挖掘到最優美的新眞理。」

依波利亞的猜測“$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$”及

“$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$”

這兩公式的發現過程大概是這樣的

$$n=1,2,3,4,5,6,7,\cdots,n$$

$$1+2+3+\cdots+n=1,3,6,10,15,21,28,\cdots,\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=1,5,14,30,55,91,140,\cdots,\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{1+2+3\cdots+n}$$

$$=\frac{3}{3},\frac{5}{3},\frac{7}{3},\frac{11}{3},\frac{9}{3},\frac{13}{3},\frac{15}{3},\cdots,\frac{2n+1}{3}$$

$$故1^2+2^2+3^2+\cdots n^2=\frac{2n+1}{3}(1+2+3+\cdots+n)$$

$$=\frac{2n+1}{3}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 = 1 = 1^2 = (1)^2$$

$$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2 = (1+2)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2 = (1+2+3)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2 = (1+2+3+4)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225 = 15^2 = (1+2+3+4+5)^2$$

……………………………………………

故 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1+2+3+\cdots n)^2$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

因而引起了我研究“$1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k = ?$ 當 $k = 1, 2, 3, \cdots$”的興趣與動機。

二、研究過程：

(1) $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \cdots$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, \cdots$

$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = 1, 17, 98, 354, 979, 2275, 4676, \cdots$

$$\frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}$$

$$= \frac{5}{5}, \frac{17}{5}, \frac{35}{5}, \frac{59}{5}, \frac{89}{5}, \frac{125}{5}, \frac{167}{5}, \cdots$$

觀察上列分子的數列 5, 17, 35, 59, 89, 125, 167, …

其相鄰二項的差　　12, 18, 24, 30, 36, 42…

再求上列相鄰二項的差　6, 6, 6, 6, 6 …

由此可發現分子的數列中，相鄰二項的差都是 6 的倍數，且

$5 = 1 \cdot 6 - 1$

$17 = (1+2) \cdot 6 - 1$

$35 = (1+2+3) \cdot 6 - 1$

$59 = (1+2+3+4) \cdot 6 - 1$

$89 = (1+2+3+4+5) \cdot 6 - 1$

$125 = (1+2+3+4+5+6) \cdot 6 - 1$

$167 = (1+2+3+4+5+6+7) \cdot 6 - 1$

………………

因此　　　　當 $n=1$ ， 2 ， 3 ，…， n

則 $\frac{1^4+2^4+3^4+\cdots+n4}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}=\frac{1\cdot6-1}{5},\ \frac{(1+2)\cdot6-1}{5},\ \frac{(1+2+3)\cdot6-1}{5},\ \cdots,\ \frac{(1+2+3+\cdots+n)\cdot6-1}{5}$

故 $1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{(1+2+3+\cdots+n)\cdot6-1}{5}\cdot(1^2+2^2+3^2+\cdots n^2)$

$$=\frac{\frac{n(n+1)}{2}\cdot6-1}{5}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

(2)

$n=$	1	2	3	4	5	6	…
$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=$	1	9	36	100	225	441	…
$1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5=$	1	33	276	1300	4425	12201	…

$\frac{1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5}{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}=\frac{3}{3},\frac{11}{3},\frac{23}{3},\frac{39}{3},\frac{59}{3},\frac{83}{3},\cdots$

觀察上列分子的數列　3 ,11,23,39,59,83,111,…

相鄰二項的差　　8　12　16　20　24　28　…

上列相鄰二項的差　　4　4　4　4　4　…

由此不難發現分子的數列中，相鄰二項的差都是 4 的倍數

因此　　　　當 $n=1$ ， 2 ， 3 ，…， n

則 $\frac{1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5}{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}=\frac{1\cdot4-1}{3},\ \frac{(1+2)\cdot4-1}{3},\ \frac{(1+2+3)\cdot4-1}{3},\cdots,\frac{(1+2+3+\cdots+n)\cdot4-1}{3}$

故 $1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5=\dfrac{(1+2+3+\cdots+n)\cdot 4-1}{3}\cdot$

$$(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)$$

$$=\dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}\cdot 4=1}{3}\cdot\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}=\dfrac{n^2(n+1)^2}{12}$$

$$\dfrac{2n^2+(2n-1)}{12}$$

(3)現在把上列各式的右邊都展開成展開式

$$\sum_{i=1}^{n} i=1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{2}{12}n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3=1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{3}{12}n^2+0\cdot n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4=1^4+2^4+\cdots+n^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{4}{12}n^3$$

$$+0\cdot n^2-\frac{4}{120}n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^6=1^5+2^5+\cdots+n^5=\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4$$

$$+0\cdot n^3-\frac{10}{120}n^2+0\cdot n$$

(Ⅰ)以歸納法的態度觀察上列各式右邊的特性及差異，可以這樣猜測

$$\sum_{i=1}^{n} i^5=\frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{6}{12}n^5+0\cdot n^4-\frac{x}{120}n^3$$

$$+0\cdot n^2+\frac{6}{y}n$$

令 $n=1$，得 $1=\frac{1}{7}+\frac{1}{2}+\frac{6}{12}-\frac{x}{120}+\frac{6}{y}$

令 $n=2$，得 $65=\frac{1}{7}\cdot 2^7+\frac{1}{2}\cdot 2^6+\frac{6}{12}\cdot 2^5-\frac{x}{120}\cdot 2^3$

$$+\frac{6}{y}\cdot 2$$

聯立解之，得 $x=20$，　$y=252$

當 $n=3,4,5,\cdots,9$ 演算之均適合

故 $\sum_{i=1}^{n} i^6=\frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{6}{12}n^5+0\cdot n^4-\frac{20}{120}n^3$

$$+0\cdot n^2+\frac{6}{252}n$$

通分後分解之，得 $\sum_{i=1}^{n} i^6=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{24}$

(Ⅱ)同法可求得 $\sum_{i=1}^{n} i^7=\frac{1}{8}n^8+\frac{1}{2}n^7+\frac{7}{12}n^6+0\cdot n^5$

$$-\frac{35}{102}n^4+0\cdot n^3+\frac{21}{252}n^2+0\cdot n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^7=1^7+2^7+3^7+\cdots+n^7=\frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24}$$

即假設 $\sum_{i=1}^{n} i^7=\frac{1}{8}n^8+\frac{1}{2}n^7+\frac{7}{12}n^6+0\cdot n^5-\frac{x}{120}n^4$

$$+0\cdot n^3+\frac{y}{252}n^2+0\cdot n$$

解之得 $x=35$，　$y=21$

(Ⅲ)觀察有理係數中分母是120的分子所成的數列

4，10，20，35，56，84

相鄰二項的差　6　10　15　21　28

相鄰二項的差　4　5　6　7 ←——猜測

與(I)同法,先設 $\sum_{i=1}^{n} i^8=\frac{1}{9}n^9+\frac{1}{2}n^8+\frac{8}{12}n^7+0\cdot n^6$

$$-\frac{56}{120}n^5+0\cdot n^4+\frac{x}{252}n^3+0\cdot n^2-\frac{8}{y}n$$

再分別令 n ＝ 1，2 **聯立解之**，可得 x ＝56， y ＝240

當 n ＝ 3，4，…，9 驗之均同

故 $\sum_{i=1}^{n} i^8=\frac{1}{9}n^9+\frac{1}{2}n^8+\frac{8}{12}n^7+0\cdot n^6$

$$-\frac{56}{120}n^5+0\cdot n^4+\frac{56}{252}n^3+0\cdot n^2-\frac{8}{240}n$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)}{90}$$

同(II)之法，可求得 $\sum_{i=1}^{n} i^9=\frac{1}{10}n^{10}+\frac{1}{2}n^9$

$$+\frac{9}{12}n^8+0\cdot n^7-\frac{84}{120}n^6+0\cdot n^5+\frac{126}{252}n^4+0\cdot n^3$$

$$-\frac{36}{240}n^2+0\cdot n$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2(2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3)}{20}$$

(IV)用數學歸納法證明(證明請看"IV結果證明"一欄)上列各式的

同時，又發現了 $\sum_{i=1}^{n} i^k$ 的展開式中， 有理係數的分子實與(a ＋ b)^{k}的展開式的係數相關 ， 試觀察巴斯卡爾數三角形(Pascal's triangle) 並與上列各式右邊的展開式的係數的分子相比較後，我們很自然的會這樣的猜測：

$$\sum_{i=1}^{n} i^{10}=\frac{1}{11}n^{11}+\frac{1}{2}n^{10}+\frac{10}{12}n^{9}+0\cdot n^{8}-\frac{120}{120}n^{7}+0\cdot n^{6}$$

$$+\frac{252}{252}n^{5}+0\cdot n^{4}-\frac{120}{240}n^{3}+0\cdot n^{2}+\frac{10}{t_{10}}n$$

令 $n=1$，得 $1=\frac{1}{11}+\frac{1}{2}+\frac{10}{12}-\frac{120}{120}+\frac{252}{252}-\frac{120}{240}$

$$+\frac{10}{t_{10}}$$

解之得　$t_{10}=132$

設 $\sum_{i=1}^{n} i^{11}=\frac{1}{12}n^{12}+\frac{1}{2}n^{11}+\frac{11}{12}n^{10}+0\cdot n^{9}$

$$-\frac{165}{120}n^{8}+0\cdot n^{7}+\frac{462}{252}n^{6}+0\cdot n^{5}-\frac{330}{240}n^{4}+0\cdot n^{3}$$

$$+\frac{55}{132}n^{2}+\frac{11}{t_{11}}n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^{12}=\frac{1}{13}n^{13}+\frac{1}{2}n^{12}+\frac{12}{12}n^{11}+0\cdot n^{10}$$

$$-\frac{220}{120}n^{9}+0\cdot n^{8}+\frac{792}{252}n^{7}+0\cdot n^{6}-\frac{792}{240}n^{5}+0\cdot n^{4}$$

$$+\frac{220}{132}n^{3}+0\cdot n^{2}+\frac{12}{t_{12}}n$$

令 $n=1$，分別解之各得 $\frac{11}{t_{11}}=0$ 及 $t_{12}=-\frac{32760}{691}$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1

………………………

巴斯卡爾數三角形 (Pascal's triangle)

$$\binom{N}{k-1}+\binom{N}{k}=\binom{N+1}{k}$$

三、研究結果：

(Ⅰ) $$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}(n^2+n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{1}{4}(n^4+2n^3+n^2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$$=\frac{1}{30}(6n^5+15n^4+10n^3-n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

$$= \frac{1}{12}(2n^6+9n^5+5n^4-n^2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^6 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+9n^3-3n+1)}{42}$$

$$= \frac{1}{42}(9n^7+21n^6+21n^5-7n^3+n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^7 = \frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24}$$

$$= \frac{1}{24}(3n^8+12n^7+14n^6-7n^4+2n^2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^8 = \frac{n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)}{90}$$

$$= \frac{1}{90}(10n^9+45n^8+60n^7-42n^5+20n^3-3n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^9 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3)}{20}$$

$$= \frac{1}{20}(2n^{10}+10n^9+15n^8-14n^6+10n^4-3n^2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^{10} = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^8+12n^7+8n^6-18n^5-10^4}{66}$$

$$\frac{+24n^3+2n^2-15n+5)}{66}$$

$$= \frac{1}{66}(6n^{11}+33n^{10}+55n^9-66n^7+66n^5-33n^3+5n)$$

....

(Ⅱ) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$

$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{2}{12}n$

$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{2}{12}n^2 + 0 \cdot n$

$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{4}{12}n^3 + 0 \cdot n^2 - \frac{4}{120}n$

$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 + 0 \cdot n^3 - \frac{10}{120}n^2 + 0 \cdot n$

$\sum_{i=1}^{n} i^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{6}{12}n^5 + 0 \cdot n^4 - \frac{20}{120}n^3 + 0 \cdot n^2$

$+ \frac{6}{252}n$

$\sum_{i=1}^{n} i^7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 + 0 \cdot n^5 - \frac{35}{120}n^4 + 0 \cdot n^3$

$+ \frac{21}{252}n^2 + 0 \cdot n$

$\sum_{i}^{n} i^8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{8}{12}n^7 + 0 \cdot n^6 - \frac{56}{120}n^5 + 0 \cdot n^4$

$+ \frac{56}{252}n^3 + 0 \cdot n^2 - \frac{8}{240}n$

$\sum_{i=1}^{n} i^9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{9}{12}n^8 + 0 \cdot n^7 - \frac{84}{120}n^6 + 0 \cdot n^5$

$+ \frac{126}{252}n^4 + 0 \cdot n^3 - \frac{36}{240}n^2 + 0 \cdot n$

$$\sum_{i=1}^{n} i^{10} = \frac{1}{11}n^{4} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{10}{12}n^{9} + 0\cdot n^{8} - \frac{120}{120}n^{7} + 0\cdot n^{6}$$

$$+ \frac{252}{252}n^{5} + 0\cdot n^{4} - \frac{120}{240}n^{3} + 0\cdot n + \frac{10}{132}n$$

……………………

其中 $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{12}$$

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{12} + 0$$

$$1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{4}{12} + 0 - \frac{4}{120}$$

$$1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{5}{12} + 0 - \frac{10}{120} + 0$$

………………………………

(Ⅲ)用歸納法將(Ⅱ)的結果一般化，可得其通式如下：

$$\sum_{i=1}^{n} i^{k} = \frac{1}{k+1}n^{k+1} + \frac{1}{2}n^{k} + \frac{\binom{k}{1}}{12}n^{k-1} - \frac{\binom{k}{3}}{120}n^{k-3} +$$

$$\frac{\binom{k}{5}}{252}n^{k-5} - \frac{\binom{k}{7}}{240}n^{k-7} + \frac{\binom{k}{9}}{132}n^{k-9} - \cdots + \frac{\binom{k}{k-1}}{t_{k}}n$$

$$k \in N = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$$

而其中 $1 = \frac{1}{k-1} + \frac{1}{2} + \frac{\binom{k}{1}}{12} - \frac{\binom{k}{3}}{120} + \frac{\binom{k}{5}}{252} - \frac{\binom{5}{7}}{240}$

$$+ \frac{\binom{k}{9}}{132} - \cdots + \frac{\binom{k}{k-1}}{t_{k}}$$

* 符號說明：$\binom{k}{t}$表示$(a+b)^k$的展開式中$a^{k-t}b^t$項的係數，亦即相異反物中取出t個的組合數，與C^k_t，${}_kC_t$，$C(k,t)$通

(IV)上面的通式又可寫成$\sum\limits_{i=1}^{n} i^k=\dfrac{1}{k+1}n^{k+1}+\sum\limits_{j=1}^{k}\dfrac{\binom{k}{j-1}}{t_j}n^{k-j+1}$

令n＝1可得　$1=\dfrac{1}{k+1}+\sum\limits_{j=1}^{k}\dfrac{\binom{k}{j-1}}{t_j}$

再令k＝1，2，3，4，…，可得：

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{t_1}$$

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{t_1}+\frac{2}{t_2}$$

$$1=\frac{1}{4}+\frac{1}{t_1}+\frac{3}{t_2}+\frac{3}{t_3}$$

$$1=\frac{1}{5}+\frac{1}{t_1}+\frac{4}{t_2}+\frac{6}{t_3}+\frac{4}{t_4}$$

…………………

由此可分別求得$\dfrac{1}{t_1}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{t_2}=\dfrac{1}{12}$，$\dfrac{1}{t_3}=0$，

$\dfrac{1}{t_4}=-\dfrac{1}{120}$，…

當　$j=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,\cdots$

求得$\dfrac{1}{t^j}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{12}$，0，$-\dfrac{1}{120}$，0，$\dfrac{1}{252}$，0，$-\dfrac{1}{240}$，0，

$\dfrac{1}{132}$，0，$-\dfrac{691}{32760}$，…

討論分析之，可有下列之性質：（其中S∈N）

$j=1 \qquad \frac{1}{t_j}=\frac{1}{2}$

$j=2S+1 \qquad \frac{1}{t_j}=0$

$j=4S \qquad \frac{1}{t_j}<0$

$j=4S+2 \qquad \frac{1}{t_j}>0$

四、結果證明：上面各結果均可用數學歸納法證明之，現舉三例證明如下：

(I) $\sum_{i=1}^{n} i^6=\frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{6}{12}n^5+0\cdot n^4-\frac{20}{120}n^3$

$+0\cdot n^2+\frac{6}{256}n$

證明：當n=1時，$1=\frac{1}{7}+\frac{1}{2}+\frac{6}{12}-\frac{20}{120}+\frac{6}{252}$，本式成立

令n=r時，本式成立　即 $\sum_{i=1}^{r} i^6=\frac{1}{7}r^7+\frac{1}{2}r^6$

$+\frac{6}{12}r^5-\frac{20}{120}r^3+\frac{6}{252}r$

則$\frac{1}{7}(r+1)^7+\frac{1}{2}(r+1)^6+\frac{6}{12}(r+1)^5-\frac{20}{120}(r+1)^3$

$+\frac{6}{252}(r+1)$

$$=\frac{1}{7}r^7+\frac{1}{2}r^6+\frac{6}{12}r^5-\frac{20}{120}r^3+\frac{6}{252}r+\frac{1}{7}\cdot 7r^6$$

$$+(\frac{1}{7}\cdot 21+\frac{1}{2}\cdot 6)r^5+(\frac{1}{7}\cdot 35+\frac{1}{2}\cdot 15$$

$$+\frac{6}{12}\cdot 5)r^4+(\frac{1}{7}\cdot 35+\frac{1}{2}\cdot 20+\frac{6}{12}10)r^3$$

$$+(\frac{1}{7}\cdot 21+\frac{1}{2}\cdot 15+\frac{6}{12}\cdot 10-\frac{20}{120}\cdot 3)r^2$$

$$+(\frac{1}{7}\cdot 7+\frac{1}{2}\cdot 6+\frac{6}{12}\cdot 5-\frac{20}{120}\cdot 3)r$$

$$+(\frac{1}{7}+\frac{1}{2}+\frac{6}{12}-\frac{20}{120}+\frac{6}{252})$$

$$=\sum_{i=1}^{r} i^6+(r+1)^6=\sum_{i=1}^{r+1} i^6$$

即 $n=r+1$ 時，本式亦成立

故本式對所有 $n=1,2,3,\cdots$ 均成立

II $\sum_{i=1}^{n} i^7=\frac{1}{8}n^8+\frac{1}{2}n^7+\frac{7}{12}n^6+0\cdot n^5-\frac{35}{120}n^4+0\cdot n^3$

$$+\frac{21}{252}n^2+0\cdot n$$

證明：當 $n=1$ 時， $1=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{7}{12}-\frac{35}{120}+\frac{21}{252}$，本式成立

令 $n=r$ 時，本式成立，即 $\sum_{i=1}^{r} i^7=\frac{1}{8}r^8+\frac{1}{2}r^7+\frac{7}{12}r^6$

$$-\frac{35}{120}r^4+\frac{21}{252}r^2$$

$$則\frac{1}{8}(r+1)^8+\frac{1}{2}(r+1)^7+\frac{7}{12}(r+1)^6$$

$$-\frac{35}{120}(r+1)^4+\frac{21}{252}(r+1)^2$$

$$=\frac{1}{8}r^8+\frac{1}{2}r^7+\frac{7}{12}r^6-\frac{35}{120}r^4+\frac{21}{252}r^2+\frac{1}{8}\cdot 8r^7$$

$$+\left(\frac{1}{8}\cdot 28+\frac{1}{2}\cdot 7\right)r^6$$

$$+\left(\frac{1}{8}\cdot 56+\frac{1}{2}\cdot 21+\frac{7}{12}\cdot 6\right)r^5$$

$$+\left(\frac{1}{8}\cdot 70+\frac{1}{2}\cdot 35+\frac{7}{12}\cdot 1\right)r^4$$

$$+\left(\frac{1}{8}\cdot 56+\frac{1}{2}\cdot 35+\frac{7}{12}\cdot 20-\frac{35}{120}\cdot 4\right)r^3$$

$$+\left(\frac{1}{8}\cdot 28+\frac{1}{2}\cdot 21+\frac{7}{12}\cdot 15-\frac{35}{120}\cdot 6\right)r^2$$

$$+\left(\frac{1}{8}\cdot 8+\frac{1}{2}\cdot 7+\frac{7}{12}\cdot 6-\frac{35}{120}\cdot 4+\frac{21}{252}\cdot 2\right)r$$

$$+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{7}{12}-\frac{35}{120}+\frac{21}{252}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{r} i^7+r^7+7r^6+21r^5+35r^4+35r^3+21r^2+7r+1$$

$$=\sum_{i=1}^{r} i^7+(r+1)^7=\sum_{i=1}^{r+1} i^7$$

即 $n=r+1$ 時，本式亦成立

故　本式對所有　$n=1,2,3,\cdots$ 均成立

（Ⅲ）$$\sum_{i=1}^{n} i^{k}=\frac{1}{k+1}n^{k+1}+\frac{1}{2}n^{k}+\frac{\binom{k}{1}}{12}n^{k-1}-\frac{\binom{k}{3}}{120}n^{k-3}+\frac{\binom{k}{5}}{252}n^{k-5}-\frac{\binom{k}{7}}{240}n^{k-7}+\frac{\binom{k}{9}}{132}n^{k-9}-\cdots+\frac{\binom{k}{k-1}}{t_{k}}n$$

$$k\in N=\{1,2,3,4,\cdots\}$$

而其中　$$1=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}+\frac{\binom{k}{1}}{12}-\frac{\binom{k}{3}}{120}+\frac{\binom{k}{5}}{252}-\frac{\binom{k}{7}}{240}+\frac{\binom{k}{9}}{132}-\cdots+\frac{\binom{k}{k-1}}{t_{k}}$$

證明：當 $k=1$ 時　$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{1}{2}n^{2}+\frac{1}{2}n$　本式成立

當 $k=2$ 時　$\sum_{i=1}^{n} i^{2}=\frac{1}{3}n^{3}+\frac{1}{2}n^{2}+\frac{2}{12}n$，本式成立

令 $k=1,2,3,\cdots\cdots,P-1$ 時　本式均成立

現在以與Ⅰ及Ⅱ相同的方法來證明 $k=P$ 時，本式也成立

即證 $$\sum_{i=1}^{n} i^{P}=\frac{1}{P+1}n^{P+1}+\frac{1}{2}n^{P}+\frac{\binom{P}{1}}{12}n^{P-1}-\frac{\binom{P}{3}}{120}n^{P-3}+\frac{\binom{P}{5}}{252}n^{P-5}-\frac{\binom{P}{7}}{240}n^{P-7}+\frac{\binom{P}{9}}{132}n^{P-9}-\cdots+\frac{\binom{P}{P-1}}{t_{P}}n$$

當 n＝1時，$1=\frac{1}{P+1}+\frac{1}{2}+\frac{\binom{P}{1}}{12}-\frac{\binom{P}{3}}{120}+\frac{\binom{P}{5}}{252}$

$-\frac{\binom{P}{7}}{240}+\frac{\binom{P}{9}}{132}-\cdots+\frac{\binom{P}{P-1}}{t^{P}}$，本式成立

令 n＝r 時　本式成立

即 $\sum_{i=1}^{r} i^{P}=\frac{1}{P+1}r^{P+1}+\frac{1}{2}r^{P}+\frac{\binom{P}{1}}{12}r^{P-1}-\frac{\binom{P}{3}}{120}r^{P-3}$

$+\frac{\binom{P}{5}}{252}r^{P-5}-\frac{\binom{P}{7}}{240}r^{P-7}+\frac{\binom{P}{9}}{132}r^{P-9}-\cdots+\frac{\binom{P}{P-1}}{t^{P}}r$

則 $\frac{1}{P+1}(r+1)^{P+1}+\frac{1}{2}(r+1)^{P}+\frac{\binom{P}{1}}{12}(r+1)^{P-1}$

$-\frac{\binom{P}{3}}{120}(r+1)^{P-3}+\frac{\binom{P}{5}}{252}(r+1)^{P-5}-\frac{\binom{P}{7}}{240}(r+1)^{P-7}$

$+\frac{\binom{P}{9}}{132}(r+1)^{P-9}-\cdots+\frac{\binom{P}{P-1}}{t_{p}}(r+1)$

$=\frac{1}{P+1}r^{P+1}+\frac{1}{2}r^{P}+\frac{\binom{P}{1}}{12}r^{P-1}-\frac{\binom{P}{3}}{120}r^{P-3}-\frac{\binom{P}{5}}{252}r^{P-5}$

$-\frac{\binom{P}{7}}{240}r^{P-7}+\frac{\binom{P}{9}}{132}r^{P-9}-\cdots$

$+\frac{\binom{P}{P-1}}{t_{P}}r+\frac{\binom{P+1}{1}}{P+1}r^{P}+\left[\frac{\binom{P+1}{2}}{P+1}+\frac{\binom{P}{1}}{2}\right]r^{P-1}$

$+\left[\frac{\binom{P+1}{3}}{P+1}+\frac{\binom{P}{2}}{2}+\frac{\binom{P}{1}\binom{P-1}{1}}{12}\right]r^{P-2}$

$$+\left[\frac{\binom{P+1}{4}}{P+1}-\frac{\binom{P}{5}}{2}-\frac{\binom{P}{1}\binom{P-1}{2}}{12}\right]r^{P-3}$$

$$+\left[\frac{\binom{P+1}{5}}{P+1}+\frac{\binom{P}{4}}{2}+\frac{\binom{P}{1}\binom{P-1}{3}}{12}-\frac{\binom{P}{3}\binom{P-3}{1}}{120}\right]r^{P-4}$$

$$+\left[\frac{\binom{P+1}{6}}{P+1}+\frac{\binom{P}{5}}{2}+\frac{\binom{P}{1}\binom{P-1}{4}}{12}-\frac{\binom{P}{3}\binom{P-3}{2}}{120}\right]r^{P-5}$$

$$+\left[\frac{\binom{P+1}{7}}{P+1}+\frac{\binom{P}{6}}{2}+\frac{\binom{P}{1}\binom{P-1}{5}}{12}\right.$$

$$\left.-\frac{\binom{P}{3}\binom{P-3}{3}}{120}+\frac{\binom{P}{5}\binom{P-5}{1}}{252}\right]r^{P-6}$$

$$+\left[\frac{\binom{P+1}{8}}{P+1}+\frac{\binom{P}{7}}{2}+\frac{\binom{P}{1}\binom{P-1}{6}}{12}\right.$$

$$\left.-\frac{\binom{P}{3}\binom{P-3}{4}}{120}+\frac{\binom{P}{5}\binom{P-1}{2}}{252}\right]r^{P-7}+\cdots$$

$$+\left[\frac{1}{P+1}+\frac{1}{2}-\frac{\binom{P}{1}}{12}-\frac{\binom{P}{3}}{120}+\frac{\binom{P}{5}}{252}-\frac{\binom{P}{7}}{240}\right.$$

$$\left.+\frac{\binom{P}{9}}{132}-\frac{\binom{P}{P-1}}{t_p}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{r} i^P+r^P+\binom{P}{1}r^{P-1}+\binom{P}{2}r^{P-2}+\binom{P}{3}r^{P-3}$$

$$+\binom{P}{4}r^{P-4}+\binom{P}{5}r^{P-5}+\binom{P}{6}r^{P-6}$$

$$+\binom{P}{7}r^{P-7}+\cdots\cdots+1$$

$$= \sum_{i=1}^{r} i^P + (r+1)^P = \sum_{i=1}^{r+1} i^P$$

即 $n = r + 1$ 時，本式亦成立

故本式對所有 $n = 1, 2, 3, \cdots$ 均成立

所以本定理得以證明。

四、最後附言：

(Ⅰ)目前的數學教科書，其形式都是「完成數學」由一連串的定理與證明或應用所組成，以致於有些學生誤認數學只不過是如此爾爾，其實這只是數學的一面，至於定理如何被人所發現，古人如何構想證明的方法等等則付之闕如。若能引入定理被發現及前人構想證明方法的經過過程，則不但能幫助學生多了解，更能引起學生學習數學的興趣與動機。

(Ⅱ)本作品將介紹由「歸納法」及「一般化」等發現定理的法則及過程，澈底說明發現定理的動機及數學研究中的觀察、實驗、歸納、證明等步驟，以供有志於數學研究的青年學生的一種優良參考。

(Ⅲ)本定理證明時，必須利用到下列的恆等式

$$\binom{P}{0} = \frac{\binom{P+1}{1}}{P+1} = 1$$

$$\binom{P}{1} = \frac{\binom{P+1}{2}}{P+1} + \frac{\binom{P}{1}}{2} = P$$

$$\binom{P}{2} = \frac{\binom{P+1}{3}}{P+1} + \frac{\binom{P}{2}}{2} + \frac{\binom{P}{1}\binom{P-1}{2}}{12}$$

$$\binom{P}{3} = \frac{\binom{P+1}{4}}{P+1} + \frac{\binom{P}{3}}{2} + \frac{\binom{P}{1}\binom{P-1}{2}}{12}$$

$$\binom{P}{4}=\frac{\binom{P+1}{5}}{P+1}+\frac{\binom{P}{4}}{2}+\frac{\binom{P}{1}\binom{P-1}{3}}{12}-\frac{\binom{P}{3}\binom{P-3}{1}}{120}$$

$$\binom{P}{5}=\frac{\binom{P+1}{6}}{P+1}+\frac{\binom{P}{5}}{2}+\frac{\binom{P}{1}\binom{P-1}{4}}{12}-\frac{\binom{P}{3}\binom{P-3}{2}}{120}$$

$$\binom{P}{6}=\frac{\binom{P+1}{7}}{P+1}+\frac{\binom{P}{6}}{2}+\frac{\binom{P}{1}\binom{P-1}{5}}{12}-\frac{\binom{P}{3}\binom{P-3}{3}}{120}$$

$$+\frac{\binom{P}{5}\binom{P-5}{1}}{252}$$

$$\binom{P}{7}=\frac{\binom{P+1}{8}}{P+1}+\frac{\binom{P}{7}}{2}+\frac{\binom{P}{1}\binom{P-1}{6}}{12}-\frac{\binom{P}{3}\binom{P-3}{4}}{120}$$

$$+\frac{\binom{P}{5}\binom{P-5}{2}}{252}$$

....

$$\binom{P}{P}=\frac{\binom{P+1}{P+1}}{P+1}+\frac{\binom{P}{P}}{2}+\frac{\binom{P}{1}\binom{P-1}{P-1}}{12}-\frac{\binom{P}{3}\binom{P-3}{P-3}}{120}$$

$$+\frac{\binom{P}{5}\binom{P-5}{P-5}}{252}-\frac{\binom{P}{7}\binom{P-7}{P-7}}{240}+\frac{\binom{P}{9}\binom{P-9}{P-9}}{132}-\cdots$$

$$+\frac{\binom{P}{P-1}\binom{1}{1}}{t_p}$$

$$=\frac{1}{P+1}+\frac{1}{2}+\frac{\binom{P}{1}}{12}-\frac{\binom{P}{3}}{120}+\frac{\binom{P}{5}}{252}-\frac{\binom{P}{7}}{240}$$

$$+\frac{\binom{P}{9}}{132}-\cdots+\frac{\binom{P}{P-1}}{t_p}=1$$

上面所列出的各式，其證明均很容易，但其一般式的證明則比較困難，請讀者來尋求下列一般式的證明方法

$$\binom{P}{r}=\frac{\binom{P+1}{r+1}}{P+1}+\frac{\binom{P}{0}\binom{P}{r}}{2}+\frac{\binom{P}{1}\binom{P-1}{r-1}}{12}+\frac{\binom{P}{3}\binom{P-3}{r-3}}{120}$$

$$+\frac{\binom{P}{5}\binom{P-5}{r-5}}{252}-\frac{\binom{P}{7}\binom{P-7}{r-7}}{240}+\frac{\binom{P}{9}\binom{P-9}{r-9}}{132}-\cdots$$

$$+\frac{\binom{P}{r-1}\binom{P-r+1}{r-r+1}}{t_r}$$

而其中 $1=\frac{1}{r+1}+\frac{1}{2}+\frac{\binom{r}{1}}{12}-\frac{\binom{r}{3}}{120}+\frac{\binom{r}{5}}{252}-\frac{\binom{r}{7}}{240}+\frac{\binom{r}{9}}{132}-\cdots$

$$+\frac{\binom{r}{r-1}}{t_r}$$

且 $P=1,2,3,4,\cdots$ 及 $0\leqq r\leqq P$

即 $\binom{P}{r}=\frac{\binom{P+1}{r+1}}{P+1}+\sum_{i=1}^{r}=\frac{\binom{P}{j-1}\binom{P-j+1}{r-j+1}}{t_j}$,

$P=1,2,3,4,\cdots$ 及 $0\leqq r\leqq P$

其中 $1=\frac{1}{P+1}+\sum_{j=1}^{r}\frac{\binom{r}{j-1}}{t_j}$

(4)本作品絕非抄襲、記述或翻譯得來，而確是由作者有意與無意之間親自所發現，若有不當之處，敬祈有識之士勿吝指正。

附　　表　　I

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sum_{i=1}^{n} i$	1	3	6	10	15	21	28	36	45
$\sum_{i=1}^{n} i^2$	1	5	14	30	55	91	140	204	285
$\sum_{i=1}^{n} i^3$	1	9	36	100	225	441	784	1296	2025
$\sum_{i=1}^{n} i^4$	1	17	98	354	979	2275	4676	8772	15333
$\sum_{i=1}^{n} i^5$	1	33	276	1300	4425	12201	29008	61776	120825
$\sum_{i=1}^{n} i^6$	1	65	794	4890	20515	67171	184820	446964	978405
$\sum_{i=1}^{n} i^7$	1	129	2316	18700	96825	376761	1200304	3297456	8080425
$\sum_{i=1}^{n} i^8$	1	257	6818	72354	462979	2142595	7907396	24684612	67731333

$\sum_{i=1}^{n} i^9$	1	513	20196	342340	2295465	12373161	52726768	186944496	574364985
$\sum_{i=1}^{n} i^{10}$	1	1025	60774	1348650	11114275	71580451	454055700	1427797524	4914581925
$\sum_{i=1}^{n} i^{11}$	1	2049	179196	5333500	54161625	416958681	2394285424	10984220016	42365279625

附　表　II

$n =$	1	2	3		5	6	7	8	9
$n^2 =$	1	4	9	16	25	36	49	64	81
$n^3 =$	1	8	27	64	125	216	343	512	729
$n^4 =$	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
$n^5 =$	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049

$n^6=$	1	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441
$n^7=$	1	128	2187	16384	78125	279936	823543	2097152	4782969
$n^8=$	1	256	6561	65536	390625	1679616	5764801	16777216	43046721
$n^9=$	1	512	19683	322144	1953125	10077696	40353607	134217728	387420489
$n^{10}=$	1	1024	59049	1288576	9765625	60466176	282475249	1073741824	3486784401
$n^{11}=$	1	2048	177147	5154304	48828125	362797056	1977326743	85899[illegible]92	31381059609