正多邊形的中心與各邊間向量的關係

高中組數學第三名

省立嘉義女子高級中學　　製作學生：魏麗絲　顏月嬌

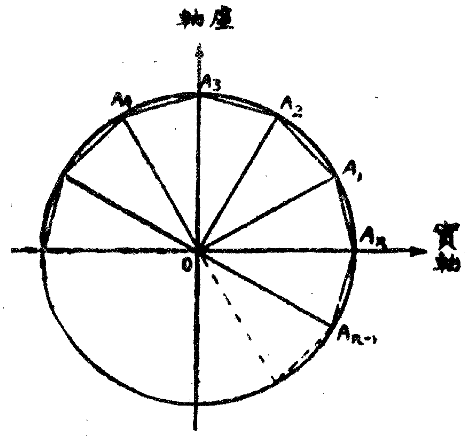
指導老師：潘　安　銘

A、動機：愛美乃人之天性，當我們看到正24邊形的各邊與對角線所交織成的幾何圖形，其"外在美"深深吸引著我們，故進一步想探求其"內在美"。在高二唸完向量與複數後，我們利用兩者的幾何性質及三角公式，推想出正多邊形的中心與各邊間向量的關係，因而發現本文中的一些性質。

B、本文：我們知道，若G爲△ABC的重心，則$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$，而正n邊形的中心亦爲其重心，故可將這個性質推廣到正n邊形，即

性質1：若O爲正n邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心，則$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{0}$。

（此性質在實驗本第三冊中，以定位向量來證明，但我們認爲用複數平面的性質來證明，較爲簡捷並易於推廣。）



〔證明〕$\because$ 1的n次方根爲 $\omega, \omega^2, \cdots, \omega^n=1$，

其中 $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$

$\because \omega+\omega^2+\cdots+\omega^n=0 \Rightarrow (\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n})$

$+(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n})_2+\cdots+(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n})^n$

$=0$

$\Rightarrow (\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n})+(\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n})+\cdots$

$+(\cos\frac{2n\pi}{n}+i\sin\frac{2n\pi}{n})=0$

$\Rightarrow (\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{2n\pi}{n})$

$+i(\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{2n\pi}{n})=0$

$\Rightarrow \cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{2n\pi}{n}=0$，

$\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{2n\pi}{n}=0$

令 $\omega, \omega^2, \cdots, \omega^n$ 在複數平面上所表的點分別爲 $A_1, A_2, \cdots,$ A_n，則其座標分別爲 $A_1(\cos\frac{2\pi}{n}, \sin\frac{2\pi}{n})$，$A_2(\cos\frac{4\pi}{n},$ $\sin\frac{4\pi}{n})$，$\cdots$，$A_n(\cos\frac{2n\pi}{n}, \sin\frac{2n\pi}{n})$

由定理知多邊形$A_1A_2\cdots A_n$為單位圓的內接正n邊形(以原點O為圓心)　　〔註一〕

故$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\left[\cos\frac{2\pi}{n},\sin\frac{2\pi}{n}\right]$

$+\left[\cos\frac{4\pi}{n},\sin\frac{4\pi}{n}\right]+\cdots+\left[\cos\frac{2n\pi}{n},\sin\frac{2n\pi}{n}\right]$

$=\left[\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{2n\pi}{n},\right.$

$\left.\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{2n\pi}{n}\right]=[0,0]=\overrightarrow{0}$

〔註一〕我們採用以原點為圓心之單位圓的內接正n邊形來證明並未失去其一般性。

其次我們知道，若G為$\triangle ABC$的重心，P為空間上的任一點，均有$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PG}$之關係，同樣地我們亦可將其推廣如下：

推論：若O為正n邊形$A_1A_2\cdots A_n$的中心，P為空間上之任一點，則$\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}=n\overrightarrow{PO}$

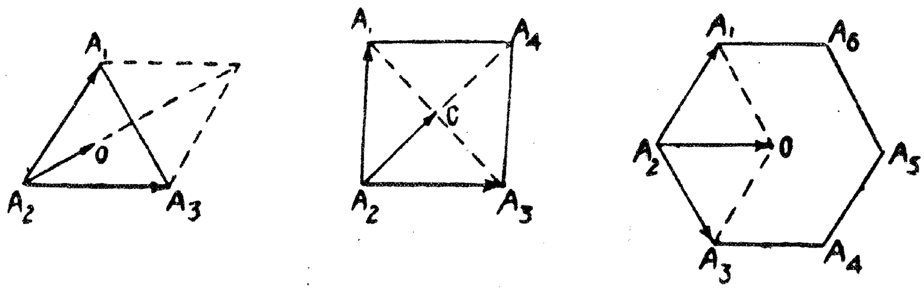
〔證明〕$\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}$

$=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA_1})+(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA_2})+\cdots+(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA_n})$

$=n\overrightarrow{PO}+(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=n\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{O}$

$=n\overrightarrow{PO}$

接着請看下圖：



若O為正△$A_1A_2A_3$之中心（重心），

則$\overrightarrow{A_2A_1}+\overrightarrow{A_2A_3}=3\overrightarrow{A_2O}$

若O為正方形$A_1A_2A_3A_4$之中心，

則$\overrightarrow{A_2A_1}+\overrightarrow{A_2A_3}=2\overrightarrow{A_2O}$

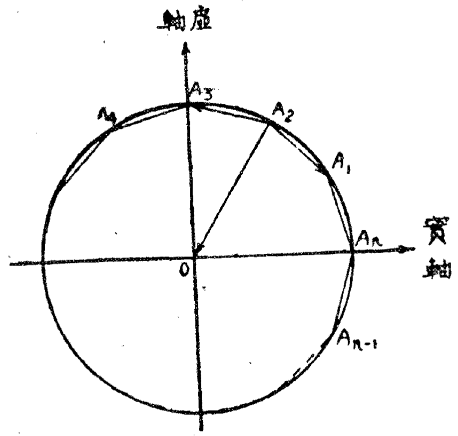
若O為正六邊形$A_1A_2\cdots A_6$之中心，

則$\overrightarrow{A_2A_1}+\overrightarrow{A_2A_3}=\overrightarrow{A_2O}$

此種關係是否亦可推廣到正n邊形呢？即若O為正邊形$A_1A_2\cdots A_n$之中心，則$\overrightarrow{A_2A_1}+\overrightarrow{A_2A_3}=\gamma\overrightarrow{A_2O}$，此式是否成立？若能成立，則$\gamma$到底是自然數呢？還是正有理數或正無理數呢？我們研究的結果：γ為正實數，且$\gamma=2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)$，即

性質2：若O為正n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_n$之中心，

$$則\overrightarrow{A_2A_1}+\overrightarrow{A_2A_3}=2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\overrightarrow{A_2O}$$



〔證明〕因1之n次方根為$\omega,\omega^2,\omega^3,\cdots,\omega^n$，其中$\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$

若其在複數平面上所表之點分別為$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$，則多邊形$A_1A_2A_3\cdots A_n$為以原點為中心的單位圓之內接正n邊形。故A_1,A_2,A_3之坐標分別為

$$\left(\cos\frac{2\pi}{n},\sin\frac{2\pi}{n}\right),\left(\cos\frac{4\pi}{n},\sin\frac{4\pi}{n}\right),$$

$$\left(\cos\frac{6\pi}{n},\sin\frac{6\pi}{n}\right)$$

又 $\overrightarrow{A_2A_1}=\left[\cos\frac{2\pi}{n}-\cos\frac{4\pi}{n},\sin\frac{2\pi}{n}-\sin\frac{4\pi}{n}\right]$

$\overrightarrow{A_2A_3}=\left[\cos\frac{6\pi}{n}-\cos\frac{4\pi}{n},\sin\frac{6\pi}{n}-\sin\frac{4\pi}{n}\right]$,

$\overrightarrow{A_2O}=\left[-\cos\frac{4\pi}{n},-\sin\frac{4\pi}{n}\right]$

故 $\overrightarrow{A_2A_1}+\overrightarrow{A_2A_3}=\left[\left(\cos\frac{2\pi}{n}-\cos\frac{4\pi}{n}\right)+\left(\cos\frac{6\pi}{n}-\cos\frac{4\pi}{n}\right),\right.$

$$\left.\left(\sin\frac{2\pi}{n}-\sin\frac{4\pi}{n}\right)+\left(\sin\frac{6\pi}{n}-\sin\frac{4\pi}{n}\right)\right]$$

$$=\left[\cos\frac{6\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}-2\cos\frac{4\pi}{n},\right.$$

$$\left.\sin\frac{6\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}-2\sin\frac{4\pi}{n}\right]$$

$$=\left[2\cos\frac{4\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n}-2\cos\frac{4\pi}{n},\right.$$

$$\left.2\sin\frac{4\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n}-2\sin\frac{4\pi}{n}\right]$$

$$=\left[-2\cos\frac{4\pi}{n}\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right),\right.$$

$$\left.-2\sin\frac{4\pi}{n}\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

$$=2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left[-\cos\frac{4\pi}{n},-\sin\frac{4\pi}{n}\right]$$

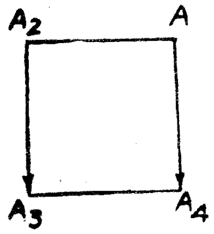
$$=2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\overrightarrow{A_2O}$$

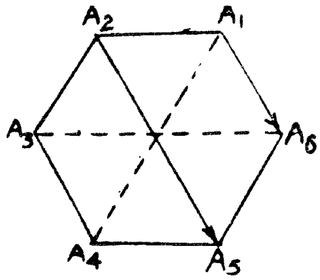
用同樣的方法我們亦可證明：

若O為正n邊形$A_1A_2\cdots A_n$之中心，其中$\geqq 5$，

則$\overrightarrow{A_3A_1}+\overrightarrow{A_3A_5}=2\left(1-\cos\frac{4\pi}{n}\right)\overrightarrow{A_3O}$

再請看下圖：





在正方形$A_1A_2A_3A_4$中由幾何性質知$\overline{A_2A_3}/\!/\overline{A_1A_4}$

且$\overline{A_2A_3}=\overline{A_1A_4}$

故$\overrightarrow{A_2A_3}=\overrightarrow{A_1A_4}$

在正六邊形$A_1A_2\cdots A_6$中，由幾何性質知$\overline{A_2A_5}/\!/\overline{A_1A_6}$

且$\overline{A_2A_5}=2\,\overline{A_1A_6}$

故$\overrightarrow{A_2A_5}=2\,\overrightarrow{A_1A_6}$。

因為在正n邊形$A_1A_2\cdots A_n$中，$n\geqq 4$，$\overline{A_2A_{n-1}}$恆與$\overline{A_1A_n}$平行，故必有$\gamma>0$存在，使$\overrightarrow{A_2A_{n-1}}=\gamma\,\overrightarrow{A_1A_n}$，我們再以複數平面之性質求得

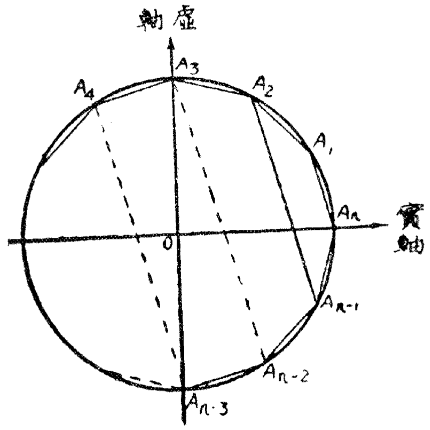
$$\gamma=\frac{\sin\frac{(n-3)\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}=\frac{\sin\frac{(n-1)-2}{n}\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\text{，即}$$

性質3：若$A_1A_2\cdots A_n$為正n邊形，其中$n\geqq 4$，

$$\text{則}\overrightarrow{A_2A_{n-1}}=\frac{\sin\frac{(n-3)\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\overrightarrow{A_1A_n}\text{。}$$

〔證明〕因 1 之 n 次方根爲 $\omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}, \omega^n = 1$，

$$其中\ \omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$



若其在複數平面上所表的點分別爲 $A_1, A_2 \cdots A_{n-1}, A_n$，則多邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 爲以原點爲中心的單位圓的內接正 n 邊形，故 A_1, A_2, A_{n-1}, A_n 之坐標分別爲

$$\left(\cos\frac{2\pi}{n}, \sin\frac{2\pi}{n}\right), \left(\cos\frac{4\pi}{n}, \sin\frac{4\pi}{n}\right),$$

$$\left(\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}, \sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\right),$$

$$\left(\cos\frac{2n\pi}{n}, \sin\frac{2n\pi}{n}\right) = (1, 0)$$

$$\therefore \overrightarrow{A_1A_n} = \left[1 - \cos\frac{2\pi}{n}, 0 - \sin\frac{2\pi}{n}\right]$$

$$= \left[1 - \left(1 - 2\sin^2\frac{\pi}{n}\right), -2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\right]$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}, -\cos\frac{\pi}{n}\right]$$

故$\overrightarrow{A_2A_{n-1}}=\left[\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}-\cos\frac{4\pi}{n},\right.$

$$\left.\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}-\sin\frac{4\pi}{n}\right]$$

$$=\left[-2\sin\frac{(n+1)\pi}{n}\sin\frac{(n-3)\pi}{n},\right.$$

$$\left.2\cos\frac{(n+1)\pi}{n}\sin\frac{(n-3)\pi}{n}\right]$$

$$=2\sin\frac{(n-3)\pi}{n}\left[-\sin\frac{(n+1)\pi}{n},\cos\frac{(n+1)\pi}{n}\right]$$

$$=2\sin\frac{(n-3)\pi}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n},-\cos\frac{\pi}{n}\right]$$

$$=\frac{2\sin\frac{(n-3)\pi}{n}}{2\sin\frac{\pi}{n}}\left[2\sin\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n},-\cos\frac{\pi}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{\sin\frac{(n-3)\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\overrightarrow{A_1A_n}$$

同理，我們可證明下面之性質：

性質3′：若$A_1A_2\cdots A_n$爲正n邊形，其中$n\geqq 6$，

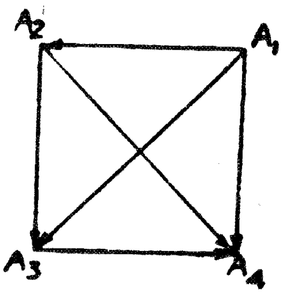
則$\overrightarrow{A_3A_{n-2}}=\dfrac{\sin\frac{(n-5)\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\overrightarrow{A_1A_n}=\dfrac{\sin\frac{(n-2)-3}{n}\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\overrightarrow{A_1A_n}$

若$A_1A_2\cdots A_n$為正n邊形，其中$n\geqq 8$，

則$$\overrightarrow{A_4A_{n-3}}=\frac{\sin\frac{(n-7)\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\overrightarrow{A_1A_n}=\frac{\sin\frac{(n-3)-4}{n}\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\overrightarrow{A_1A_n}$$

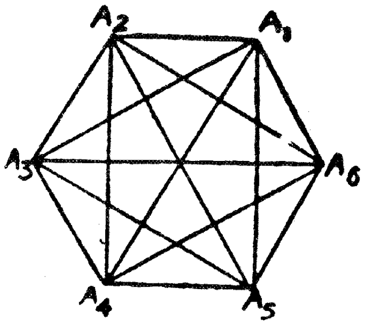
……………………………………………………………

接着我們想利用上面之性質3與3′來證明後面所述的性質4，5。請看下圖：



在正方形$A_1A_2A_3A_4$中，$\sum\limits_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{4}\overrightarrow{A_iA_j}$

$$=\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_1A_4}$$
$$+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_2A_4}$$
$$+\overrightarrow{A_3A_4}$$
$$=(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_4})+(\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_3A_4})+\overrightarrow{A_1A_4}+\overrightarrow{A_2A_3}$$
$$=3\overrightarrow{A_1A_4}+\overrightarrow{A_2A_3}=3\overrightarrow{A_1A_4}+\overrightarrow{A_1A_4}=4\overrightarrow{A_1A_4}$$



在正六邊形$A_1A_2\cdots A_6$中

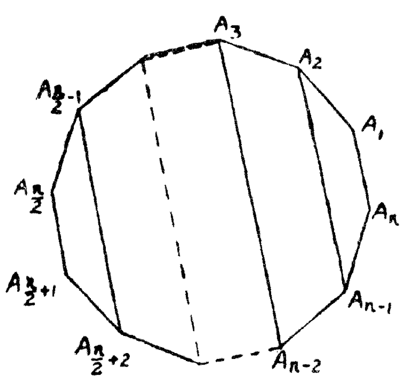
$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{6}\overrightarrow{A_iA_j} &= \overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_1A_4}+\overrightarrow{A_1A_5}+\overrightarrow{A_1A_6}\\
&\quad+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_2A_4}+\overrightarrow{A_2A_5}+\overrightarrow{A_2A_6}\\
&\quad+\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_3A_5}+\overrightarrow{A_3A_6}\\
&\quad+\overrightarrow{A_4A_5}+\overrightarrow{A_4A_6}\\
&\quad+\overrightarrow{A_5A_6}\\
&=(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_6})+(\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_3A_6})\\
&\quad+(\overrightarrow{A_1A_4}+\overrightarrow{A_4A_6})+(\overrightarrow{A_1A_5}+\overrightarrow{A_5A_6})\\
&\quad+\overrightarrow{A_1A_6}+(\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_5})\\
&\quad+(\overrightarrow{A_2A_4}+\overrightarrow{A_4A_5})+\overrightarrow{A_2A_5}+\overrightarrow{A_3A_4}\\
&=5\overrightarrow{A_1A_6}+3\overrightarrow{A_2A_5}+\overrightarrow{A_3A_4}\\
&=5\overrightarrow{A_1A_6}+3(2\underset{\substack{\uparrow\\(\text{由性質}3)}}{\overrightarrow{A_1A_6}})+\underset{\substack{\uparrow\\(\text{由性質}3')}}{\overrightarrow{A_1A_6}}=12\overrightarrow{A_1A_6}
\end{aligned}
$$

仿照上面的方法，我們可推廣至正n邊形，其中$n\geqq 4$ n爲偶數

其結果如下：

性質4：若$A_1A_2\cdots A_n$爲正n邊形，其中$n\geqq 4$，n爲偶數，

則 $$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}\overrightarrow{A_iA_j}=\left(\frac{n}{2}\csc^2\frac{\pi}{n}\right)\overrightarrow{A_1A_n}$$



〔證明〕

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}\overrightarrow{A_iA_j}=\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_1A_4}+\cdots\cdots$$

$$+\overrightarrow{A_1A_{n-1}}+\overrightarrow{A_1A_n}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_2A_4}+\cdots\cdots$$

$$+\overrightarrow{A_2A_{n-1}}+\overrightarrow{A_2A_n}+\cdots\cdots$$

$$+\overrightarrow{A_{\frac{n}{2}-1}A_{\frac{n}{2}}}+\overrightarrow{A_{\frac{n}{2}-1}A_{\frac{n}{2}+2}}$$

$$+\overrightarrow{A_{\frac{n}{2}-1}A_{\frac{n}{2}+2}}+\cdots\cdots$$

$$+\overrightarrow{A_{\frac{n}{2}}A_{\frac{n}{2}+1}}+\overrightarrow{A_{\frac{n}{2}}A_{\frac{n}{2}+2}}+\cdots\cdots$$

$$+\overrightarrow{A_{\frac{n}{2}+1}A_{\frac{n}{2}+2}}+\cdots\cdots$$

$$+\cdots\cdots$$

$$+\overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}}+\overrightarrow{A_{n-2}A_n}$$

$$+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$$

$$=(n-1)\overrightarrow{A_1A_n}+(n-3)\overrightarrow{A_2A_{n-1}}+\cdots\cdots$$

$$+3\overrightarrow{A_{\frac{n}{2}-1}A_{\frac{n}{2}+2}}+1\overrightarrow{A_{\frac{n}{2}}A_{\frac{n}{2}+1}}$$

（式中每一向量$\overrightarrow{A_iA_j}$前面所乘之實數爲$(j-i)$）

$$=(n-1)\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\overrightarrow{A_1A_n}$$

$$+(n-3)\frac{\sin\frac{(n-3\pi)}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\overrightarrow{A_1A_n}+\cdots\cdots$$

$\downarrow$

（由性質3）

$$+3\frac{\sin\frac{3\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\overrightarrow{A_1A_n}+\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\overrightarrow{A_1A_n}$$

（由性質3′）

$$=\frac{(n-1)\sin(\pi-\frac{\pi}{n})+(n-3)\sin\frac{(n-3)\pi}{n}+\cdots}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

$$\frac{+3\sin\frac{3\pi}{n}+\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\overrightarrow{A_1A_2}$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{n}+3\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+(n-3)\sin\frac{(n-3)\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

$$\frac{+(n-1)\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}{}\overrightarrow{A_1A_n}$$

$$\frac{\frac{n}{2}\csc\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\overrightarrow{A_1A_n}\quad\text{（註二）}$$

$$=(\frac{n}{2}\csc^2\frac{\pi}{n})\overrightarrow{A_1A_n}$$

〔註二〕欲證 $\sin\frac{\pi}{n}+3\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+(n-3)\sin\frac{(n-3)\pi}{n}$

$+(n-1)\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2}\csc\frac{\pi}{n}$ ，

其中 $n \geqq 4$ ，n 爲偶數

必先證明 $\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{(n-4)\pi}{n}$

$+\cos\frac{(n-2)\pi}{n}=0$ ，其中 $n \geqq 4$ ，n 爲偶數

令 $S=\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{(n-4)\pi}{n}$

$+\cos\frac{(n-2)\pi}{n}$

則 $(2\sin\frac{\pi}{n})S=2\cos\frac{2\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}$

$+2\cos\frac{4\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}+\cdots+2\cos\frac{(n-4)\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}$

$+2\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}$

$=(\sin\frac{3\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n})+(\sin\frac{5\pi}{n}-\sin\frac{3\pi}{n})+\cdots$

$+(\sin\frac{(n-3)\pi}{n}-\sin\frac{(n-5)\pi}{n})$

$+(\sin\frac{(n-1)\pi}{n}-\sin\frac{(n-3)\pi}{n})$

$=-\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=-\sin\frac{\pi}{n}+\sin(\pi-\frac{\pi}{n})$

$=-\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{\pi}{n}=0$

$\therefore S=0$ 　即證 $\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cdots\cdots$

$+\cos\frac{(n-4)\pi}{n}+\cos\frac{(n-2)\pi}{n}=0$

再令 $S' = \sin\frac{\pi}{n} + 3\sin\frac{3\pi}{n} + \cdots + (n-3)\sin\frac{(n-3)\pi}{n}$

$+ (n-1)\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$

則 $(2\sin\frac{\pi}{n})S' = 2\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n} + 3\cdot 2\sin\frac{3\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}$

$+ 5\cdot 2\sin\frac{5\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n} + \cdots\cdots$

$+ (n-1)\cdot 2\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}$

$= (\cos 0 - \cos\frac{2\pi}{n}) + 3(\cos\frac{2\pi}{n} - \cos\frac{4\pi}{n})$

$+ 5(\cos\frac{4\pi}{n} - \cos\frac{6\pi}{n}) + \cdots\cdots$

$+ (n-1)(\cos\frac{(n-2)\pi}{n} - \cos\frac{n\pi}{n})$

$= \cos 0 + 2(\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cdots\cdots$

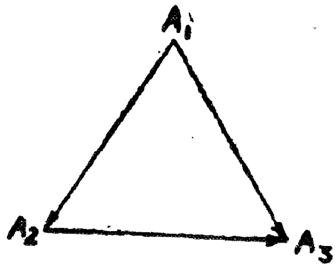
$+ \cos\frac{(n-2)\pi}{n}) - (n-1)\cos\frac{n\pi}{n}$

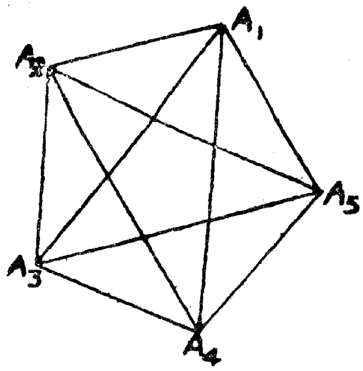
$= 1 + 2\cdot 0 - (n-1)(-1) = 1 + n - 1 = n$

$\therefore S' = \dfrac{n}{2\sin\frac{\pi}{n}}$，即 $\sin\frac{\pi}{n} + 3\sin\frac{3\pi}{n} \cdots + (n-3)\sin$

$\frac{(n-3)\pi}{n} + (n-1)\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2}\csc\frac{\pi}{n}$

接着我們再討論正 n 邊形，當 $n \geq 3$，n 爲奇數的情形，請看下圖：





在正△$A_1A_2A_3$中，$\sum\limits_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3}\overrightarrow{A_iA_j}=\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_2A_3}$

$$=(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3})$$

$$+\overrightarrow{A_1A_3}=2\overrightarrow{A_1A_3}$$

在正五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$中

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{5}\overrightarrow{A_iA_j}=\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_1A_4}+\overrightarrow{A_1A_5}$$

$$+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_2A_4}+\overrightarrow{A_2A_5}$$

$$+\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_3A_5}$$

$$+\overrightarrow{A_4A_5}$$

$$=(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_5})+(\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_3A_5})$$

$$+(\overrightarrow{A_1A_4}+\overrightarrow{A_4A_5})+\overrightarrow{A_1A_5}$$

$$+(\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4})+\overrightarrow{A_2A_4}$$

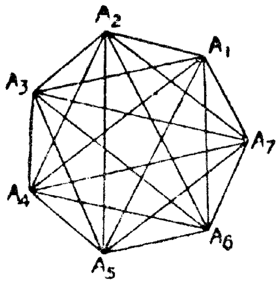
$$=4\overrightarrow{A_1A_5}+2\overrightarrow{A_2A_4}=4\overrightarrow{A_1A_5}$$

$$+2\left(\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}\right)\overrightarrow{A_1A_5}$$

（由性質３）

$$=\frac{4\sin\frac{\pi}{5}+2\sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}\overrightarrow{A_1A_5}$$

$$=\frac{4\sin\frac{4\pi}{5}+2\sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}\overrightarrow{A_1A_5}$$



在正七邊形$A_1A_2\cdots A_7$中

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{7}\overrightarrow{A_iA_j}=\overrightarrow{A_1A_2}+\overline{A_1A_3}+\overrightarrow{A_1A_4}+\overrightarrow{A_1A_5}+\overrightarrow{A_1A_6}+\overrightarrow{A_1A_7}$$

$$+\overrightarrow{A_2A_3}+\overline{A_2A_4}\quad\overrightarrow{A_2A_5}+\overrightarrow{A_2A_6}+\overrightarrow{A_2A_7}$$

$$+\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_3A_5}+\overrightarrow{A_3A_6}+\overrightarrow{A_3A_7}$$

$$+\overrightarrow{A_4A_5}+\overrightarrow{A_4A_6}+\overrightarrow{A_4A_7}$$

$$+\overrightarrow{A_5A_6}+\overrightarrow{A_5A_7}$$

$$+\overrightarrow{A_6A_7}$$

$$=6\,\overrightarrow{A_1A_7}+4\,\overrightarrow{A_2A_6}+2\,\overrightarrow{A_3A_5}$$

$$=6\,\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\overrightarrow{A_1A_7}+4\left(\frac{\sin\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\overrightarrow{A_1A_7}\right)$$

$\uparrow$

(由性質3)

$$+2\left(\frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\overrightarrow{A_1A_7}\right)$$

$$\uparrow$$

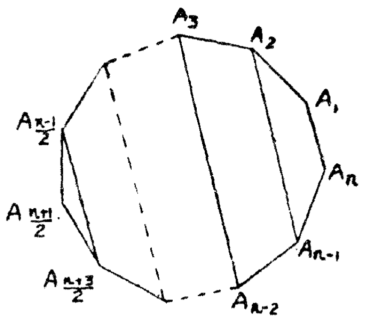
（由性質3′）

$$=\frac{6\sin\frac{6\pi}{7}+4\sin\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\overrightarrow{A_1A_7}$$

仿照上面的方法，我們可推廣到正n邊形，其中$n\geqq 3$，n爲奇數，其結果如下：

性質5：若$A_1A_2\cdots A_n$爲正n邊形， 其中$n\geqq 3$，n爲奇數，

則 $$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}\overrightarrow{A_iA_j}=\left(\frac{n}{2}\csc^2\frac{\pi}{n}\right)\overrightarrow{A_1A_n}$$



〔證明〕

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}\overrightarrow{A_iA_j}=\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_1A_4}+\cdots\cdots+\overrightarrow{A_1A_{n-1}}$$

$$+\overrightarrow{A_1A_n}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_2A_4}+\cdots\cdots+\overrightarrow{A_2A_{n-1}}+\overrightarrow{A_2A_n}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\overrightarrow{A_{\frac{n-1}{2}}A_{\frac{n+1}{2}}}+\overrightarrow{A_{\frac{n-1}{2}}A_{\frac{n+3}{2}}}+\cdots\cdots\cdots$$

$$+\overrightarrow{A_{\frac{n+1}{2}}A_{\frac{n+3}{2}}}+\cdots\cdots$$

$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$+\overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}}+\overrightarrow{A_{n-2}A_n}$

$+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$

$=(n-1)\overrightarrow{A_1A_n}+(n-3)\overrightarrow{A_2A_{n-1}}+\cdots\cdots$

$+4\overrightarrow{A_{\frac{n-3}{2}}A_{\frac{n+5}{2}}}+2\overrightarrow{A_{\frac{n-1}{2}}A_{\frac{n+3}{2}}}$

〔式中每一向量$\overrightarrow{A_iA_j}$前面所乘之實數爲$(j-i)$〕

$$=(n-1)\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\overrightarrow{A_1A_n}+(n-3)\left(\frac{\sin\frac{(n-3)\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\overrightarrow{A_1A_n}\right)+\cdots$$

（由性質3）

$$+4\left(\frac{\sin\frac{4\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\overrightarrow{A_1A_n}\right)+2\left(\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\overrightarrow{A_1A_n}\right)$$

（由性質3′）

$$=\frac{(n-1)\sin\frac{(n-1)\pi}{n}+(n-3)\sin\frac{(n-3)\pi}{n}+\cdots+4\sin\frac{4\pi}{n}+2\sin\frac{2\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\overrightarrow{A_1A_n}$$

$$=\frac{2\sin\frac{2\pi}{n}+4\sin\frac{4\pi}{n}+\cdots+(n-3)\sin\frac{(n-3)\pi}{n}+(n-1)\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\overrightarrow{A_1A_n}$$

$$= \frac{\frac{n}{2}\csc\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} \overrightarrow{A_1A_n} \quad \text{(註三)}$$

$$= \left(\frac{n}{2}\csc^2\frac{\pi}{n}\right)\overrightarrow{A_1A_n}$$

〔註三〕欲證 $2\sin\frac{2\pi}{n} + 4\sin\frac{4\pi}{n} + \cdots + (n-3)\sin\frac{(n-3)\pi}{n}$

$+(n-1)\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2}\csc\frac{\pi}{n}$，

其中 $n \geqq 3$，n 爲奇數

必先證明 $\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{3\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{(n-4)\pi}{n}$

$+\cos\frac{(n-2)\pi}{n} = \frac{1}{2}$，其中 $n \geqq 3$，n 爲奇數

令 $S = \cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{3\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{(n-4)\pi}{n}$

$+\cos\frac{(n-2)\pi}{n}$

則 $\left(2\sin\frac{\pi}{n}\right)S = 2\cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n} + 2\cos\frac{3\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n} + \cdots$

$+ 2\cos\frac{(n-4)\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}$

$+ 2\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}$

$= \left(\sin\frac{2\pi}{n} - \sin 0\right) + \left(\sin\frac{4\pi}{n} - \sin\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots$

$$+\left(\sin\frac{(n-3)\pi}{n}-\sin\frac{(n-5)\pi}{n}\right)$$

$$+\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{n}-\sin\frac{(n-3)\pi}{n}\right)$$

$$=-\sin 0+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=0+\sin\frac{\pi}{n}$$

$$=\sin\frac{\pi}{n} \qquad \therefore S=\frac{1}{2}$$

即$\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{3\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{(n-4)\pi}{n}+\cos\frac{(n-2)\pi}{n}$

$$=\frac{1}{2}$$

再令$S'=2\sin\frac{2\pi}{n}+4\sin\frac{4\pi}{n}+\cdots+(n-3)\sin\frac{(n-3)\pi}{n}$

$$+(n-1)\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$$

則$(\sin\frac{\pi}{n})S'=2\sin\frac{\pi}{n}+4\sin\frac{4\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}+\cdots$

$$+(n-3)\sin\frac{(n-3)\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}$$

$$+(n-1)\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{3\pi}{n}\right)+2\left(\cos\frac{3\pi}{n}-\cos\frac{5\pi}{n}\right)$$

$$+\cdots+\frac{(n-3)}{2}\left(\cos\frac{(n-4)\pi}{n}-\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\right)$$

$$+\frac{(n-1)}{2}\left(\cos\frac{(n-2)\pi}{n}-\cos\frac{n\pi}{n}\right)$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{3\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\right)$$

$$-\frac{(n-1)}{2}\cos\pi=\frac{1}{2}+\frac{n-1}{2}=\frac{n}{2}$$

$$\therefore S'=\frac{n}{2}\csc\frac{\pi}{n}$$

即 $$2\sin\frac{2\pi}{n}+4\sin+\frac{4\pi}{n}\cdots+(n-3)\sin\frac{(n-3)\pi}{n}$$

$$+(n-1)\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2}\csc\frac{\pi}{n}$$

合併性質4，5得下面之性質：

性質6：若$A_1A_2\cdots A_n$為正n邊形，其中$n\geq 3$，則

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}\overrightarrow{A_iA_j}=\left(\frac{n}{2}\csc^2\frac{\pi}{n}\right)\overrightarrow{A_1A_n}$$ 〔註四〕

這個性質就是我們花了很多心血所欲導得的結果。

〔註四〕我們曾經嘗試過將性質4，5合併證明（ 即不分偶數奇數來證明）但都沒有成功，故祗好分開證明。

C、結語：我們深信還有一些性質未被發現，不過單從上面之一些性質看來，數學本身的"內在美"並不比其"外在美"遜色，祗要我們肯深入地研究、思考，我們將會把數學更多的"內在美"發掘出來而發現數學無論在形式上與本質上都是最完美的。