對於學習者接受領悟過程之心理研究以及教學方式教材改進的建議

高中教師組數學第二名

省立台中第一高級中學　　　　作　　者：數學教學研究會

一、作品大意：

數學是一門啓發思考、開拓系統化知識的一門學科，自古以來，她就一直伴隨着人類，她的精神、內涵亦是隨著而漸入，但是很不幸的，傳達她的精神、內涵的機構一數學教育，普遍地在各種「場合」上出了毛病，當然，這種毛病具有「漸進」與「以訛傳訛」的特性，我們姑且先不論這種「特性」的內容，我們今天所要談的是她的「源由」；作者基於對這種「源由」的需要感，產生尋求的動機，從教師們的教學情形，學生們對於教學與教材的反應情形，以及對於學習者的心理狀態，作一粗淺的探討，我們很容易覺察到此種粗淺的研究心得，只能供各位教師與教學工作者的一種參考，但「數學教育」的改進，正需要許多「參考」的研究心得來綴合締造，作者擬以此種「行爲」，來激發教師們對於此類問題的普遍注意與研討；俾能達到互輔互助，以完成改進數學教育工作的目標。

內容：對於學習者接受、領悟過程之心理研究以及教學方式，教材改進的建議。

第　一　章

甲、心智發展的過程研究

研究起點：小孩之動作　　　　研究對象：三歲小孩

現象：小朱，每次別人問他：「你的名字叫什麼！」他答「豬八戒！」（行爲①）當時大家都覺得好笑，經觀察結果，原來他家附

近的小孩子喜歡拌演豬八戒與孫悟空，而每次打架，都是那個豬八戒贏，但後來（過了一個月），當別人再問起他的名字時，他答：「我叫朱安平，不是豬八戒！」（行爲②）問他爲甚麼不是豬八戒；他答：「媽媽說，豬八戒很難看！」

〔分析〕從這一個現象中，便可得到許多的啓示，玆分析如下：

(1)這一個小孩，所以會說自己是豬八戒，完全是自鄰居小孩子的遊戲中學來的，我們可認爲這種遊戲對他來講，是一個「發散無意識行爲源」。

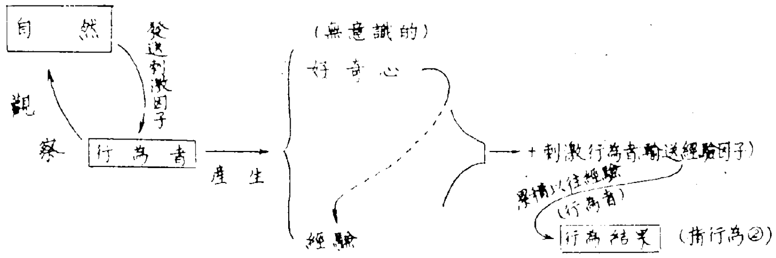
(2)由於「發散無意識行爲源」發散「刺激的因子」，以致於使他產生好奇心，而且又從這當中得知豬八戒英勇無比——經驗①。

(3)由好奇心的產生，激發重複的無意識行爲，得到經驗①，而行使行爲①。

(4)但行爲①，被其母親「接受」後，立即輸送「經驗因子」——「豬八戒很醜！」傳給小孩，這時他一聽到醜，會立刻想到醜的樣子——以往所經驗。

(5)經上述過程之後，行爲②便湧出來，這種行爲的完成，可以認爲是一種智慧粗淺的完成。

玆將上述所分析之現象逕以圖（Ⅰ）表之：

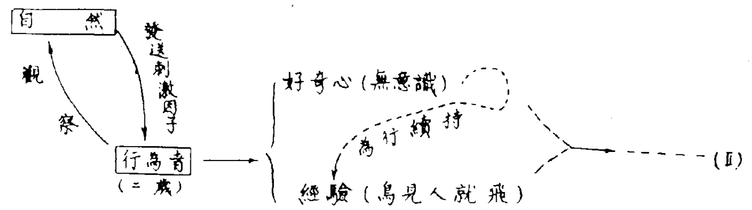


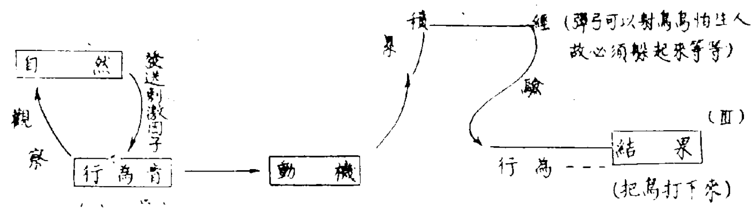
研究對象：兩歲小女孩、八歲小男孩：

現象 1. 某日，她蹲地上玩的當兒，忽然一隻麻雀飛下來吃地上的穀粒，但因她以往未曾如此接近過鳥，因此她張大著眼睛看著，越看越好奇，只見她慢慢地走向鳥所棲息的地方，想和牠一起玩似的，但是不等到她走到，那鳥老早飛走了，此現象發生後，經常看到她想接近鳥的行爲，而且是持續了一段時間。

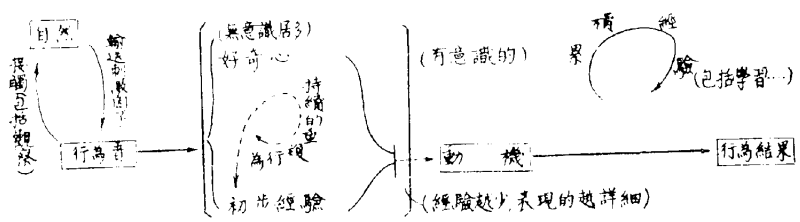
現象 2. 這個八歲的小男，遇到這種情形，他馬上躲起來，然後拿起彈弓把鳥給打了下來。

〔分析〕(1)在現象1,2中，這個小女孩和男孩的各種動作過程，作者遙以圖形表表之。





〔心得1〕從（Ⅰ）（Ⅱ）（Ⅲ）三個典型的例子中，我們得知（Ⅰ）（Ⅱ）為兩、三歲小孩子的一種行爲，因爲缺乏經驗（較多的）與心智的不成熟，因此所表現的行爲，均爲初步而不完全的過程。而從（Ⅲ）中，因爲行爲者爲八歲的小孩經驗學習較多，因此他所表現的行爲，從「自然」到「動機」的過程不容易表現出來，而在「動機」至「行爲結果」的過程，則表現的較詳細，從上述的結論，我們似乎可以此種「自然」到「行爲結果」的過程，作一較一般化的模式如下：



〔心得2〕 $\boxed{\text{智慧}=\text{經驗}+\text{學習}+\text{天生智能}}$ （此式較爲粗略）

註：經驗包括1.主動經驗……例如：自我的尋求、思考的結果等等。
2.被動的經驗：如鳥會飛、草是綠的。

乙、思想的產生：

1.大意①「思想」可以說是「多種行爲結果」的累積現象，而作者所要研究的是，在達到「思想」前的次一層機構——「統合」（作者自擬之名詞）的致成因素。

②此處所謂的「思想」與一般所狹義「思想」略有出入。

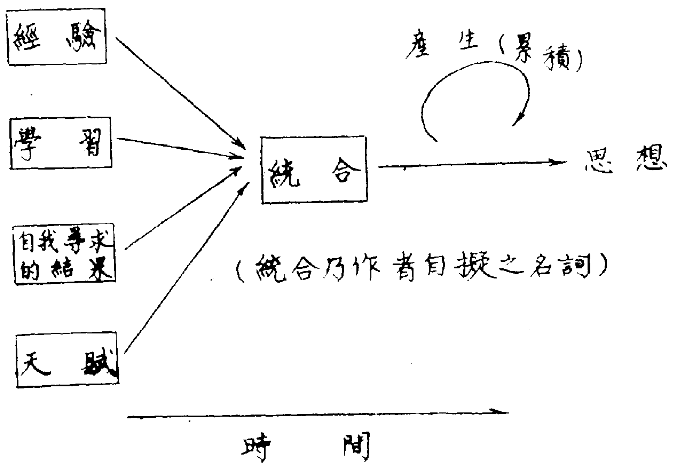
2.〔例1〕愛因斯坦的「相對論」產生。第一借助於羅倫茲轉換式以及近代諸數學及哲學；第二其本人思考的定力與天賦、環境等。前者爲「經驗與學習」，後者爲「自我尋求」與「自然」因素。

〔例2〕讀書閱歷越多的人，思想越早熟與卓羣（一般性）。

〔例3〕受過環境纏累或刺激的人思想多半早熟與複雜（從觀察中獲知）。

〔例4〕好奇心特別强的人，成爲科學家的百分比高（從名人傳記中獲知）。

〔例5〕「需要」往往帶來「發明或產生學說」。



〔分析〕思想的產生必須先由達成統合的原因探討起：

原因：

㈠自然因素㈡環境㈢好奇心㈣需要感

⑴自然因素：由於經驗、學習、自我尋求結果等等產生「過剩

」現象，此種現象的結果，能促成「統合」的發生，若以C表示「統合」的機會，則其關係如下：

$$C = k_1(\text{經驗} + k_2) \times (\text{學習} + k_3) \times (\text{自我尋求的結果} + k_4) \times (\text{天賦}) \quad \text{(VII)}$$

k_1 k_2 k_3 k_4 爲不等於0的正常數，（此式僅用以表示相互關係）

〔定義〕：「白癡」者，「先天精神不正常」者定爲零。

因爲白癡先天精神不正常者；達成「統合」的現象幾爲不可能，故可得下式：

（白癡、精神不正常者）

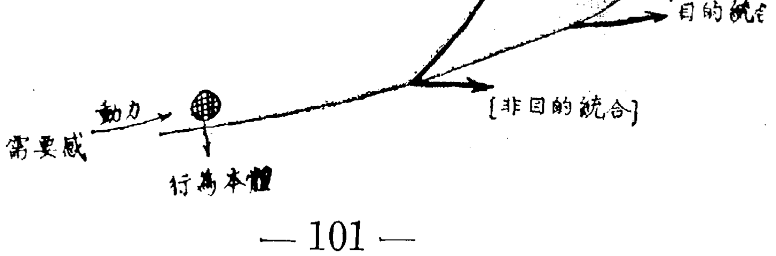
$$C = k_1(k_2' + k_2) \times (k_3' + k_3) \times k_4 \times 0 = 0 \quad \text{(VIII)}$$

(2)環境：環境的影響與「統合」的達成有密切的關連，例如：在環境多苦難、多壓迫的境域，容易產生偉大的文學或哲學；科學則不然，那需要另一種環境，我們可意識到：環境對於達成「統合」有催化作用，不同的環境催化不同「統合作用」；亦即「造成文學的環境」可催化「文學的統合」，造成「科學的環境」可催化「科學的統合」。

(3)需要感：各種研究，若欲達成目的，在其中不可缺少一些「物件」，這是一種欲達目的的「需要感」，需要感能促發己行爲者，作更進一步的努力，這種力量，能促進統合的達成，但作者將「統合分爲兩類：其一爲「目的統合」，其二爲「非目的統合」（見註2），而此「需要感」所促成的統合，就可能是這兩種。

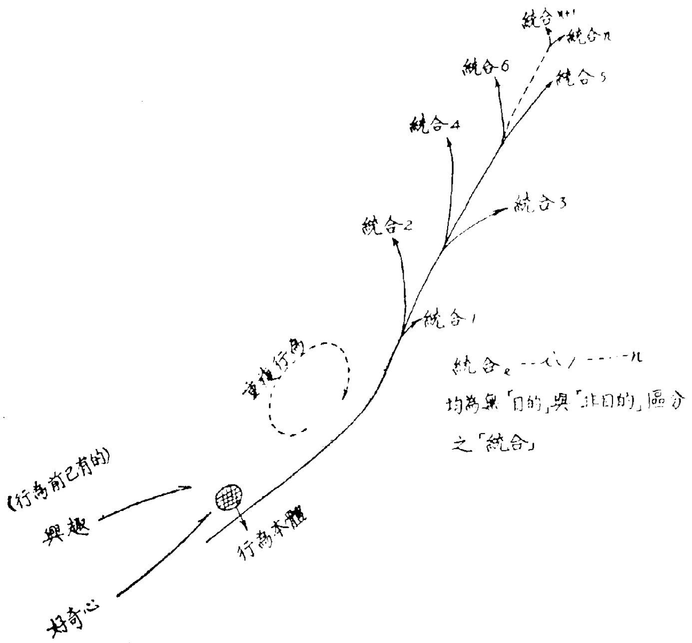
〔例1〕羅倫茲轉換式乃羅倫茲原來爲了解決別的問題而發明的方程式，這便是需要感所達成的一種「統合」結果很可能爲其「非目的統合」。（見註2）

（註2）所請「非目的統合」爲指與「需要感」不相應的「統合」其圖示如下：



(4)好奇感：好奇心的引發，多半是指「非意識性的」，好奇心能激發產生「無意識的多種重複行爲，其過程類似（Ⅳ），而其行爲的結果，就是「統合」，但這種統合，以其出發點——「好奇心」來看的話，無「目的」與「非目的」的區分，而且作者從許多的例子上觀察知好奇心所引起的行爲，較之「需要感」所引發的行爲，通常具有較長的持續力。

〔例〕某甲，對導函數很感興趣。某次，在偶然的演算中發現第二階導函數在幾何上的意義而得到結論，又從已學習過的物理中發現「二階導函數在物理上所談的加速度有密切的關係。」……這都屬於「統合」（好奇心所引起的）其圖示如下：



〔比較〕作者就上述所分析之四「因素」，作一綜合的比較與說明：

1.「統合」與「思想」關係：①「統合」的圓滿達成就是「思想」，此種「思想」在數學上即爲「定律」或「觀念」，在文學上就是一種哲理「思想」，『思想』，………②統合<思想，多種「統合」的結果，經過分析建構等過程，始能產生有條理的「思想」。

2.若環境相同，需要感相同，好奇感相同的二「行爲者」所造成的「統合」結果，並不一定會相同，因爲尚有「學習」上、「天賦」上………的差異。

3.相反的，上述之三種因素並不相同，而造成的諸「合統」結果所產生之思想相同，亦有可能。

例如：牛頓與萊布尼茲的「微積分思想」，便是一個很好的例子（當然，這種思想並非牛、萊二氏所發現，而只是他倆在「微積分」思想上，站著決定的角色。）

4.作者所分析之好奇感多半是帶有興趣的產生。

丙、領悟因素的探討：

1.行爲者（指受者）的領悟因素有二段所舉之「經驗」、「學習」、「自我尋求的結果」與「天賦」的四大重要因素，此四種因素乃「受者」領悟之非充要條件，因爲尙有下列之因素。

2.刺激行爲者（授者、教材）

刺激行爲者所授與之「物件」與受者必須遵循下列之原則：

第一、所授與之「物件」，必須建立於舊「物件」上。

第二、必須使「行爲者」認淸其所行爲的目的。

第三、要能產生刺激行爲者的因素。

第四、必須由「實在界」進入「觀念界」之層次推理。

第五、不可以自身所認爲之「當然物件」，强授與「未經驗」之行爲者。（影射數學定義授與之原則在第三章說明）

第六、建立整體性。

玆就此，………分別討論如下：

〔分析〕第一、刺激行爲者所授與之「物件」，必需建立於舊「物件」上。

〔說明〕因爲所授與之「物件」若不能建立於舊「物件」上，則使「行爲者」所引起之累積經驗不能連貫起來，必會使「行爲者」在思考上產生一段「眞空」現象，這種「眞空」現象所造成的結果會引起「理解本體」（見註3）的血液循環不暢通，而出了毛病，「本體」既已出了毛病，則無力問津「理解境地」。

第二、必須使「行爲者」認淸其所行爲的目的。

〔說明〕我們可借助（Ⅳ）或知，使行爲者認淸其所行爲的目的，就是要爲「行爲者」造成一個「有意識的動機」，如此，行爲者在「有意識動機的趨勢下可使「眼皮」張開

（見註三）。

第三、要能產生刺激「行爲者」行爲的因素。

〔說明〕此種因素極爲重要，無此因素，則行爲不能產生，無力問津「理解境地」，而此種因素爲何呢？諸如前所言：「可激發行爲者的行爲需要感，或者興趣。」等等均是。

第四、必須由「直觀界」進入「抽象界」的層次推理。

〔說明〕這是層次的問題，因爲「直觀界」爲「行爲者」最先接受之「件」，而「抽象界」則有著更高一層的位能，如果「刺激行爲者」所介紹之「物件」，不能夠遵循此原則，則使「理解本體」，多加上一層壁障。

第五、勿以已身認爲「當然之物件」，强迫授與未經驗此物件之受者。

〔說明〕「刺激行爲者」所認爲之「當然物件」，乃爲其長期處於此物件之重複行爲的影響下，以致於有能力打破陌生的「障壁」，但是一個未經驗此「物件之「行爲者」，則本已建立此陌生之「障壁」，故刺激行爲者强迫其接受此「未經驗之物件」，則不能收效；所以只有促其走上爲「行爲者」製造重複的經驗，則此障避可破除！

第六、建立整體性：

〔說明〕猶如陌生人進台中市，必需先有台中市的地圖，方能了解台中市區的分佈情形，我們若將台中市比擬成「理解域」，則此地圖即爲建立整體性的力量，那麼雖在繁雜的街道上（數學理解域）中，亦能使「理解本體」，無誤地走至「理解境地」。

〔註3〕①作者將「行爲者」達到領悟的「媒介體」稱之「理解本體」，而「理解」依「行爲者」本身因素的不同而不同。

②理解本體的「健壯」與否，要視「行爲者」本身的造化。

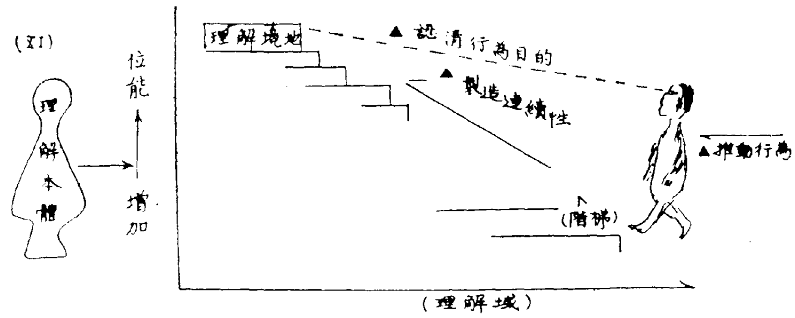
③「刺激行爲者」的任務就是要使「理解本體」（指受者所屬之）達到「血液循環」「目明」的責任，然後使「行爲者」產生行爲建立「階梯」（意謂層次），製造整體性之覽圖！

④所謂「理解境地」乃作者自擬之名詞，其位能最高，「理解本體」在行爲前位能最低，茲訂爲零。

⑤本研討之對象爲「一般行爲者」！

⑥若「理解本體」具有「健壯」之素質，則「刺激行爲者」並不一定要照上述之規則行爲之！

茲將它們的關係用圖示法表之：



3.綜論：

從(1)(2)的分析討論，我們似乎可以將這種理論映射至數學的教學行爲上，作者將此第三章的全部理論作背景，繼續討論下一章——第二章——討論的核心部分。

第　二　章

甲、學習者對於教材不易了解的原因分析：

1.許多教師在教學的當中，最容易犯的毛病之一，就是不能夠使學習者（行爲者）眞正了解他們「行爲」的目的，茲舉例如下：

〔例 1〕在講到「線性映射」時，許多教師只是一味地介紹課本的定義、定理、系統邏輯推理，作者曾就此問題，調查過許多學生的反應，普遍是：「太玄了！根本不知道它們的實際意義，同時好像沒有眞實感，我們只知道背定理公式，練習演算技巧」，作者就此問題作如下分析：

〔分析〕①在第一章丙節中，談到「刺激行爲者」必須使行爲者認清其所行爲的目的，以及由第一章甲段（Ⅳ）式中，亦顯示此種教法所產生的力量，無法使「行爲者」產生「動機」，自然不能得到有效的「行爲結果」，因此教師的教學之第一步，就是要致力於使學習者如何才能認淸他們的學習目的與方向！

②如果學習的目的與方向無法使之確立，那麼下一步的各種定義，推理等均屬無效。

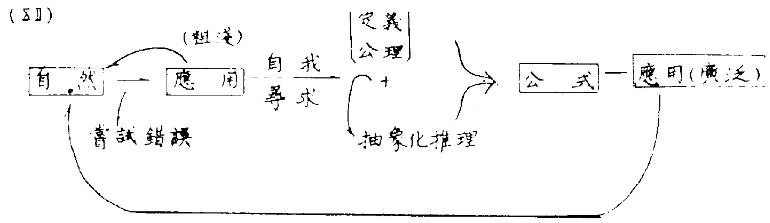
〔例 2〕「大數法則」「方差」等等實驗本僅列出的是一堆堆定理，這又何用，如果教師亦是「依樣畫葫蘆」，照著課本講，對於學習者（未經驗）來說，他們的疑問是「方差」為何？「大數法則」又為何？以致於因摸不著頭緒，索性裝懂，這是一個極其嚴重的問題，教學本身不能夠使學習者了解他們學習的意義，只教會他們「算術」！實不足之！

在一般的數學演化形式應爲：

→ 自然 問題分析 ⟶ 定義 公理 公設 (數學模式) → 抽象化推理(邏輯推理)→公理—應用

附：當然這只是一般形式，亦很有可能是如下的情形：

（在物理、化學上常見）



我們可以知道所談的「使行爲者」了解其行爲的目的，其精神就是在建立從（自然）至（問題分析）間橋樑，如果這座橋樑無法建立起來，則整個學習過程並不完全，因此它可以說是學習者感到疑惑的原因之一。

2.「問題分析」與「定義」的相互關係：

這一小節所談到的是學習者對於教材不易了解的第二個原因，"教師一一開始上課，就扯到定義，這個問題比第一節所言者還要嚴重"。作者假想若有一位教師他教的教法如下：（以如下之教法試驗學生）

（A）「所謂內積，就是考慮向量之投影，我們定義 $\overrightarrow{q}$，$\overrightarrow{u}=|\overrightarrow{a}|\cos\theta$，則 $|\overrightarrow{a}|\cos\theta$ 稱爲在單位向量 $\overrightarrow{u}$ 方向的投影量……則可

與$\vec{b}$垂直的條件爲$\vec{a}\vec{b}=|\vec{b}||\vec{b}|\cos\theta=|\vec{b}||\vec{b}|\cos 90°$…

現在我們導出它的實際意義，由向量的加減法導出…………

若令$\vec{a}=(x, y, z)$ $\vec{b}=(x_2 y_2 z_2)$則$|\vec{a}||\vec{b}|\cos$

$=x_1 x_2+y_1 y_2+z_1 z_2$

因$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 故$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1 x_2+y_1 y_2+z_1 z_2$。」

（B）「向量，我們定義定它們的②加法如下：當$\vec{a}\vec{b}$兩向量相加則其和爲以兩向量爲二邊所形成之平行四邊形的對角線（具有兩向量共同始點之對角線）。

〔討論〕(2)在（A）段劃線部分，是作者發現學生不易了解向量之內涵關鍵所在，這話怎麼講呢，那是因爲許多教師不能夠如圖(XII)中所列出之規則「先問題分析，而後引入定義」教學方法教導學生，若問題分析做得不夠，便引入定義；或者根本不加分析，便引入定義，不但不能使學生的思路連貫，而且會造成學生在領悟的過程中發生本末倒置的現象。學生以爲定義「決定」一切，所有自然現象本來就被定義所限制，甚至以爲定義是「天然現象」的錯誤觀念。

〔分析〕在弧線①中，是內積的定義，首先使學生產生一種莫明其妙的感覺和疑問：「爲什麼要這樣定義，是否本來就一定要這樣去定義？」一旦這種感覺產生，在某一種角度來看，必會在他的理解過程中，增添了許多的阻礙，時間愈長，阻礙愈大，直至弧線②所示導出$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1 x_2+Y_1 Y_2+z_1 z_2$段實際意義後，已不能夠消除由弧線①中所引起學生的疑惑，其原因，乃是定義的輸入與後面的問題分析，引入時間倒置，以致於兩者成反向的相距，不能一氣連貫的緣故。

在（B）段中犯的毛病更大，沒有把向量眞正的內涵灌輸給學生，而一下子就來定義「向量」的「行爲」，它所犯的錯誤正是第一章丙段所指出的：「不能夠由直觀界進入觀念界」所謂「直觀界」，就是自然界，例如向量的地位，

在座標平面上的關係均是，所謂觀念界，乃指抽象化後的界域。

3.整體性的缺少：

這是學習者不能了解教材的第三個原因：

不少教師舉例題的時候，東鱗西爪，不能將以往所授的課程與現行所授的課程連貫起來，例如：講「導數」時，未能將「極限」的觀念連貫，講行列式時，又未能將線性映射與線性相關；體積等觀念作一全盤性之分析，以至於造成行列式是行列式，方陣是方陣線，性映射是線性映射的結果；學生思路不能連貫，就如第一章丙段所述；「理解本體」血液無法暢通（因爲血管與血管之間不能銜接）；「本體」已出了毛病，又焉能達到「理解境地」！

4.學習者本身的因素：

這是學習者不易了解教材的第四個原因：

諸如：以前教材即未能了解吸收，本身智慧能力與「學習背景」的缺乏，都是致成的因素。

作者所謂的「學習背景」，就是在學習某一教材之前，即從未接觸過此類問題，也從未想過此類問題，或是對此種問題作過試探等等均是，當然縱有好的「學習背景」亦未必能達到理解境地。

5.其他因素：

例如教師本身的錯誤，或者用的術語太過早等等。

乙、教學方法的改進建議：

作者基於前節以及第一章之結論，歸結如下：

(A)引發學習動機，啓發學習目的。

(B)首重連貫與系統化。

(C)旁徵博引，避免套公式，去除學生依賴心理。

(D)加强溯源的功夫。

(E)例題多舉，避免太形式化的邏輯推理。

(F)問題首重分析，定義講授應列分析之後。

(G)「術語」不用得太早。

(H)注重學生思考的訓練。

(I)茲就上述所列之八項，分別說明如下：

〔說明〕(A)引發學習動機，啓發學習目的。

此點在前一節已敍述很多，於此作者再舉一例：

〔例1〕不少教師在介紹「固有值」一節時，一開頭，就講到其定義與邏輯推理，導出公式，學生大多不能接受這項事實，為何？

作者曾試以下列做法：試驗幾位學生（已學過座標變換與線性映射者）其方法如下：

作者先告訴這幾位學生二次式$3x^2+4xy+6y^2$將它們標準化，要如何做，同時，並在「方跟箋」上畫其圖形後，得知"$3x^2+4xy+6y^2$若化成qx^2+py^2的形式，只是座標的旋轉所造成的………過了一天後，其中有一位學生興緻冲冲地展示他的算法如下：

令$Ax^2+2Bxy+Cy'=Px^2+qy'^2$

$$\text{則又可令}\begin{array}{l} x=a_{11}kx'+a_{11}y' \\ y=a_{11}x'+ka_{11}y \end{array} \rightarrow \begin{cases} y'=(x-ky)a_{11} \\ x'=(kx-ky)a_{11} \end{cases} \quad (1)$$

若欲(1)式成立，則得

$$(\alpha)\ 2Aa_{11}^2k+2Ba_{11}^2(k^2-1)-2Ca_{11}^2k=0 \quad (2)$$

$$(\beta)\ a_{11}^2(k^2+1)=1$$

$$\begin{aligned}(\gamma)\ P&=Aa_{11}^2k+2Ba_{11}^2k+ca_{11}^2 \\ &=a_{11}^2(Ak^2+2Bk+c) \quad (2') \\ q&=Aa_{11}^2+2Ba_{11}^2k+Ca_{11}^2k^2 \\ &=(A+2Bk+Ck^2) \quad (3)\end{aligned}$$

(1)將（$x=0$，$y=1$）（$x=1$，$y=0$）分別代入(1)

$$\text{得}\left.\begin{array}{l} C=a_{11}^2p+qk^2a_{11}^2 \\ A=a_{11}^2pk^2+qa_{11}^2 \end{array}\right\} \begin{aligned} A+C&=(p+q)(k^2+1)a_{11}^2 \\ &=P+q\text{（由3得）}\end{aligned}$$

〔2〕由(3)知 $a_{11}^2=\frac{1}{k^2+1}$ 代入(2)得

$$Bk^2+(A-C)k-B= \quad \therefore k=\frac{-(A-C)\pm\sqrt{(A-C)^2+4B^2}}{2B}$$

令2B＝B則

$$k=\frac{-(A-C)\pm\sqrt{(A-C)^2+B_1{}^2}}{B'}$$

$$a_{11}=\sqrt{\frac{1}{k^2+1}}$$

又知，$P \doteq a_{11}{}^2(Ak^2-2Bk+C)$

$$=\frac{1}{k^2+1}\left[A\left(\frac{-(A-C)\pm\sqrt{(A-C)^2+B'^2}}{B'}\right)^2+\right.$$

$$\left.2B\frac{(A-C)\mp\sqrt{(A-C)+B'^2}}{B'}+C\right]$$

$$q=a_{11}{}^2(A+2Bk+Ck^2)$$

$$=\frac{1}{k^2+1}\left[\left(A-2B\frac{(A-C)\pm\sqrt{(A-C)^2+B'^2}}{B'}\right.+C\right.$$

$$\left.\left(\frac{-(A-C)\pm\sqrt{(A-C)^2+B'^2}}{B}\right)^2\right]$$

則可知　$Pq=(B^2-AC)$　(D′)

$\therefore -4Pq=4B^2-4AC=B^2-4AC$　(D)

故由(A)(B)(C)(±′)(3′)得　解"$3x+4xy+6y^2$"

得知 $K=\frac{-(3-6)+\sqrt{3^2+4^2}}{4}=2$

（Ⅰ）$a_{11}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$亦即變換後座標之單位向量$\overrightarrow{ei}$與舊座標單位向量 i 之關係爲

$\overrightarrow{e_2}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}i_1\pm\frac{1}{\sqrt{5}}i_2$　　$pq=(B^2-AC)$

$=-(4-6\times3)=14-①$

$\overrightarrow{e_1}=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}i_1\mp\frac{1}{\sqrt{5}}i_2$　　$p+q=q\Rightarrow q-q$

$=p$代入①得$p\begin{cases}2\\7（不合）\end{cases}$

亦即$2x'^2+7y'^2$　　$\begin{cases}7\\2（不合）\end{cases}$

（Ⅱ）若$k=\frac{-(3-6)-\sqrt{3^2+4^2}}{4}=-\frac{1}{2}$　則$Q_{11}=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\overrightarrow{e_2}=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}i_1\mp\frac{1}{\sqrt{5}}i_2$

$\overline{e_1}=\mp\frac{1}{\sqrt{5}}i_1\mp\frac{2}{\sqrt{5}}i_2$

p同理可得　$p=\begin{cases}2（不合）\\7\end{cases}$　　$q=\begin{cases}7（不合）\\2\end{cases}$

故$7y'^2+2y'^2$

從這一個試驗，作者發現能啓發「行爲者」行爲的「動機」與「目的」，可產生很大的效果，故他們做此之後，不管有無做出來，當再去接觸「固有值」理論時，已經豁然貫通。雖然上述的求法與「固有值」所採取的理論並不相同，但是經過這樣一「算」後；更能了解「固有值」的精

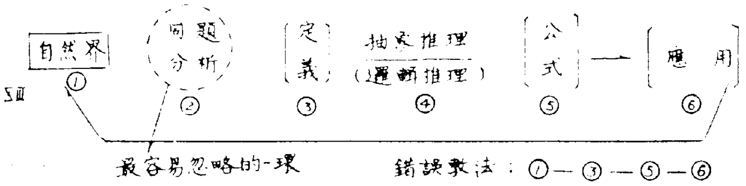
神所在，其實，此種情形在第三册向量所介紹的「和角公式」導出法相似，總結一句話：要讓學生了解，您所教的「東西」是什麼？

(B)首重連貫與系統比：

這在第二章甲節3中已說明，不必贅述。

(C)旁徵博引、避免套公式、去除學生依賴心理：

教師犯的毛病就是如下圖：



動不動套公式，全使受教者，頭腦變成很死板，不能活用，以致於問題稍一改變，則不能觸類旁通，推究其原因，乃因套公式後，學習者在「學習」上，未臻成熟。

(D)加强溯源的功夫：

所謂溯源，就是"將一個陌生的環境與受者所認知的「當然物件綴合起來"說得更淺顯一點，就是注重培養學生連貫的觀念，這個連貫實與"數學史"有密切關連，這一部份將在第三章作一詳細說明。

(E)例題多舉、避免流於太形式之邏輯推理：

在第一章已談過，經驗學習方面的「過剩」現象，便能產生「統合」的現象，這是一個思想的前驟。而邏輯推理是「統合」過程中所具有的能力之一。基於此，可知教者多舉例題，就是在造成學習者在經驗方面的「過剩」現象，所餘的邏輯推理，自然能輕鬆的帶過。或者根本不講，學習者多少亦能自推其理。

(F)問題首重分析、定義的講授在分析之後：

這個問題，作者以此章甲段第2(A)(B)兩例作一說明。

〔說明〕1.在(A)段中，如果那位教師的教學方法改為如下之文：

「…將 $|\vec{a}| \times |\vec{b}| \cos\theta = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ 的過程，由向量加減法與餘弦定理推導出來，然後告訴學生 $|\vec{a}| \times |\vec{b}|$ $\cos\theta$的相關意義（如投影上的地位……），當這些實在的觀念在他們的「理解」域中紮實後，再言，「為了討論方便起見，我們令 $|\vec{a}| \times |\vec{b}| \cos\theta = \vec{a}$ 、$\vec{b}$ 而叫它們為 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所構成的內積……」

2. 在(B)段，也就是講向量時，竟有許多學生連「方眼箋」是什麼都不知道，就是座標平面的內涵亦有人不知；其實，在講向量之前，教師應先讓學生在方眼箋上塗塗畫畫；讓他們認識一番，給予學生在接受之前，能有預備的時間。
然後，可舉一些例子，例如在方眼箋上舉一些「行動」的東西，討論運動的結果，慢慢……才將向量的內涵從中疏入，這樣學習者的「學習動機」可因之而確立，這個確立後，再分析而導入定義。（其實，向量的加減法應不必給予定義，因它本身就有極實在的一面。）

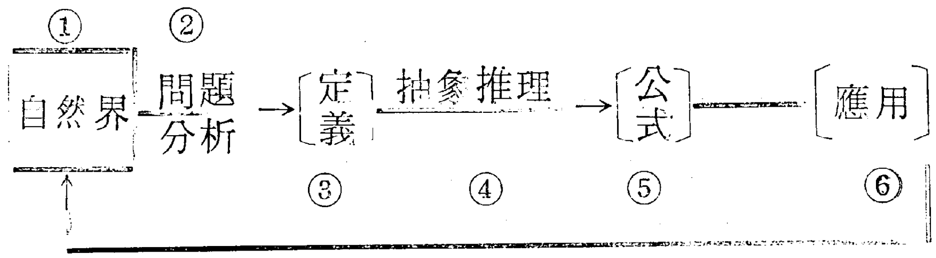
(G)術語不可用得太早：

作者曾在高三的教室，實地觀察上課的情形，發現教師上「有限幾率空間」時，一定義之後，馬上就把「術語」套上，例如：「獨立事件」、「相依事件」、「條件機」……等等；在學習者尚未完全地熟悉這些詞語時，便如此做，等於是在「舊經驗」尚未奠立時，「新經驗」卻接踵而至，頗有應接不暇之感；這亦是教師應注意改進的事項，「寧願多費口舌，來換取學習者的了解」……犧牲精神。

(H)注重學生思考的訓練——（最具「活性」的教學性）

前面所談的有些部分似乎太强調「刺激行為者」（指教師教材兩者）的主動行為，故作者認為除此之外，尚須給予學生思考的訓練，這句話絕不與上述諸文矛盾，作者深知這思考訓練的時間，介於「定義」至「公式」的中間一段時間，其理已在（E）段作過詳細推理，其關係如下：

教學步驟：①→②→③→⑤→⑥（最具創性）



〔綜論〕在這一章，作者多半以推理方式說明之，同時從此章中我們很明顯地看出，教學工作是一件很艱難的工作，教者想儘量地把自己所學的授與學習者，而學習者也是想儘量地了解所接受的「物件」，但是往往兩者心理之間不能溝通，這是今日數學教育的困難所在；作者權充兩者的引線，多方觀察、擇究，所得的就是第四章內容，限於篇幅關係，無法舉太多的例子，實感遺憾，然而在這一章起，已給予教者確立了地位卻是有目共覩的。茲再將未論及之教學錯誤方法列出：（依圖XIV）

不正常：
- ⑤→⑥
- ①→③→⑤→⑥
- ③→④→⑤→⑥

最適當之教學法（主動性）：
①→②→③→⑤→⑥

適當教學法（被動性）：
①→②→③→④→⑤→⑥

第　　三　　章

〔內容大意〕教材編排方式之改進建議：

〔建議1〕在第二章乙段（E）中所言及「加强溯源功夫，作者發現不少同學在學習算的技巧極富熱心，但是對於它的本質可說一無所知，考究其原因，「數學史亦有很大的關連；在實驗本的教材編排方式，不盡之處當然有，但大體上來講都能遵守其本身的原則：⑴遵重教學發展原意，使不與實際問題脫節。⑵專注系統性的方法。但是作者發現的是在每一章前面所介紹的數學史（即前言部分）太貧乏，例如座標幾何的發展史，行列式發展史等等，因為若介紹數學內容而缺乏數學史，實猶如介紹一個國家，卻不介紹她們的歷史一樣，因此，作者建議實驗本編輯諸先生，能在每一章前言部分，介紹該章之數學史（稍詳盡一些）最好附上發展之動機。

〔建議2〕實驗本第第六册第三章，所介紹之"高中數學教材的回顧"頗有大海面瀾之勢，更加上在此章中以樹枝形貌來表明三年的教材的每一章單元間相互之關係，作者認爲此種做法不必要至高三的教材才做，而最好能在每一章均能附上，例如介紹複數，便把樹枝的整體搬上，並以顯明的方式標出此章所在相關位置，以期達到「在片斷中，不失連續的功效。

〔建議3〕實驗小組所寫「數學教室」之刊物，雖說僅供教師學生參考，但並不普遍，作者建議能與數學課本相提並論，並列入學校教學的參考工具書。

〔建議4〕在第三册介紹之自由度一節附上＊＊之符號，不知這種做法有無必要，作者曾發現許多學生看到這個符號便避而遠之，就是很容易了解的問題，也變成不懂，這種符號將學生進入「自由度」裏的門路封鎖住，作者基於此，認爲教材上不應列出此種閉絕門路的符號！而應發行專供教師利用的說明册子，將那些份量較重，講授或不講授標明之。總之，此種符號似不應出現在學生的「心思」中。

第　四　章

〔結論〕在今天的數學教育中，存在著許多有待改善的問題，但無可否認，教育是多方面的，並不是「刺激行爲者」單方面的問題，我們只有一步緊跟著一步、踏踏實實地，以「前仆後繼」的犧牲精神，持著謹愼的態度，向著數學教育的改進途徑上努力，作者即是在此途徑上摸索的一員，當然這種摸索，常常會使作者失望與阻滯，但是本著嘗試、努力、有恆的座右銘，使得作者再從顚仆中爬起來，這些研究的心得，即是此種行爲的表現，在嘗試錯誤中，抽取、整理而得到「行爲結果」，僅以此一點點獻給數學教育工作者，俾能在此改進的工作上，盡一些微薄的力量。