

各種形體表面積的簡易算法

國小組數學第一名

苗栗縣建功國民小學

製作學生：湯智君等四人

指導老師：陳耀南 黃琇璧

一、動機：

我們學習過正方體、長方體與圓柱體的展開圖作法以後，覺得非常有趣。當我們練習到課本第十五頁，求各形體的表面積這一單元時，使我們聯想到：

(一)這些複雜的形體是不是可以做成展開圖？

(二)這些形體表面積的算法除了老師教我們的方法以外有沒有更簡易的算法？於是我們在老師的輔導下開始研討。

二、問題：

下列各種形體(一)能否做成展開圖？

(二)求表面積有沒有更簡易的算法？

三、探討算法：

(一)探討第一類問題（規則堆列的正方體積木所成形體）所得重點：

1. 正方體積木，每面面積都相等，因此找出規則堆成的形體表面共有幾個積木面是最要緊的。
2. 找積木面簡單可行的方法是：由前（正）後（反）左、右、上、下六個方向仔細觀察，可以發現每一個方向看到的是：第一層（最上層）一面，第二層兩面，第三層三面……以下類推。因此我們得知每一方向看得到的面數為： $(1 + 2 + 3 + \dots + n)$ n 代表層數。
3. 每一方向的積木面既為 $(1 + 2 + 3 + \dots + n)$ 則此形體表面的全部積木面為： $(1 + 2 + 3 + \dots + n) \times 6$
4. 因此可得規則堆列的正方體積木所得形體的表面積為： $(積木一面面積) \times (1 + 2 + 3 + \dots + n) \times 6$

(二) 探討第二類問題（其他各形體）所得重點：

1. 一條線可以圍成各種規則與不規則的形狀，一張紙也可圍成各種形體—空心無底的體。
2. 一張紙圍成規則形體後，在上、下兩方加上同形狀的兩個面，即成一規則的空心柱體。
3. 將上列各形體側置、正置、倒置……等仔細觀察，即知各形體都是一些規則的柱體。
4. 長方形紙可圍成柱體的側面，一柱體展開後，側面定是長方形—長為底面周長，寬為高度（寬度）。
5. 長方形面積是長 \times 寬，因此柱體的側面積應是〔底面周長 \times 高度（寬度）〕。
6. 因此可知各柱體的表面積應是：（底面周長 \times 高）+ 底面積 $\times 2$ 。
7. 這些形體都能畫出它的展開圖來。

四、歸納公式：

第一類形體（規則堆列的正方體積木）的表面積 = 積木一面面積 $\times (1 + 2 + 3 + \dots + n) \times 6$

第二類形體（規則柱體）的表面積是：底面周長 \times 高（寬度）+ 底面積 $\times 2$

五、分析比較：

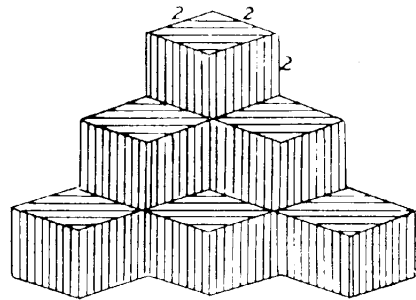
第一類表面積的求法，過去多利用透視的方法或 6 面 \times 積木塊數 $- 2$ 面 \times 接觸次數，求得表面面數後再求全部表面積。現在有了簡易算法，只要數一下積木的層數，利用 $(1 + 2 + 3 + \dots + n) \times 6$ 一算，便得全部表面面數。

第二類表面積的算法，過去多利用透視的方法，這種方法在不算複雜的形體時還好。但遇到複雜的形體時有些同學不易想像透視的原理，有時又容易遺漏。現在我們發現的簡易算法，只要這形體有規則，寬度相同，把它看成一個柱體，找到它的底面與高，便容易多了。下面兩類問題各用一般算法與簡易算法，列式計算如後：

第一類 一般算法

1. 計算表面面數為36，全表面積 $(2 \times 2) \times 36 = 144$
 2. 看得到的面數乘以2得全面數 $18 \times 2 = 36$ ， $(2 \times 2) \times 36 = 144$
 3. 全部10塊共有面數 $6 \times 10 = 60$ ，接觸面12次每次少2面，計少 $2 \times 12 = 24$ 剩下表面數 $60 - 24 = 36$ 表面積 $(2 \times 2) \times 36 = 144$
- 層數多時，不但個數不易算出，接觸次數更易弄錯，若用能見面數 $\times 2$ 計算也很費時。

簡易算法



全部三層共有面數

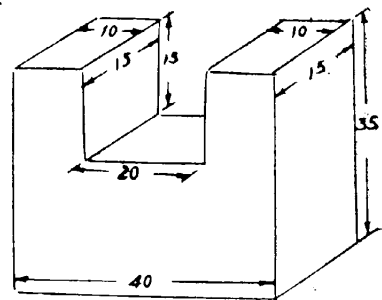
$$(1 + 2 + 3) \times 6 = 36$$

$$\text{表面積 } (2 \times 2) \times 36 = 144$$

第二類 一般算法

1. 上下兩面 $15 \times 40 \times 2 = 1200$ ，左右兩面 $15 \times 35 \times 5 = 1050$ ，前後兩面 $(40 \times 20 + 10 \times 15 \times 2) \times 22 = 2220$ 凹進內側兩面 $15 \times 15 \times 2 = 450$ 全部表面積。
 $1200 + 1050 + 2220 + 450 = 4900$

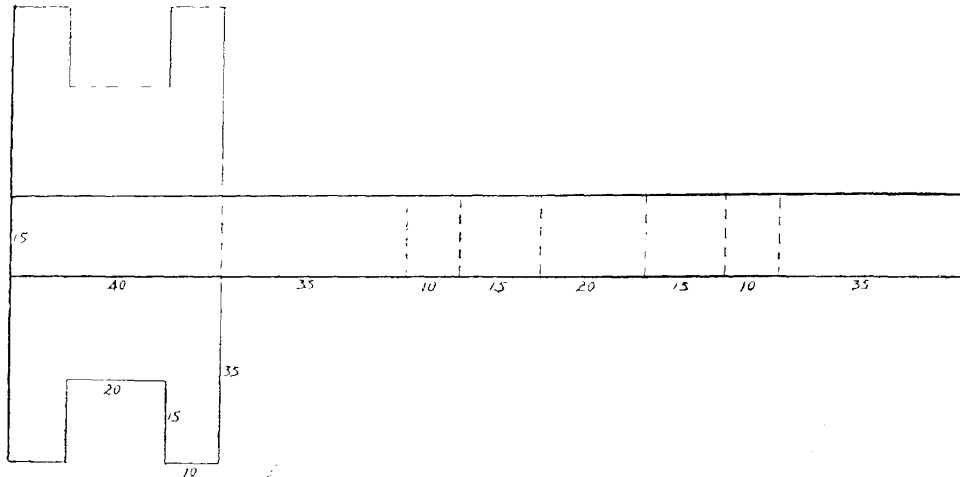
簡易算法



2. 從正面看得見的面積 $\times 2$ (

$$40 \times 20 + 10 \times 15 \times 4 + 15 \times$$

$$15 + 35 \times 15 + 20 \times 15) \times 2$$



$$= 4900 \quad \text{底面周長} \quad 35 + 10 +$$

$$15 + 20 + 15 + 10 + 35 + 40 = 180$$

$$\text{側面積} \quad 180 \times 15 = 2700 \quad \text{兩底}$$

$$\text{面積} \quad (40 \times 20 + 15 \times 10 \times 2)$$

$$\times 2 = 2200 \quad \text{全部表面積} :$$

$$2700 + 2200 = 4900 \quad (\text{可免凹進}$$

去兩塊被遺漏之險)

六、實驗結果：

我們為證驗這種簡易算法的可行性，印製了一種試卷，商得幾位老師的合作，借用數班小朋友，分別在介紹簡易算法前後，測驗一次，其結果統計如下表：

表 I 兩種方法作答所費時間比較表

	人 班	時間 (分)											合 計	平均每人 所費時間 (分)
		3	6	9	12	15	18	21	24	27	30			
一 般 算 法	一						8	10	3	2	29	52	26.2	
	二				6	26	20	2	2			56	16.4	
	三				2	9	10	6	4	15	8	54	22.3	
	四					2	3	6	4	14	26	55	26.6	
	合 計				8	37	41	24	13	31	63	217	22.25	
簡 易 算 法	一			2	6	2	6	11	9	7	9	52	21.8	
	二		1	5	10	32	6	2				56	14.3	
	三		6	1	2	5	9	10	8	13		54	19.3	
	四			6	6	8	10	7	14	4		55	18.5	
	合 計		7	14	24	47	31	30	31	24	9	217	18.48	

表II 兩種方法作答答對題數比較表

人 數 班	題 數	6	5	4	3	2	1	0	合 計	平均 答對 題數	平 均 百分比
一 般 算 法	一	2	6	7	6	4	10	17	52	2.04	34%
	二	2	15	12	8	5	5	9	56	3.10	51.66%
	三	6	8	5	4	8	12	11	54	2.52	42%
	四	7	9	10	7	15	5	3	55	3.24	54%
	合 計	17	37	34	25	32	32	40	217	2.73	45.5%
法	百分比	7.83	17.05	15.67	11.52	14.75	14.75	18.43	100		
簡 易 算 法	一	14	15	6	1	7	5	4	52	3.94	65.66%
	二	11	12	7	9	5	8	4	56	3.56	59.33%
	三	16	10	4	13	2	8	1	54	3.94	65.66%
	四	22	8	8	7	3	7		55	4.33	72.16%
	合 計	63	45	25	30	17	28	9	217	3.94	65.66%
法	百分比	24.42	20.28	11.52	13.82	7.83	12.9	4.15	100		

表III 兩種方法作答，各題答對人數比較表

人 數 班	題 次	一	二	三	四	五	六	備 註
一	一	9	24	23	15	25	10	
	二	7	36	36	35	29	31	

一般算法	三	36	28	20	22	16	14	
	四	42	35	27	28	30	16	
	合計	94	123	106	100	100	71	
	百分比	43.32	56.68	48.85	46.08	46.08	32.72	
簡易算法	一	49	33	34	27	34	28	
	二	52	31	34	30	28	24	
	三	53	36	36	31	34	23	
	四	55	38	35	39	44	27	
	合計	209	138	139	127	140	102	
	百分比	96.31	63.59	64.06	58.53	64.52	47.00	

我們把測驗結果分析比較以後發現，這種簡易方法的優點是：

1. 費時較少
2. 正確率提高
3. 提高小朋友的觀察、思考與組織能力。

第一類問題用簡易算法效果尤佳，第二類問題用簡易算法時要加以注意的是大膽的將各圖側置，看成柱體，找尋底面周長和高。上表的統計是在僅花三、四十分介紹方法後測驗的結果，倘能以時日，多練習幾次，相信成績定會更為理想。

七、結論：

這論簡易算法，在列式上看起來與一般算法相差無幾，但演算時間却經濟多了，第一類問題不愁層數多，第二類問題不怕形體複雜，只要寬度相同，都能輕而易舉的計算出來，也就是說他的簡捷率與其複雜程度成正比。除此之外我們能用第二類的觀念活用在求各種形體的體積上，充份培養同學們的觀察，思考與組織能力，這種簡易算法是否值得推廣應用，尚祈 諸位學者專家不吝指教。