以正三角形的角度求弧長的方法及推廣應用

國小組數學第三名

台中市台中國民小學

製作學生：陳玲玲等二十人

指導老師：蔡行吟　黃錦明　黃定國

一、前　　言

科學展覽至今十五年，一般作品偏重於自然科，至於我們：

①小學的數學作品罕見展出，感覺美中不足。

②根據台大數學系黃武雄博士高見：鼓勵我們數學作品也要「平衡發展」。

二、研究動機：

①在課本裏沒有圖面的作法及說明，尤其從複雜圖面求出其弧長的周圍更難。

②我們想出運用正三角形的角度，創造幾種有趣的圖面求它的周圍長度，探討其作法和基本原理。

三、研究目的：——推廣應用

四、研究過程：

ㄅ、基本原理：

求弧長＝半徑×2×圓周率×$\frac{\text{中心角}}{36}$，

因為圓的中心角是360°，所以兩個半徑所夾的中心角相對的弧線的長是整個圓周的 $\frac{\text{中心角}}{360}$

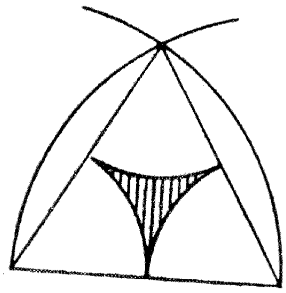
ㄆ、正三角形的基本認識：

①三角形中各邊都是同長叫做等邊三角形、亦稱正三角形，其內角均為60°。

②作法：畫兩兩相切之三個相等圓，聯接三圓的圓心，即成一正三角形。

研究一：正三角形角度求弧長之推廣應用（有效數字爲小數第二位）。下面圖形是每邊10公分的正三角形，求斜線部份的周長是多少公分？

解　法：



1：$5\times2\times3.14\times\frac{60}{360}=5.23\cdots\cdots$

（任一內角所對的弧長）

2：$5.23\times3=15.69\cdots\cdots$（三角內所對的弧長之周長總和）

答：15.69公分

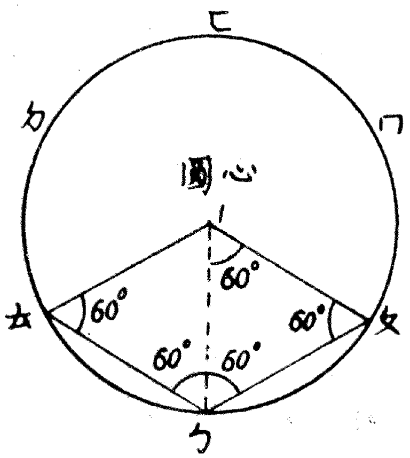
研究二：在一個圓形裏；畫出同大的六瓣形和其作法。

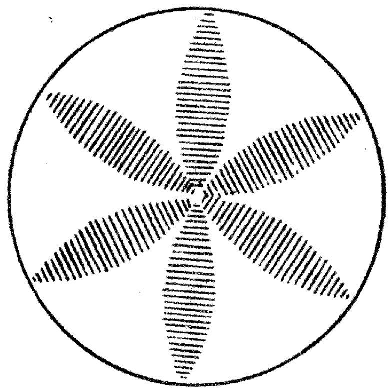
註：圓的畫法過程：從略。

推廣應用（有效數字爲小數第二位）：

應用一：

如下圖在半徑爲10公分的圓裏，求出斜線部份的周圍全長？





說　明：

1.ㄅㄆ＝ㄅㄧ＝ㄅㄊ＝ㄆㄧ＝ㄊㄧ（等半徑作圖）

2.三角形ㄅㄆㄧ，三角形ㄅㄊㄧ爲正三角形，所以角ㄅㄆㄧ＝60°
角ㄅㄊㄧ＝60°

3.故角ㄆㄅㄊ＝60°＋60°＝120°

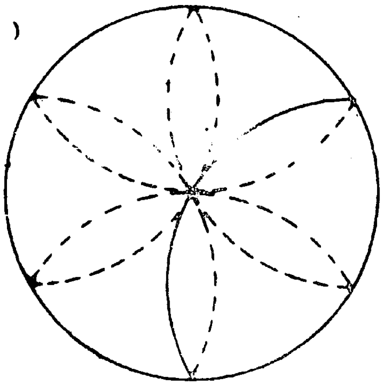
解　　法：

1.弧線ㄆ丨ㄊ$=10\times2\times3.14\times\dfrac{120}{360}\cdots\cdots=20.93$

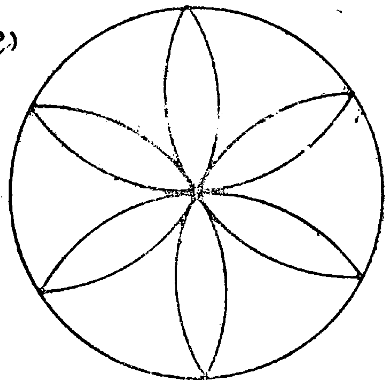
2.弧線ㄅ丨ㄇ、ㄆ丨ㄈ、ㄇ丨ㄉ、ㄈ丨ㄊ、ㄉ丨ㄅ、ㄊ丨ㄆ等六個相等的弧線相交於圓心，所求周長$=20.93\times6=125.58$

答：125.58公分

(1)



(2)

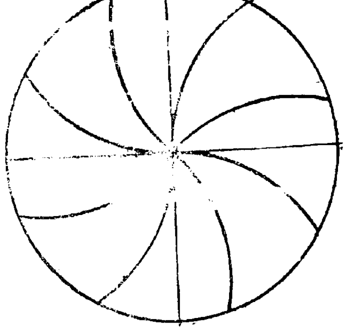


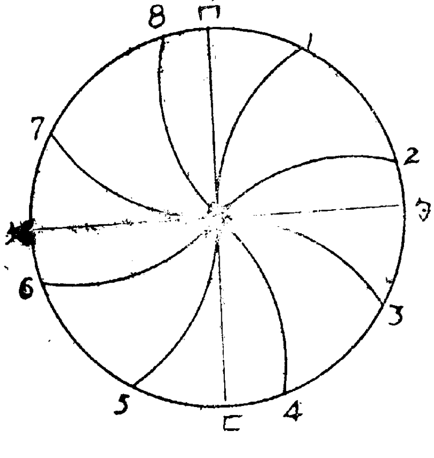
研究三：畫出下圖及其作法原理：

作　　法：

1.如下圖在圓[illegible]垂直的直線ㄅㄆ、ㄇㄈ。

2.以ㄅ、ㄈ、ㄆ、ㄇ為圓心，以原半徑之長為半徑，交圓周於1、3、5、7四點。（如下圖）

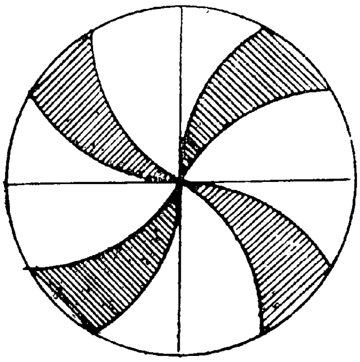


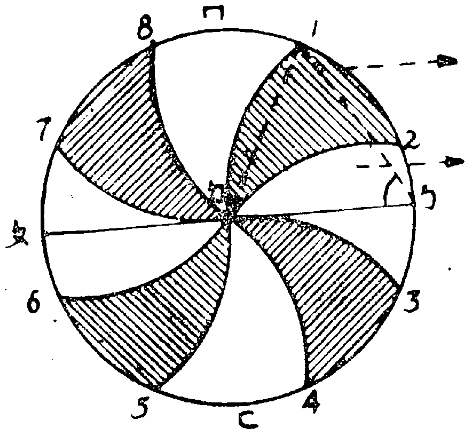


、3、5、7點為圓心，以原來半徑之長為半徑，畫弧交圓周於8、2、4、6四點即成。

應用二：設右圖圓的半徑為10公分，求斜線部份的周長？（我們設計的圖）

討　　論：





此弧線的長是整個圓周的$\frac{30}{360}$（同應用一的原理）

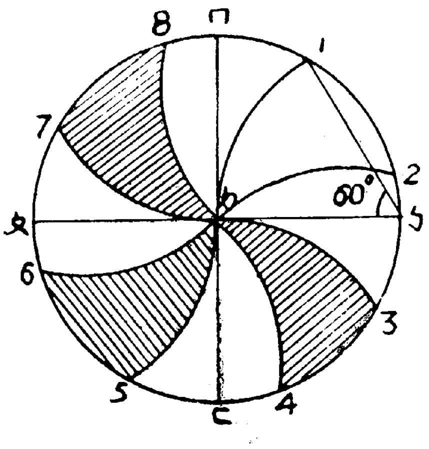
構成正三角形（同應用一的原理）

解　　法：

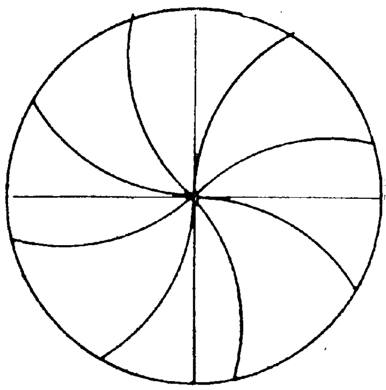
1.聯結ㄅ1，則角ㄉㄅ1為60°（原理如上題）

2.弧長ㄉ1 $= 10 \times 2 \times 3.14 \times \frac{60}{360} = 10.47$

(2)



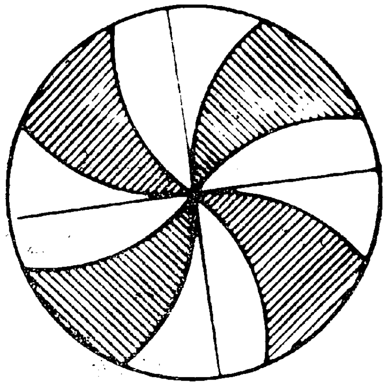
(3)



3.弧長$\widehat{ㄉ1}$，$\widehat{ㄉ2}$，$\widehat{ㄉ3}$，$\widehat{ㄉ4}$，$\widehat{ㄉ5}$，$\widehat{ㄉ6}$，$\widehat{ㄉ7}$，$\widehat{ㄉ8}$為8條相等的弧長，所以：$10.47 \times 8 = 83.76$

4.弧長$\widehat{12}$ $\widehat{34}$ $\widehat{56}$ $\widehat{78}$ 爲4條相等的弧長，所以

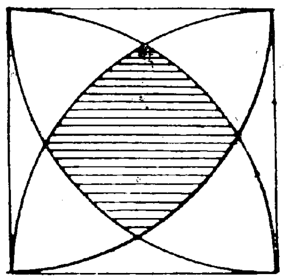
$$10\times2\times3.14\times\frac{30}{360}\times4=20.93$$



5. $83.76+20.93=104.69$

答104.69公分

應用三：每邊10公分的正方形，以其各頂點作圓心，取10公分爲半徑，各作$\frac{1}{4}$個圓，求下圖黑影部份的周圍的長？



討　　論：

圖　1

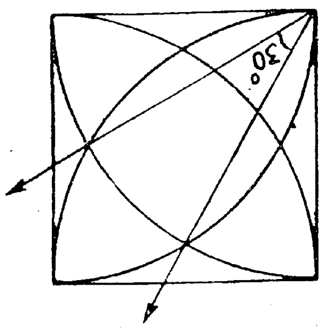


圖　2

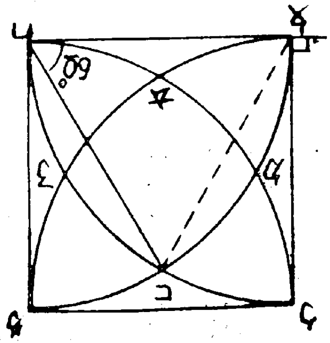


圖　3

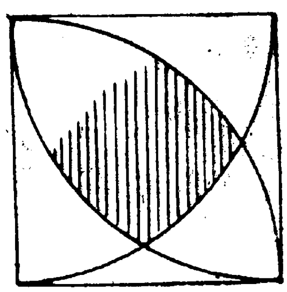
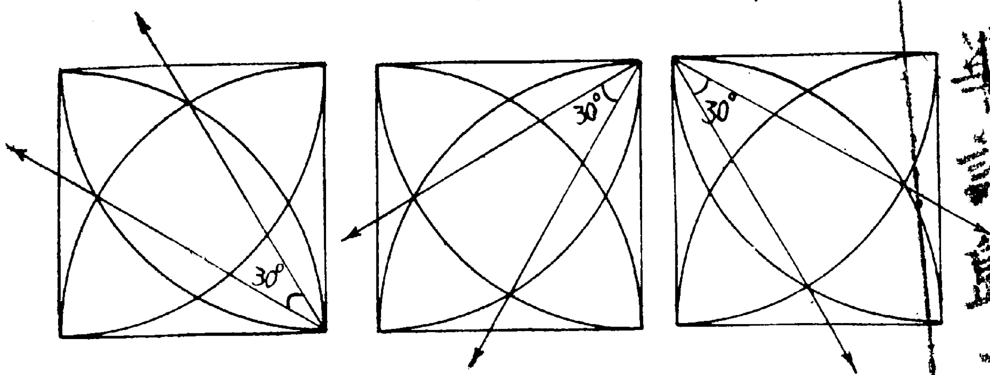


圖 4　　　　圖 5　　　　圖 6



閱畢請歸還

圖3～6 角度各為30°（原理同應用一）

證明上圖：

1. ㄅㄇ＝ㄇㄈ＝ㄆㄈ＝半徑（作圖）

   三角形ㄆㄇㄈ為一個正三角形。

   角ㄇㄆㄈ＝60°

   角ㄅㄆㄈ＝角ㄅㄆㄈ－角ㄇㄆㄇ＝90°－60°＝30°

2. 同上的證明角ㄇㄆㄋ＝30°

   角ㄈㄆㄋ＝90°－30°－30°＝30°

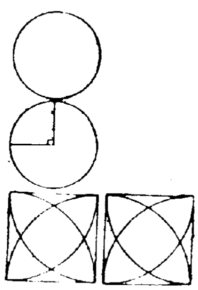
3. 同上的證明角ㄈㄇㄉ＝角ㄊㄌㄉ＝角ㄊㄅㄋ＝30°

解　法：（有效數字為小數二位的近似值）

1. $10\times2\times3.14=62.8$………

2. $62.8\times\frac{90}{360}=15.7$………

3. $15.7\times\frac{30}{90}\times4=20.93$



答20.93公分

結　論：

1. 我們利用有效數字為小數二位的近似值（課本第十册第一頁）探討正三角形的中心角求各種圖面弧長周圍的方法，並列舉三種有趣的圖面求其斜線部份的周長之推廣應用，開闢推理的「思路」。

2. 我們首先由圖面研究弧長與角度的關係，並利用求弧長的基本原理，然後從複雜的算數中歸一原則，又從推理中得到解答。