從n維平行體到線性映射的脹縮率

高中組數學第三名

省立台中女子高級中學　　製作學生：李丕寧　邱丕霞

指導老師：陳　勝　雄

一、前言：線段可以作爲度量線上一切長度之基礎。

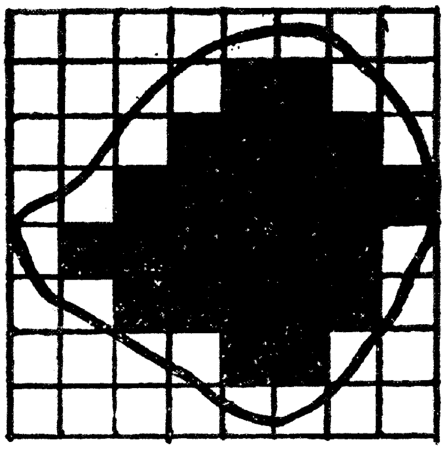
平行四邊形可以作爲度量平面上一切面積之基礎。

平行六面體可以作爲度量三度空間中一切體積之基礎。

二、從一個問題出發：今就平面上一塊有界封閉之區域R爲例做一說明：

(A)要逼近度量R之面積，首先我們作一正方形完全覆蓋在R上，然後將它四等分、十六等分、六十四等分、………。

如下圖算出完全包含在區域內之方格總面依次爲 αi。又與區域有共同部分之方格總面積依次爲 βi，則 αi 不斷遞增，而 βi 不斷遞減。



且(1) $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_3 \leqq \cdots \leqq$ (R之面積) $\leqq \cdots \leqq \beta_3 \leqq \beta_2 \leqq \beta_1$。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\beta_n - \alpha_n) = 0$。

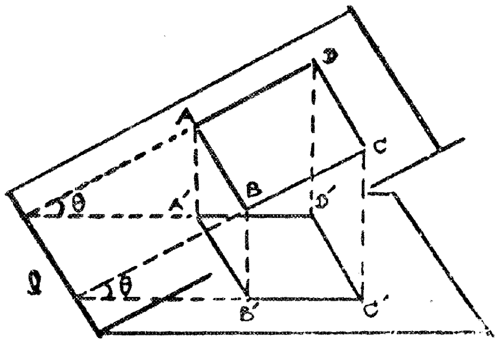
由實數之完全性得 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \lim\limits_{n\to m}\beta_n =$ R之面積。

註：過程中我們使用的度量單位雖爲正方形，但若用平行四邊形代替，其結果亦同。

(B)如下圖，兩平面E_1與E_2之夾角爲θ，$(0<\theta<\frac{\pi}{2})$

ℓ爲其交線。

ABCD爲平面E_1上之一正方形，$\overline{AB}$與ℓ平行。
又$A'B'C'D'$爲正方形ABCD在平面E_2之投影。



因爲 $\overline{A'B'}=\overline{AB}$，$\overline{A'D'}=\overline{AD}\cos\theta$。

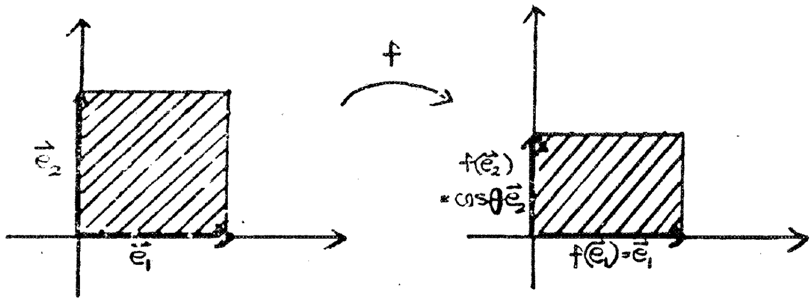
故 $$\frac{A'B'C'D'\text{之面積}}{ABCD\text{之面積}}=\cos\theta$$ 。

(C)更進一步若R爲平面E_1上之一區域，其在平面E_2上之投影

爲R'。則由(A)、(B)之結果得知 $\frac{R'\text{之面積}}{R\text{之面積}}=\cos\theta$。

三、演繹：

在上面之一段敘述裏除了說明如何利用平行四邊形去逼近度量平面上一塊區域之面積外，還討論了在一個平面上之領域在另外一個平面上之投影下面積變化之情形，而這種投影可以看成平面上的一個線性映射（如下圖），因此我們想討論更一般性的情況「類似地應用所謂"n維平行體"去逼近度量n維空間中之領域，並考慮其線性映射下之脹縮率」。



甲、如何求算n維平行體的體積。

這裏牽涉到了什麼是"n維平行體"以及如何定義它的體積？

定義：設 $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$,…… $\overrightarrow{a_n}$ 爲 R^m 中，n個線性獨立之向量（$m \geqq n$）。

則點集合 $\left\{ \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{\alpha_n} \;\middle|\; 0 \leqq \alpha i \leqq 1,\ \forall i = 1,2,\cdots n \right\}$ 稱爲一個由 $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$,…… $\overrightarrow{a_n}$ 所張出之一個n維平行體。

由此定義知：一維平行體即一線段，二維平行體即平行四邊形，三維平行體即平行六面體。

又什麼是它們"體積"呢？很自然地在一維空間中定義爲線段長，二維空間中定義爲該平行四邊形區域之面積，而三維平行體之體積即平常所謂的體積。

令 $\left| v(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots\cdots \overrightarrow{a_n}) \right|$ 表由 $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$,…… $\overrightarrow{a_n}$ 所張出n維平行體之體積。

則(I) $\left| v(\overrightarrow{a_1}) \right| = \left| \overrightarrow{a_1} \right| = \sqrt{\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_1}}$

$$\left| v(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}) \right|^2 = \left(\left| v(\overrightarrow{a_1}) \right| \left| \overrightarrow{u} \right| \right)^2$$

$$= \left(\left| \overrightarrow{a_1} \right| \left| \overrightarrow{a_2} \right| \sin\theta \right)^2$$

$$=\left|\vec{a}_1\right|^2\left|\vec{a}_2\right|^2(1-\cos^2\theta)$$

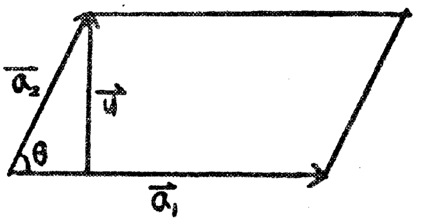
$$=\left|\vec{a}_1\right|^2\left|\vec{a}_2\right|^2\left[1-\frac{(\vec{a}_1\cdot\vec{a})^2}{\left|\vec{a}_1\right|^2\left|\vec{a}_2\right|^2}\right]$$

$$=\left|\vec{a}_1\right|^2\left|\vec{a}_2\right|^2-(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2)^2$$

$$=(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_1)(\vec{a}_2\cdot\vec{a}_2)-(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_1)(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2)$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{a}_1\cdot\vec{a}_1 & \vec{a}_1\cdot\vec{a}_2\\ \vec{a}_2\cdot\vec{a}_1 & \vec{a}_2\cdot\vec{a}_2\end{vmatrix}$$

$$=\det\left(\begin{pmatrix}\vec{a}_1\\ \vec{a}_2\end{pmatrix}(\vec{a}_1\ \ \vec{a}_2)\right)$$



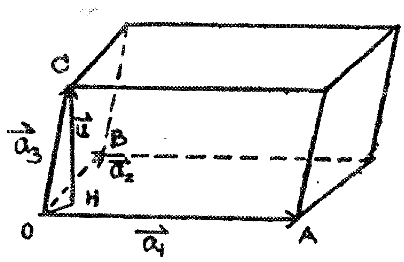
故 $\left|v(\vec{a}_1\vec{a}_2)\right|=\sqrt{\det\left[\begin{pmatrix}\vec{a}_1\\ \vec{a}_2\end{pmatrix}(\vec{a}_1\ \ \vec{a}_2)\right]}$

(Ⅲ)如右下圖　$\vec{a}_3=\overrightarrow{OH}+\vec{u}=\alpha\vec{a}_1+\beta\vec{a}_2+\vec{u}$

$$\vec{u}=\vec{a}_3-\alpha\vec{a}_1-\beta\vec{a}_2$$

其中 $\alpha=\dfrac{\begin{vmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_3 & \vec{a}_1\vec{a}_2\\ \vec{a}_2\vec{a}_3 & \vec{a}_2\vec{a}_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2\\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2\end{vmatrix}}=\dfrac{\begin{vmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_3 & \vec{a}_1\vec{a}_2\\ \vec{a}_2\vec{a}_3 & \vec{a}_2\vec{a}_2\end{vmatrix}}{\left|v(\vec{a}_1\ \vec{a}_2)\right|^2}$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} \vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_3 \\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2 \\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_3 \\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_3 \end{vmatrix}}{\left| V(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \right|^2}$$



而 $$\left| v(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \right|^2 = \left(\left| v(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \right| \left| \vec{u} \right| \right)^2$$

$$= \left| v(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \right|^2 \Big(\left| \vec{a}_3 \right|^2 - 2\alpha\, \vec{a}_1\vec{a}_3$$

$$-2\beta\, \vec{a}_2\vec{a}_3 + 2\alpha\beta\, \vec{a}_1\vec{a}_2$$

$$+\alpha^2 \left| \vec{a}_1 \right|^2 + \beta^2 \left| \vec{a}_2 \right|^2 \Big)$$

$$= \left| v(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \right|^2 \Big\{ \left| \vec{a}_3 \right|^2$$

$$- \frac{2\left[(\vec{a}_3\vec{a}_1)^2 \left| \vec{a}_2 \right|^2 - (\vec{a}_1\vec{a}_2)(\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3)(\vec{a}_3 \cdot \vec{a}_1) \right]}{\left| v(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \right|^2}$$

$$- \frac{2\left[(\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3)^2 \left| \vec{a}_1 \right|^2 - (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2)(\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3)(\vec{a}_3 \cdot \vec{a}_1) \right]}{\left| v(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \right|^2}$$

$$+ \frac{2\left[\left| \vec{a}_1 \right|^2 \left| \vec{a}_2 \right|^2 (\vec{a}_3 \cdot \vec{a}_1)(\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3) - (\vec{a}_3 \cdot \vec{a}_1) \right.}{\left| v(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \right|^4}$$

$$\frac{(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2)|\vec{a}_2|^2-(\vec{a}_2\cdot\vec{a}_3)^2((\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2)|\vec{a}_1|^2}{|v(\vec{a}_1,\vec{a}_2)|^4}$$

$$\frac{+(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2)^2(\vec{a}_3\cdot\vec{a}_1)(\vec{a}_2\cdot\vec{a}_3)\,]\,(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_3)}{|v(\vec{a}_1,\vec{a}_2)|^4}$$

$$+\frac{[\,(\vec{a}_3\cdot\vec{a}_1)^2|\vec{a}_2|^4-2(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2)(\vec{a}_2\cdot\vec{a}_3)}{|v(\vec{a}_1,\vec{a}_2)|^4}$$

$$\frac{(\vec{a}_3\cdot\vec{a}_1)|\vec{a}_2|^2+(\vec{a}_2\cdot\vec{a}_3)^2(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2)^2\,]\,|\vec{a}_1|^2}{|v(\vec{a}_1,\vec{a}_2)|^4}$$

$$+\frac{[\,(\vec{a}_2\cdot\vec{a}_3)^2|\vec{a}_1|^4-2(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2)(\vec{a}_2\cdot\vec{a}_3)(\vec{a}_3\cdot\vec{a}_1)}{|v(\vec{a}_1,\vec{a}_2)|^4}$$

$$\left.\frac{|\vec{a}_1|^2+(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2)^2(\vec{a}_2\cdot\vec{a}_3)^2\,]\,|\vec{a}_2|^2}{|v(\vec{a}_1,\vec{a}_2)|^4}\right\}$$

$$=\left|v(\vec{a}_1,\vec{a}_2)\right|^2\left\{\frac{|\vec{a}_3|^2|v(\vec{a}_1,\vec{a}_2)|^2-2\,[\,(\vec{a}_3\cdot\vec{a}_1)^2|\vec{a}_2|^2}{|v(\vec{a}_1,\vec{a}_2)|^2}\right.$$

$$\frac{-(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2)(\vec{a}_2\cdot\vec{a}_3)(\vec{a}_3\cdot\vec{a}_1)\,]-2\,[\,\vec{a}_2\cdot\vec{a}_3)^2|\vec{a}_1|^2}{|V(\vec{a}_1,\vec{a}_2)|^2}$$

$$\frac{-(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2)(\vec{a}_2\cdot\vec{a}_3)(\vec{a}_3\cdot\vec{a}_1)}{|v(\vec{a}_1,\vec{a}_2)|^2}$$

$$+\frac{[\,(\vec{a}_3\cdot\vec{a}_1)^2|\vec{a}_2|^2-2(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2)(\vec{a}_2\cdot\vec{a}_3)(\vec{a}_3\cdot\vec{a}_1)}{|v(\vec{a}_1,\vec{a}_2)|^4}$$

$$\left.\frac{+(\vec{a}_3\cdot\vec{a}_2)^2|\vec{a}_1|^2\,]\,V(\vec{a}_1,\vec{a}_2)|^2}{|V(\vec{a}_1,\vec{a}_2)|^4}\right\}$$

$$=|\vec{a}_1|^2|\vec{a}_2|^2|\vec{a}_3|^2-(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2)|\vec{a}_3|^2-(\vec{a}_3\cdot\vec{a}_1)|\vec{a}_2|^2$$

$$-(\vec{a}_2\cdot\vec{a}_3)|\vec{a}_1|^2+2(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2)(\vec{a}_2\cdot\vec{a}_3)(\vec{a}_3\cdot\vec{a}_1)$$

$$=\begin{vmatrix} \vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2 & \vec{a}_1\vec{a}_3 \\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2 & \vec{a}_2\vec{a}_3 \\ \vec{a}_3\vec{a}_1 & \vec{a}_3\vec{a}_2 & \vec{a}_3\vec{a}_3 \end{vmatrix}=\det\left(\begin{pmatrix}\vec{a}_1\\ \vec{a}_2\\ \vec{a}_3\end{pmatrix}(\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3)\right)$$

$$故\ |V(\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3)|=\sqrt{\det\left(\begin{pmatrix}\vec{a}_1\\ \vec{a}_2\\ \vec{a}_3\end{pmatrix}(\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3)\right)}$$

在上述過程中我們藉助一維平行體之體積求出了二維平行體之體積，再利用二維平行體的體積，求出了三維平行體之體積。

基於這種事實，利用遞迴定義的方式。

定義： $|V(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots\vec{a}_n)|=|V(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots\vec{a}_{n-1})|\,|\vec{u}_n$

其中 $\vec{u}_n=\vec{a}_n-\vec{b}_n$，且 $\vec{u}_n\cdot\vec{a}i=0\,(i=1,2,\cdots n-1)$

$\vec{b}_n\in SPan(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots\vec{a}_{n-1})$＝一切

$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots\vec{a}_{n-1}$之線性組合的集合。

註：此種$\vec{b}_n$與$\vec{u}_n$為唯一存在。

因若 $\vec{a}_n=\vec{b}+\vec{u}=\vec{b}'+\vec{u}'$ 則$(\vec{b}-\vec{b}')+(\vec{u}-\vec{u}')=\vec{o}$。

若$\vec{b}-\vec{b}'\neq\vec{o}$且$\vec{u}-\vec{u}'\neq\vec{o}$，則$(\vec{b}-\vec{b}')$與$(\vec{u}-\vec{u}')$為線性相關。

但此為不可能，因為$(\vec{b}-\vec{b}')\cdot(\vec{u}-\vec{u}')=o$之故。

這產生了兩個問題：

(1)這樣的定義是否合理？ 因爲算體積時，底的選取可以任意。那麼不同的底與其對應高之乘積，是否永遠相同呢？也就是說在上面若選取其它一組 n－1 個向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots \vec{a}_{n-2}, \vec{a}_n$，

是否仍有 $\left|V(\vec{a}_1, \vec{a}_2 \cdots\cdots \vec{a}_n)\right|$

$$= \left|V(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots \vec{a}_{n-2}, \vec{a}_n,)\right| \left|\vec{u}_{n-1}\right|$$

(2)是否類似地得到：

$$\left|V(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots \vec{a}_n)\right|^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2 & \cdots\cdots & \vec{a}_1\vec{a}_n \\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2 & & \vec{a}_2\vec{a}_n \\ \vdots & & & \\ \vec{a}_n\vec{a}_1 & \vec{a}_n\vec{a}_2 & & \vec{a}_n\vec{a}_n \end{vmatrix}$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots \vec{a}_n) \right)$$

而作爲一個合理的推廣？

其中(2)可以利用數學歸納法證明。

即證明 $\forall k \in N$，恆有 $\left|V(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots \vec{a}_k)\right|^2$

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2 & \cdots\cdots & \vec{a}_1\vec{a}_k \\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2 & & \vec{a}_2\vec{a}_k \\ \vdots & & & \\ \vec{a}_n\vec{a}_1 & \vec{a}_n\vec{a}_2 & & \vec{a}_k\vec{a}_k \end{vmatrix}$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_k \end{pmatrix} \vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots\cdots \vec{a}_k) \right)$$

證明：前面我們證明了k＝1，2，3時成立。

設 k＝n－1時成立。

由於 $\vec{u}_n=\vec{a}_n-\vec{b}_n=\vec{a}_n-(c_1\vec{a}_1+c_2\vec{a}_2+\cdots$
$+c_{n-1}\vec{a}_{n-1})$
$=\vec{a}_n-c_1\vec{a}_1-c_2\vec{a}_2-\cdots\cdots-c_{n-1}\vec{a}_{n-1}$。

先令 $\vec{b}_1=\vec{a}_n-c_1\vec{a}_1$

則 $$\det\left(\begin{pmatrix}\vec{a}_1\\ \vec{a}_2\\ \vdots\\ \vec{a}_{n-1}\\ \vec{b}_1\end{pmatrix}(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots\cdots\vec{a}_{n-1},\vec{b}_1)\right)$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2\cdots\cdots & \vec{a}_1\vec{a}_{n-1} & \vec{a}_1\vec{b}_1\\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2 & \vec{a}_2\vec{a}_{n-1} & \vec{a}_2\vec{b}_1\\ \vdots & & & \\ \vec{a}_{n-1}\vec{a}_1 & \vec{a}_{n-1}\vec{a}_2 & \vec{a}_{n-1}\vec{a}_{n-1} & \vec{a}_{n-1}\vec{b}_1\\ \vec{b}_1\vec{a}_1 & \vec{b}_1\vec{a}_2 & \vec{b}_1\vec{a}_{n-1} & \vec{b}_1\vec{b}_1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2\cdots\cdots & \vec{a}_1\vec{a}_{n-1} & \vec{a}_1\vec{a}_n-c_1(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_1)\\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2 & \vec{a}_2\vec{a}_{n-1} & \vec{a}_2\vec{a}_n-c_1(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_1)\\ \vdots & & & \\ \vec{a}_n\vec{a}_1-c_1(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_1) & \vec{a}_n\vec{a}_2-c_1(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2)\cdots & \vec{a}_n\vec{a}_{n-1}-c_1(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_{n-1}) & \vec{a}_n\vec{a}_n-2c_1(\vec{a}_n\vec{a}_1)+c_1^2(\vec{a}_1\vec{a}_1)\end{vmatrix}\times c_1$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2\cdots\cdots & \vec{a}_1\vec{a}_{n-1} & \vec{a}_1\vec{a}_n-c_1(\vec{a}_1\vec{a}_1)\\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2 & \vec{a}_2\vec{a}_{n-1} & \vec{a}_2\vec{a}_n-c_1(\vec{a}_2\vec{a}_1)\\ \vdots & & & \\ \vec{a}_n\vec{a}_1 & \vec{a}_n\vec{a}_2 & \vec{a}_n\vec{a}_{n-1} & \vec{a}_n\vec{a}_n-c_1(\vec{a}_n\vec{a}_1)\\ \vdots & & & \end{vmatrix}$$

$\times c_1$

$$=\begin{vmatrix} \vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2 & \cdots\cdots & \vec{a}_1\vec{a}_{n-1} & \vec{a}_1\vec{a}_n \\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2 & & \vec{a}_2\vec{a}_{n-1} & \vec{a}_2\vec{a}_n \\ \vdots & & & & \\ \vec{a}_n\vec{a}_1 & \vec{a}_n\vec{a}_2 & & \vec{a}_n\vec{a}_{n-1} & \vec{a}_n\vec{a}_n \end{vmatrix}$$

$$=\det\left(\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots\cdots \vec{a}_n)\right)$$

同理依次令 $\vec{b}_2 = \vec{b}_1 - \vec{c}_2\vec{a}_2$，$\vec{b}_3 = \vec{b}_2 - \vec{c}_3\vec{a}_3, \cdots \vec{u}_n$

$$= \vec{b}_{n-1} = \vec{b}_{n-2} = c_{n-1}\vec{a}_{n-1}$$

一連串得：

$$\det\left(\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots\cdots \vec{a}_n)\right)$$

$$=\det\left(\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_{n-1} \\ \vec{b}_1 \end{pmatrix}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots\cdots \vec{a}_{n-1}, \vec{b}_1)\right)$$

$$=\det\left(\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_{n-1} \\ \vec{b}_2 \end{pmatrix}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots\cdots \vec{a}_{n-1}, \vec{b}_2)\right) = \cdots\cdots$$

$$
=\det\left(\begin{pmatrix}\vec{a}_1\\ \vec{a}_2\\ \vdots\\ \vec{a}_{n-1}\\ \vec{u}_n\end{pmatrix}(\vec{a}_1,\cdots\cdots\vec{a}_{n-1},\vec{u}_n)\right)
$$

故
$$
\begin{vmatrix}
\vec{a}_1\vec{a}_1 & \cdots\cdots & \vec{a}_1\vec{a}_{n-1} & \vec{a}_1\vec{a}_n\\
\vec{a}_2\vec{a}_1 & & \vec{a}_2\vec{a}_{n-1} & \vec{a}_2\vec{a}_n\\
\vdots & & & \\
\vec{a}_n\vec{a}_1 & & \vec{a}_n\vec{a}_{n-1} & \vec{a}_n\vec{a}_n
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
\vec{a}_1\vec{a}_1 & \cdots\cdots & \vec{a}_1\vec{a}_{n-1} & \vec{a}_1\vec{u}_n\\
\vec{a}_2\vec{a}_1 & & \vec{a}_2\vec{a}_{n-1} & \vec{a}_2\vec{u}_n\\
\vdots & & & \\
\vec{a}_{n-1}\vec{a}_1 & & \vec{a}_{n-1}\vec{a}_{n-1} & \vec{a}_{n-1}\vec{u}_n\\
\vec{u}_n\vec{a}_1 & & \vec{u}_n\vec{a}_{n-1} & \vec{u}_n\vec{u}_n
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
\vec{a}_1\vec{a}_1 & \cdots\cdots & \vec{a}_1\vec{a}_{n-1} & 0\\
\vec{a}_2\vec{a}_1 & & \vec{a}_2\vec{a}_{n-1} & 0\\
\vdots & & & \\
\vec{a}_{n-1}\vec{a}_1 & & \vec{a}_{n-1}\vec{a}_{n-1} & 0\\
0 & & 0 & \vec{u}_n\vec{u}_n
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
\vec{a}_1\vec{a}_1 & \cdots\cdots & \vec{a}_1\vec{a}_{n-1}\\
\vdots & & \\
\vec{a}_{n-1}\vec{a}_1 & & \vec{a}_{n-1}\vec{a}_{n-1}
\end{vmatrix}\left|\vec{u}_n\right|^2
$$

$$
=\left|V(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots\vec{a}_{n-1})\right|^2\left|\vec{u}_n\right|^2
$$

$$=\left| V(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots\cdots\vec{a}_{n-1},\vec{a}_n) \right|^2$$

(∴ $k=n-1$ 時成立)

※事實上由於上列式的運算性質，(2)的結論也說明了(1)是合理的。

知道了n維平行體體積之意義及算法後，我們便可利用其在線性映射下的脹縮率從而逼近得到一般領域在線性映射下的脹縮率。

設　$f: R^n \to R^m$ 爲一個線性映射。

則　$f(\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\cdots\cdots+\alpha_n\vec{a}_n)$

$=\alpha_1 f(\vec{a}_1)+\alpha_2 f(\vec{a}_2)+\cdots+\alpha_n f(\vec{a}_n)$

由此可知：線性映射把n維平行體帶到n維平行體。

令　$S=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots\cdots\vec{e}_n)$ 爲 R^n 中一組正交基底。

$S'=(\vec{e}\,'_1,\vec{e}\,'_2,\cdots\cdots\vec{e}\,'_m$ 爲 R^m 中一組正交基底。

(1)若　$f(\vec{e}_1)=a_{11}\vec{e}\,'_1+a_{12}\vec{e}\,'_2\cdots\cdots+a_{1m}\vec{e}\,'_m$

$f(\vec{e}_2)=a_{21}\vec{e}\,'_1+a_{22}\vec{e}\,'_2\cdots\cdots+a_{2m}\vec{e}\,'_m$

$\vdots$

$f(\vec{e}_n)=a_{m}\vec{e}\,'_1+a_{n2}\vec{e}\,'_2+\cdots\cdots a_{nm}\vec{e}\,'_m$

令 $\left(f \right)_{s'}^{s}=\begin{pmatrix} a_{11} & a12\cdots\cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nm} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}$ (此稱爲線性映射 f 關於 s 與 s′ 之矩陣表示)

由甲段之結論：顯然 $\left| V(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots\cdots\vec{e}_n) \right|=1$

而 $\left| v\left(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \cdots\cdots f(\vec{e}_n)\right) \right|$

$$=\sqrt{\det\begin{pmatrix}\vec{a}_1\\ \vec{a}_2\\ \vdots\\ \vec{a}_n\end{pmatrix}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots\cdots \vec{a}_n)}$$

故 $\dfrac{\left| v\left[f_1(\vec{e}_1), \vec{f}(e_2), \cdots\cdots f(\vec{e}_n)\right] \right|}{\left| v(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \vec{e}_n) \right|}$

$$=\sqrt{\det\begin{pmatrix}\vec{a}_1\\ \vec{a}_2\\ \vdots\\ \vec{a}_n\end{pmatrix}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots\cdots \vec{a}_n)} = \lambda(f)$$

(2)上面證明了單位 n 維平行體之脹縮率，但爲了逼近需要，必須考慮任意小的 n 維平行體。

令 $c > 0$ 爲任意小之正數。

再考慮 $\left| v(c\vec{e}_1, c\vec{e}_2, \cdots\cdots c\vec{e}_n) \right|$

與 $\left| v\left(f(c\vec{e}_1), f(c\vec{e}), \cdots\cdots f(c\vec{e}_n)\right) \right|$

之關係。

$$\left| v(c\vec{e}_1, c\vec{e}_2, \cdots\cdots c\vec{e}_n) \right| = c^n$$

又 $f(c\vec{e}_1) = c f(\vec{e}_1)$

由行列式的運算性質

$$\left| v\left(f(c\vec{e}_1), f(c\vec{e}_2) \cdots\cdots f(c\vec{e}_n) \right) \right|$$

$$= c^n \left| v\left(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2) \cdots\cdots f(\vec{e}_n) \right) \right|$$

$$= c^n \lambda(f)$$

故 $$\frac{\left| v\left(f(c\vec{e}_1), f(c\vec{e}_2), \cdots\cdots f(c\vec{e}_n) \right) \right|}{\left| v\left(c\vec{e}_1, c\vec{e}_2, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots c\vec{e}_n \right) \right|} = \lambda(f)$$

有了這個結果後，用逼近度量的方法，可以得到這裏的 $\lambda(f)$。實際上就是線性映射 f 之體積之脹縮率（見「從一個問題出發」）

四、總結：在上面過程中我們利用了逼近方法求出了線性映射的脹縮率。最後我們再拿兩個例子來說明。

例1. 設 $A: |x| + |y| \leq 1$， $f: R^2 \to R^2$，定義為

$$f(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2} \right)$$

則區域 A 經 f 映射後之區域為 $A': |x+y| + |x-y| \leq 1$

因爲A之面積爲2，且 $\lambda(f)$

$$=\sqrt{\det\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right)}=\frac{1}{2}$$

故A′之面積爲1。

例2. 設　$f: R^2 \to R^3$, $f(x,y)=(2x+3y,\ x-y,\ x+2y)$

則　$[f]_{R^3}^{R^2}=\begin{pmatrix}2, & 1, & 1\\ 3, & -1, & 2\end{pmatrix}$.

故 $\lambda(f)=\sqrt{\det\left[\begin{pmatrix}2, & 1, & 1\\ 3, & -1, & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2, & 3\\ 1, & -1\\ 1, & 2\end{pmatrix}\right]}$

$$=\sqrt{\det\begin{pmatrix}6, & 7\\ 7, & 14\end{pmatrix}}=\sqrt{35}\text{ 。}$$

這樣便可知：若正面上一圓區域：$\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\leqq 4\right\}$

其經映射後，面積爲　$4\sqrt{35}\,\pi$ 。

參考書籍：1．高中實驗教材第四册、第六册
2．線性代數（RAYMOND A. BEAUREGARD
JOHN B. FRALEIGH 著）