對冪級數的收斂圖形、用途及尤拉公式的探討

高中組數學第三名

省立新竹高級中學

製作學生：楊錦鈿等五人

指導老師：彭　商　育

一、導言：

若有人問π是多大，我們回答是3.14，3.1416，或3.14159……。這些都答錯了！究竟π是什麼意思？3.141592……又是怎樣算出來的？π倒有幾位小數？我們從小學開始，直到今天仍是一個謎！另外$\sqrt{2}=1.4142\cdots\cdots$，$\log 10^2=0.3010\cdots\cdots$，$\sin 18^0=0.309017\cdots\cdots$，$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots\cdots$之和，某函數數的圖形……等等問題，我們知其然而不知其所以然，如此常悶在心中，甚不是味道！玆將所感疑惑的問題，列出於後，以一吐爲快！

(一)π、e、一數n次方根、無窮級數求和……的近似値爲何？

(二)自然對數表，常用對數表和三角函數表的由來。

(三)要使冪級數有意義，條件怎樣？

(四)某函數與其冪級數圖形的比較。

(五)探討尤拉公式及其推廣。

以上問題，我們幾位對數學有興趣的同學，在老師熱誠指導下，搜索資料，共同研究，發現在無窮級數範圍內，便可解決。同時這些重要理論和方法與高中教材息息相關，且課本未曾解釋清楚或尙未提到，如冪級數的收斂、二項級數、指數級數、對數級數、三角級數的應用，尤拉公式的研究等，現將這些資料，作一有系統的整理後，簡單且扼要的敘述如後：

二、冪級數(Power series)：

在高中數學課本第二册中，曾簡單介紹過無窮級數的斂散性，在此不擬賡述。

凡形如 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\cdots + a_n x^n + \cdots\cdots$ 稱爲冪級數。

例如：① $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots$

② $1 + \frac{n}{1!} x + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \cdots$

…都是冪級數

(一)冪級數的收斂：

設 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\cdots$，當 $x = b$ 時，

各項絕對值均小於常數 c，則 $|x| < |b|$ 時，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 爲收斂級數。

證明：由已知 $|a_0| < c$，$|a_1 x| = |a_1 b| \cdot \left|\frac{x}{b}\right|$

$< c \left|\frac{x}{b}\right|$，$|a_2 x^2| = |a_2 b^2| \cdot \left|\frac{x}{b}\right|^2$

$< c \left|\frac{x}{b}\right|^2 \cdots$,

以上諸式相加得 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x|$

$+ |a_2 x^2| + \cdots\cdots < c\left(1 + \left|\frac{x}{b}\right| + \left|\frac{x}{b}\right|^2 + \cdots\right)$,

當$r = \left| \dfrac{x}{b} \right| < 1$時，上式右端爲收歛級數，故當

$|x| < |b|$時，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$爲收歛級數。

由上結論可推得：

(I)若$x = b$時，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$爲收歛的，則$|x| < |b|$時，

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$爲收歛級數。

(II)若$x = b$時，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$爲發散的，則$|x| > |b|$時，

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$爲發散級數。

㈡收歛半徑(Radicus of circle of convergence)

由㈠的討論，設有一數r，若$|x| < r$，即$-r < x < r$，

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$爲收歛級數；又$|x| > r$即$x > r$或$x < -r$，

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$爲發散級數；則稱$-r < x < r$爲$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收歛半徑。此用平面上的點，描出複數圖形。且以原點爲中心，r爲半徑作圓，在圓內一切的x值，使$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$爲收歛的；

圓上及圓外一切的X值，使$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$爲發散的。

㈢一般冪級數的收歛半徑：

設$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\cdots,$

因 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}n^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}x\right|$

$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \, |x|$，

當 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \, |x| < 1$，即 $|x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$，

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 爲收斂級數。

又 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \, |x| > 1$，即 $|x| > \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$，

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 爲發散級數。

故 $|x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 爲 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收斂半徑。

例題求 $1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3^2}+\frac{x^3}{3^3}+\cdots\cdots$ 之收斂半徑。

解：因 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{3^{n-1}}}{\frac{1}{3^n}} = 3$，故 $|x| < 3$ 爲其收斂半徑。

三、指數級數(Exponential series)

㈠指數級數：

所謂指數級數就是指 $e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$

(1)由二項式定理得 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = 1+\frac{nx}{1!}\left(\frac{1}{n}\right)$

$$+\frac{nx(nx-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{x}{1!}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{2!}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\cdots \quad ①$$

(Ⅱ)令 $x=1$ 則①變爲 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}$

$$+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

(Ⅲ)取②之極限值則

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{1}{1!}+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\cdots\cdots\right\}$$

$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots$$

命 $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots ③$

此 e 即自然對數的底數。

利用③式可求 e 值爲2.7182818284590……

(Ⅳ)又 $e^x=\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^x$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$$ 由①式可得

$$e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$$

$$=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots ④$$ ，此即爲指數級數。

(二)另一形式：

為了求對數級數，把指數級數④之形式改寫如下：

在④式中以 c x 代替 x，即得

$$e^{cx}=1+\frac{cx}{1!}+\frac{c^2x^2}{2!}+\frac{c^3x^3}{3!}+\cdots\cdots,$$

若令 $e^{c}=a$，則 $\mathrm{Loge}^{a}=c$，代入上式便得 $e^{cx}=a^{x}$

$$=1+\frac{x\,\mathrm{Loge}^{a}}{1!}+\frac{x^2(\mathrm{Loge}^{a})^2}{2!}+\frac{x^3(\mathrm{Loge}^{a})^3}{3!}+\cdots ⑤,$$

⑤式即為指數級數的另外一形式。

(三)收斂半徑：

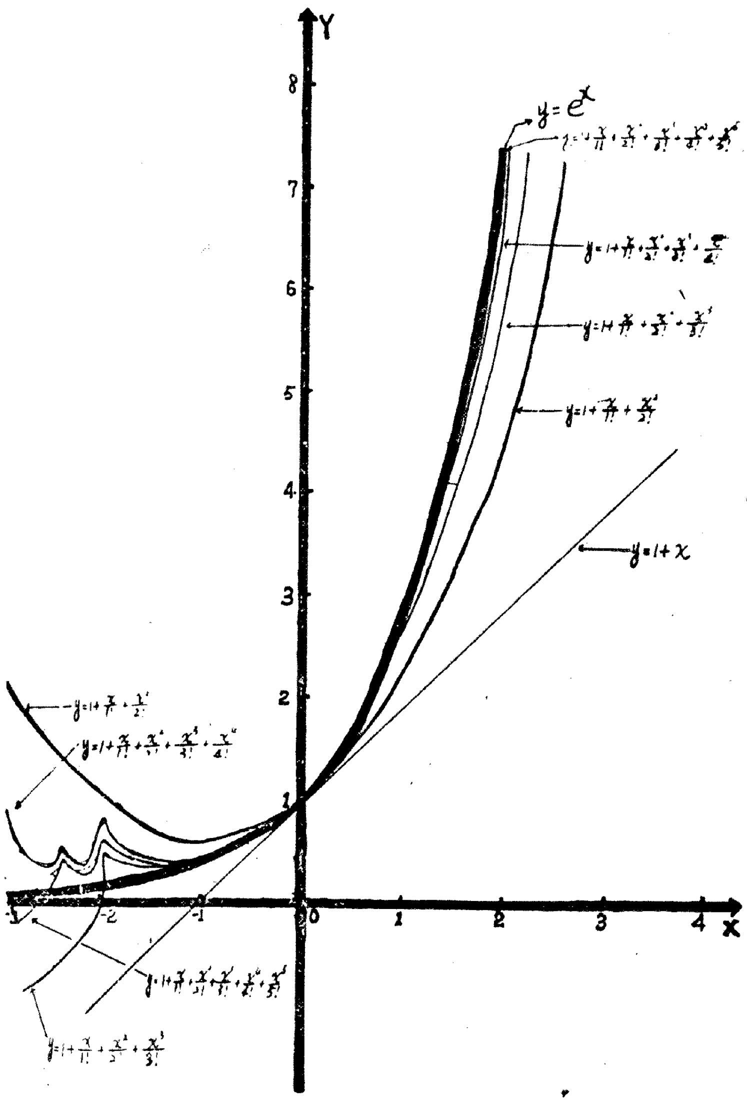
由④及根據Ⅱ中之(三)得 $|x|<\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{(n-1)!}}{\dfrac{1}{n!}}$

$$=\lim_{n\to\infty} n$$

即 $|x|<\infty$

故得 $x\in R$，④式均為收斂級數。

(四)指數級數的圖形：



$y = f(x) = e^x$

$y = f_1(x) = 1$

$$y = f_2(x) = 1 + \frac{x}{1!}$$

$$y = f_3(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$$

$$y = f_4(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$$y = f_5(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

……………………………………

……………………………………

以上函數之圖形比較如下：

由圖得知：若指數級數項數取得愈多，則其圖形愈逼近 $y = e^x$ 的圖形。

例題求 $1 + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^2}{3!} + \frac{4^2}{4!} + \cdots\cdots$ 之和。

$$\text{解：因 } x_n = \frac{n^2}{n!} = \frac{n}{(n-1)!} = \frac{n-1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

$$= \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

$$\text{故原式} = 1 + \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}\right) + \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right) + \cdots\cdots$$

$$+ \left(\frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}\right) + \cdots\cdots$$

$$=\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots\right)$$

$$+\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots\right)$$

$$=e+e=2e。$$

即$1+\frac{2^2}{2!}+\frac{3^2}{3!}+\frac{4^2}{4!}+\cdots\cdots=2e$，

四、對數級數(Logarithmic series)：

㈠對數級數：

所謂對級數就是指

$$Loge^{(1+x)}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots\cdots,$$

由指數級數⑤ $e^{cx}=a^x$

$$=1+\frac{x\,Loge^{a}}{1!}+\frac{x^2(Loge^{a})^2}{2!}$$

$$+\frac{x^3(Loge^{a})^3}{3!}+\cdots\cdots$$

命$a=1+x$，且以y代x得$(1+x)^y$

$$=1+y\frac{Loge^{(1+x)}}{1!}+y^2\frac{[Loge^{(1+x)}]^2}{2!}$$

$$+y^3\frac{[Loge^{(1+x)}]^3}{3!}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

①式中y一次項的係數爲$Loge^{(1+x)}$………………②

又由二項式定理$(1+x)^y=1+yx+\frac{y(y-1)}{2!}x^2$

$$+\frac{y(y-1)(y-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots$$

式中y一次項係數為 $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}$

$$+\frac{x^5}{5}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

因①與③兩邊y一次項的係數相等得$\mathrm{Log}_e(1+x)$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

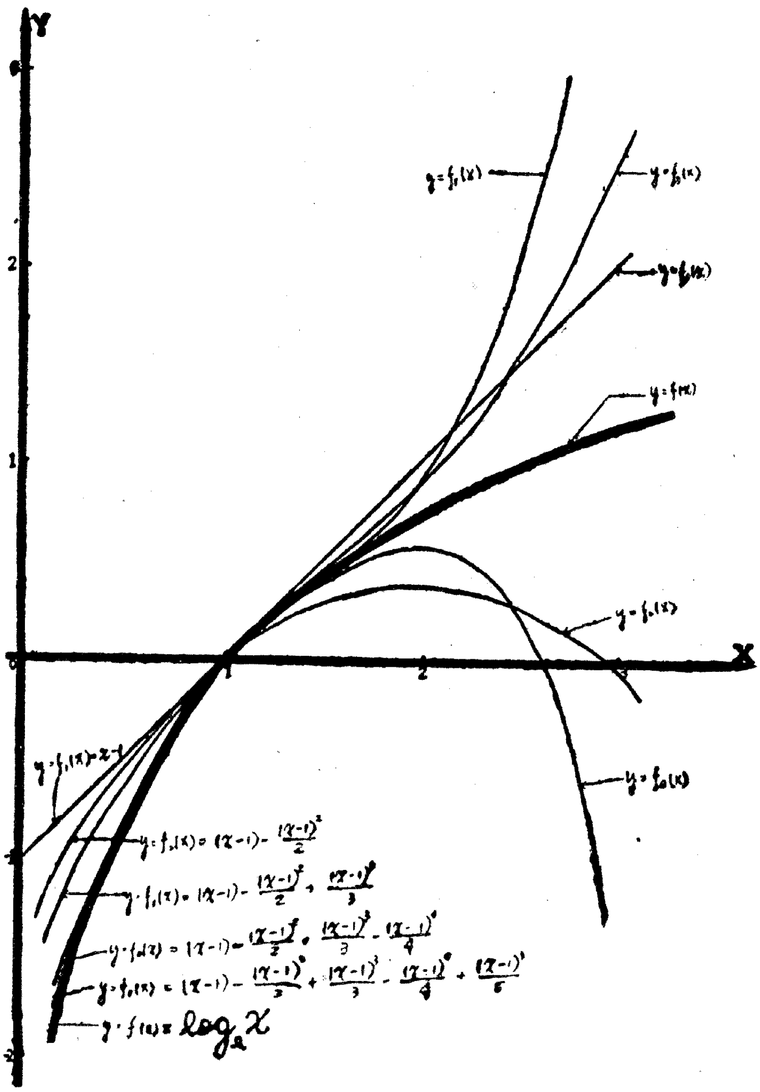
①式即稱為對數級數。

㈡收斂半徑：

由④及依據Ⅱ中之㈢得

$$|\,x\,|<\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=1,$$

即 $|\,x\,|<1$，故 $|\,x\,|<|$ 為④之收斂半徑。



(三)對數級數的圖形：

$y = \mathrm{Log}2^{x}$（即 $y = f(x)$）

$y = f_1(x) = x - 1$。

$$y = f_2(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2}$$

$$y = f_3(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$$

$$y = f_4(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(y-1)^4}{4}$$

$$y = f_5(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5}$$

………………………………………………

以上函數之圖形比較如下：

由圖得知：若對數級數項數取得愈多，則其圖形愈逼近 $y = \mathrm{Log}e^{x}$的圖形。

(四)對數表：

(I)自然對數表：

在計算巨大數字時，我們常常去查對數表，以求解決。但對數表如何得來的，茲敘述如下：

根據④式 $\mathrm{Log}e^{(1+x)} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$ ④

以（$-x$）代 x 得

$\mathrm{Log}e^{(1+(-x))} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots\cdots$ ⑤

由④－⑤得 $\text{Loge}^{(1+x)}-\text{Loge}^{(1-x)}=\text{Loge}\dfrac{1+x}{1-x}$

$$=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\right)\cdots\cdots⑥$$

令$\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{n+1}{n}$，則可得 $x=\dfrac{1}{2n+1}$，故⑥式可寫爲

$$\text{Loge}\frac{n+1}{n}=\text{Loge}^{(n+1)}-\text{Loge}^{n}$$

$$=2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right)$$

即 $\text{Loge}^{(n+1)}$

$$=\text{Loge}^{n}+2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right)$$

$\cdots\cdots⑦$，式中$n>0$

⑦式便是造自然對數表的公式。

例題：求Loge^2以及Loge^3，Loge^4，Loge^5之值。

解：先命$n=1$代入⑦，得$\text{Loge}^2=\text{Loge}^{(1+1)}$

$$=\text{Loge}^1+2\left[\frac{1}{2\times1+1}+\frac{1}{3\times3^3}+\frac{1}{5\times3^5}+\cdots\cdots\right]$$

$=0.6931\cdots\cdots$。

復依次命$n=2$，3，4……代入⑦便可求得Loge^3，Loge^4，Loge^5……

諸數自然對數的值。

(II)常用對數表：

由於$e=2.7182818284\cdots\cdots$，日常生活中的計算，常採用以10爲底的對數，特稱爲常用對數。下面爲常用對數表的造法。

由對數的換底公式知$\text{Log10}^{(n+1)}=\dfrac{\text{Loge}^{(n+1)}}{\text{Loge}^{10}}$，

式中$\log_e 10 = 2.30258\cdots$爲定數，

故上式可寫爲 $\log_{10}(n+1) = \dfrac{\log_e(n+1)}{2.30258}$

$$= \frac{1}{2.30258}\log_e n + 2\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\cdots\right] \quad ⑧$$

例題：求$\log_{10}2$, $\log_{10}3$, $\log_{10}4$, $\log_{10}5\cdots\cdots$諸數的值

解：命⑧式中 $n = 1$ 得 $\log_{10}2 =$

$$\frac{1}{2.30258}\left[\log_e 1 + 2\left(\frac{1}{2\times1+1} + \frac{1}{3\cdot3^3} + \frac{1}{5\cdot3^5}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \cdots\cdots\right]\right. = 0.3010\cdots$$

再依次命 $n = 2, 3, 4\cdots$代入⑧，便可得

$\log_{10}3$, $\log_{10}4$, $\log_{10}5$, ……

諸常用對數的值。

附記：

常聽人說：電腦在短時間內能算出人要花一天時間，才能算出的一數。這句話，我們實在感到迷惑。可是這次我們幾位同學決心去算 e 的近似值到小數點第九位，足足花了好幾小時，非常辛苦！由此可知計算機的偉大了。茲將 e 的部份計算過程敘述於下：（計算 e 到小數點後第九位數）

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}$$

$$+ \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} + \frac{1}{11!} + \frac{1}{12!}$$

$$= 1 + 1 + 0.5 + 0.166666667 + 0.041666667$$
$$+ 0.008333333 + 0.001388887 + 0.000198413$$
$$+ 0.000024802 + 0.000002756 + 0.000000276$$
$$+ 0.000000025 + \cdots\cdots$$
$$= 2.718281828\cdots\cdots$$

五、二項級數(Binomial series)

在高中數學課本第五冊中，所提及的二項式定理，因指數僅限用**正整數**，故其展開式爲有限項。在第二冊中所述的**指數函數**，**指數**已擴充到R。即 $f: x \to a^x$ 其中 $a>0$，$x\in R$。若二項式如 $(x+y)^n$ 中之 n 由**正整數**推廣至**實數**，研究數學的領域，便大大的擴充，可解決日常甚多的問題。茲討論如下：

(一)二項連乘積：凡是能表成 $\prod_{i=1}^{n}(ai+bi)$ 形式者，稱爲二項連乘積。

π 表 n 個二項連乘積的符號。

即 $$\prod_{i=1}^{n}(ai+bi)=(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)\cdots\cdots(a_n+b_n)$$

爲簡單討論起見，令 $ai\neq 0$，等式兩邊同除 $\prod_{i=1}^{n} ai$ 即得

$$\prod_{i=1}^{n}(1+A_r)=(1+A_1)(1+A_2)1+A_3)\cdots\cdots(1+A_n)\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

(二)二項連乘積的收斂：設 $A_r>0$，則 $\prod_{r=1}^{\infty}(1+A_r)$ 之收斂與發散，當視 $\sum_{r=1}^{\infty} A_r$ 之收斂與發散而定。

證明：(I)由指數級數 $e^y=1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots\cdots$

得 $1+y<e^y$

於是 $(1+A_1)<e^{A1}$，$(1+A_2)<e^{A2}$，$(1+A_3)<e^{A3}$，……。

諸式相乘得

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1+A_r)<e^{A_1}\cdot e^{A_2}\cdot e^{A_3}\cdots\cdots$$

$$=e^{A_1+A_2+\cdots\cdots}=e^{\sum_{r=1}^{\infty}A_r}$$

若 $\sum_{r=1}^{\infty}A_r$ 爲收斂，則 $e^{\sum_{r=1}^{\infty}A_r}$ 之値爲一定，

故 $\prod_{r=1}^{\infty}(1+A_r)$ 爲收斂的。

(II)又 $\prod_{r=1}^{\infty}(1+A_r)=(1+A_1)(1+A_2)(1+A_3)\cdots$

$$=1+(A_1+A_2+A_3+\cdots)$$
$$+(A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3+\cdots)$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=1+\sum_{r=1}^{\infty}A_r+\cdots\cdots$$

則 $\sum_{x=1}^{\infty}(1+A_r)>1+\sum_{r=1}^{\infty}A_r$

故若 $\sum_{r=1}^{\infty}A_r$ 爲發散，則 $\prod_{r=1}^{\infty}(1+A_r)$ 爲發散的。

(三)二項級數：

由二項式定理得 $(1+x)^n=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}x^m+\cdots \quad ②$$

式中$n\in R$

討論：①若$n\in N$，則②式中之展開式共有$n+1$項，因第$n+1$項後各項均爲0。

②若$n\in R-N$，則②式中右邊之項數無窮，故稱其爲二項級數。

㈣收斂半徑

由Ⅱ中之㈢得$|x|<\lim\limits_{m\to\infty}\left|\dfrac{a_m}{a_{m+1}}\right|$

$$=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{\dfrac{n(n-1)\cdots(n-m+2)}{(m-1)!}}{\dfrac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}}\right|$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{m}{n-m+1}\right|=1$$

故$|x|<1$爲所求之收斂半徑，亦即$|x|<1$時，二項級數才有意義。

㈤二項級數爲應用

例1.試求$\sqrt[5]{31}$的近似值到小數到第七位。

解：$\sqrt[5]{31}=(32-1)^{\frac{1}{5}}=2\left(1-\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$

$$=2\left\{1+\frac{1}{5}\left(\frac{-1}{32}\right)+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{2!}\left(\frac{-1}{32}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(\frac{1}{5}-2\right)}{3!}\left(\frac{-1}{32}\right)^3+\cdots\right\}$$

$$=2\left\{1+\left(\frac{-1}{160}\right)+\left(\frac{-1}{12800}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{-3}{2048000}\right)+\cdots\cdots\right\}$$

$$= 2\left\{1 - 0.00625 - 0.000078125\right.$$

$$\left. - 0.00000146484735 - \cdots\cdots\right\}$$

$$= 1.9873408$$

例2.試展開$\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$至第四項。

解：原式$=(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \left(\dfrac{-1}{2}\right)(-x)$

$$+\frac{\left(\dfrac{-1}{2}\right)\left(\dfrac{-1}{2}-1\right)}{2!}(-x)^2$$

$$+\frac{\left(\dfrac{-1}{2}\right)\left(\dfrac{-1}{2}-1\right)\left(\dfrac{-1}{2}-2\right)}{3!}(-x)^3+\cdots\cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \cdots\cdots。$$

例3。同例2.可得

(Ⅰ)$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^r + \cdots\cdots$

(Ⅱ)$(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots\cdots$

$+\cdots\cdots + (r+1)x^r + \cdots\cdots$

(Ⅲ)$(1-x)^{-3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots\cdots$

$$+\frac{(r+1)(r+2)}{2}x^r+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

以上三式日常應用很廣。

六、三角級數(Trigonometric series)

三角函數在高中數學第三册及第四册中，曾提到一些基本概念。但三角級數則未曾提及。茲探討如下：

㈠以$\sin\theta$，$\cos\theta$表示$\sin n\theta$與$\cos n\theta$。

在實驗教材第四册第四章中，曾介紹De Moivre's Theorem，即$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$。

但依二項式定理及複數基本性質，我們可以$\sin\theta$，$\cos\theta$表$\sin n\theta$，$\cos n\theta$

因 $\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$

$$= C_0{}^n\cos^n\theta + C_1{}^n\cos^{n-1}\theta(i\sin\theta) + C_2{}^n\cos^{n-2}\theta(i\sin\theta)^2$$

$$+ C_3{}^n\cos^{n-3}\theta(i\sin\theta)^3 + \cdots\cdots + C_n{}^n(i\sin\theta)^n$$

$$= \left\{\cos^n\theta - \frac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta + \cdots\cdots\right\}$$

$$+ i\left\{n\cos^{n-1}\theta\sin\theta - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta + \cdots\cdots\right\}$$

故
$$\begin{cases} \cos n\theta = \cos^n\theta - \dfrac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2}\theta\sin\theta \\ \qquad + \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta \cdots\cdots\cdots\cdots \text{①} \\ \sin n\theta = \dfrac{n}{1!}\cos^{n-1}\theta\sin\theta - \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta \\ \qquad + \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta \cdots \text{②} \end{cases}$$

例題：試以$\sin\theta$與$\cos\theta$表示$\cos5\theta$和$\sin5\theta$

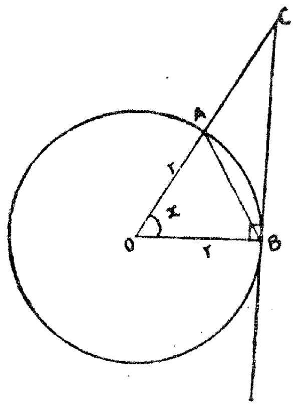
解：依上法即得$\cos5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$

$\sin5\theta = 5\text{sos}^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta$

(二)求證 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

此式是一個重要的極限觀念，在此證明它的眞確性。

證明：如下圖所表示　設$\angle AOB = x$（弳度量），圓半徑爲 r，過B點作圓的切線交$\overline{OA}$延長線爲C點。



因　面積$\triangle AOB = \dfrac{1}{2} r^2 \sin x$

扇形$AOB = \dfrac{1}{2} r^2 x$

$\triangle COB = \dfrac{1}{2} r^2 \tan x$

且　$\triangle AOB <$ 扇形$AOB < \triangle COB$

於是$\dfrac{1}{2} r^2 \sin x < \dfrac{1}{2} r^2 x < \dfrac{1}{2} r^2 \tan x$，

即$\sin x < x < \tan x$，

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

又當 $x \to 0$ 時，$\cos x \to 1$

故顯然地得 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$。

㈢三角級數：

令 $n\theta=\alpha$ 則 $n=\dfrac{\alpha}{\theta}$ 以此代入本節㈠中之①及②式即得下列兩式：

$$\cos\alpha=\cos n\theta=\cos^n\theta-\frac{\frac{\alpha}{\theta}\left(\frac{\alpha}{\theta}-1\right)}{2!}\cos^{n-2}\theta\ \sin^2\theta$$

$$+\frac{\frac{\alpha}{\theta}\left(\frac{\alpha}{\theta}-1\right)\left(\frac{\alpha}{\theta}-2\right)\left(\frac{\alpha}{\theta}-3\right)}{4!}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta\cdots$$

$$=\cos^n\theta-\frac{\alpha(\alpha-\theta)}{2!}\cos^{n-2}\theta\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-\theta)(\alpha-2\theta)(\alpha-3\theta)}{4!}\cos^{n-4}\theta\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^4\cdots\cdots \quad ③$$

$$\sin\alpha=\sin n\theta=\frac{\alpha}{\theta}\cos^{n-1}\theta\ \sin\theta$$

$$-\frac{\frac{\alpha}{\theta}\left(\frac{\alpha}{\theta}-1\right)\left(\frac{\alpha}{\theta}-2\right)}{3!}\cos^{n-3}\theta\ \sin^3\theta+\cdots\cdots$$

$$=\alpha\cos^{n-1}\theta\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)$$

$$-\frac{\alpha(\alpha-\theta)(\alpha-2\theta)}{3!}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ④$$

設 $n\theta=\alpha$（常數），當 $n\to\infty$ 時，則

$$\theta\to 0,\ \lim_{\theta\to 0}\cos\theta=1,\ \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

故由③得$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \cdots\cdots$

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \cdots\cdots$$

換α為 x 即得$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\cdots$ ⑤

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\cdots \quad ⑥$$

用待定係數法可求得

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\cdots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\cdots}$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑦$$

以上討論中的⑤⑥⑦稱為三角級數。

㈣關於三角函數的圖形：

(I) $y = \cos x$

$$y = f_1(x) = 1$$

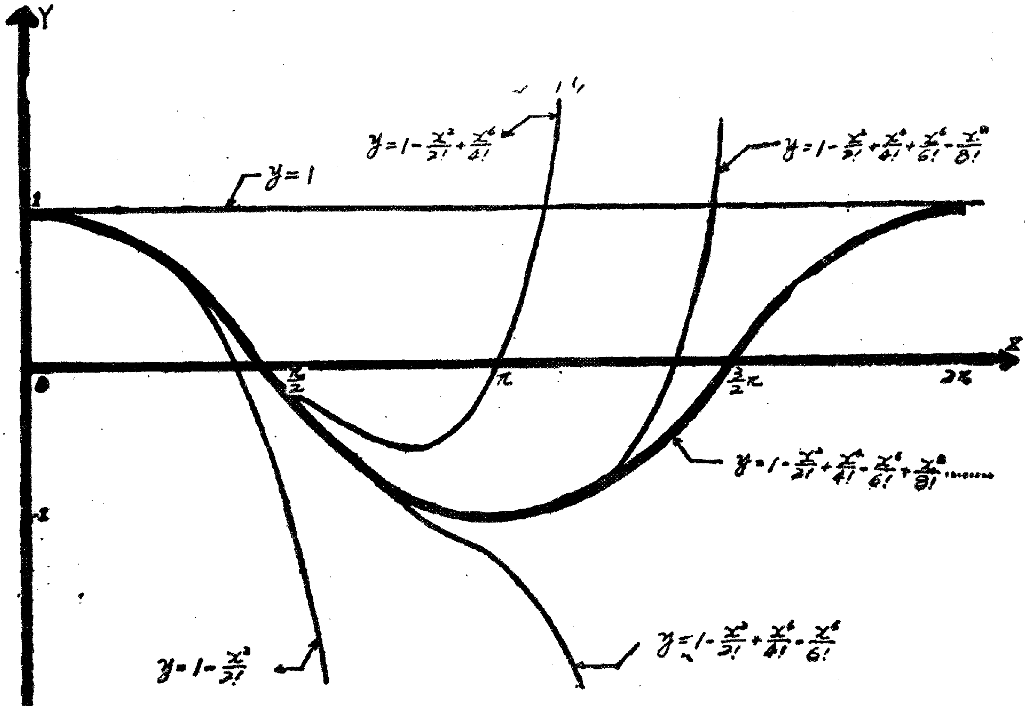
$$y = f_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}$$

$$y = f_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$y = f_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

$$y = f_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$$

以上諸函數圖形比較如下：由圖知若餘弦級數項數取得愈多，則圖形愈逼近 $y=\cos x$ 之圖形。



(Ⅱ) $y=\sin x$

$$y=f_1(x)=x$$

$$y=f_2(x)=x-\frac{x^3}{3!}$$

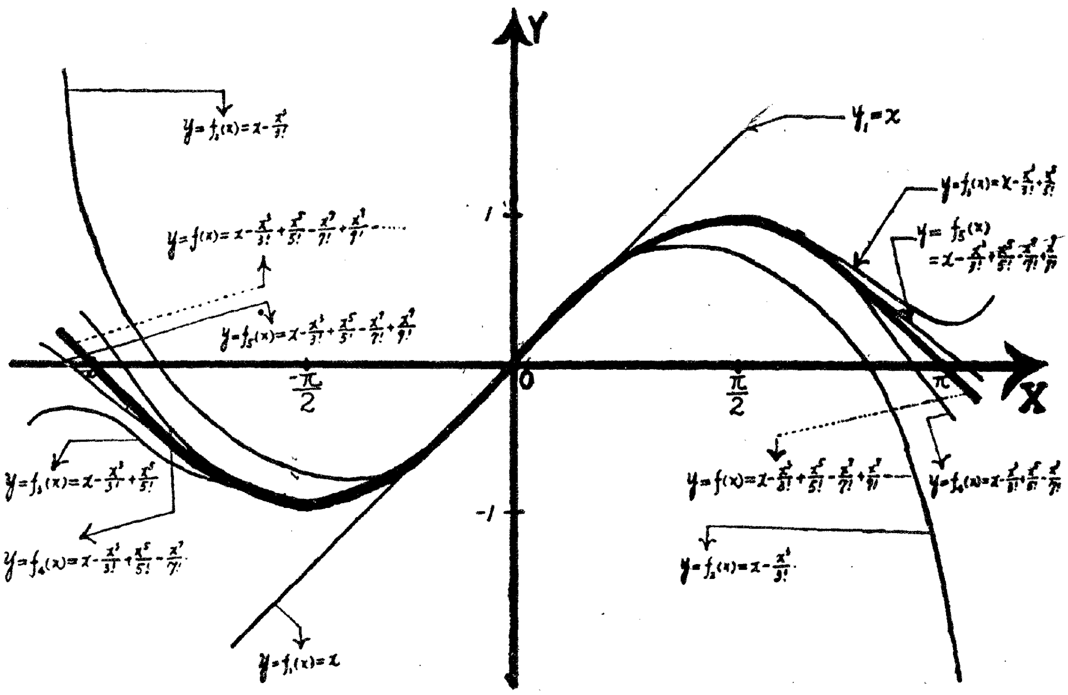
$$y=f_3(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$$

$$y=f_4(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}$$

$$y=f_5(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}$$

以上諸函數圖形比較如下：

由圖知：若正弦級數項數取得愈多，則其圖形愈逼近 $y=\sin x$ 之圖形。



㈤三角函數值表：

應用三角級數 $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots\cdots$

造正弦函數值表

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\cdots$$

造餘弦函數值表

其他三角函數值表均可由 $\sin x$ 和 $\cos x$ 之值求得之。

上兩式中之 x 取弳度量值，且可取 $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{4}$ 兩級數均爲收斂。

例1.求 $\sin 378°$ 之值到小數第八位。

解：因 $\sin 378° = \sin(360°+18°)\ \sin 18° = \sin\dfrac{\pi}{10}$

$$\text{故} \sin\frac{\pi}{10} = \frac{1}{1!}\left(\frac{\pi}{10}\right) - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^5$$

$$-\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^7+\cdots\cdots$$

$$=0.31415927-0.00516775+0.00002550$$
$$-0.00000006+\cdots\cdots$$
$$=0.30901700\cdots\cdots$$

七、反三角級數(Inverse Trigonometric Series)

㈠反三角級數：

因 $\sin^{-1}x=y$，$\sin y=x$，又 $\sin(-y)=-\sin y$

設 $y=Ax+Bx^3+Cx^5+\cdots\cdots$，則

$$\sin y=y-\frac{1}{3!}y^3+\frac{1}{5!}y^5-\cdots\cdots$$

即 $\sin y=(Ax+Bx^3+\cdots\cdots)-\frac{1}{3!}(Ax+Bx^3+\cdots\cdots)^3$

$$+\frac{1}{5!}(Ax+Bx^3+\cdots\cdots)^5-\cdots\cdots$$

$$=Ax+(B-\frac{A^3}{3!})x^3+(C-\frac{3A^2B}{3!}+\frac{A^5}{5})^5+\cdots\cdots$$

但 $\sin y=x$，則 $A=1$，$B-\frac{A^3}{3!}=0$，

$$C-\frac{3A^2B}{3!}+\frac{A^5}{5!}=0\cdots\cdots$$

故 $A=1\quad B=\frac{1}{3!}=\frac{1}{2\times3}$

$$C=\frac{1}{12}-\frac{1}{120}=\frac{1\times3}{2\times4}\times\frac{1}{5}\cdots\cdots$$

$$故\sin^{-1}x = y = x + \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)x^3 + \left(\frac{1\times 3}{2\times 4}\times\frac{1}{5}\right)x^5 + \cdots\cdots ①$$

又$\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin y = x$，

$$故\cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} - y$$

$$= \frac{\pi}{2} - x - \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)x^3 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\times\frac{1}{5}\right)x^5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

以上①②式中 $|x| < |$，均爲收斂級數。

$$又 e^{2iy} = \frac{e^{iy}}{e^{-iy}} = \frac{\cos y + i\sin y}{\cos y - i\sin y} = \frac{1 + i\tan y}{1 - i\tan y}$$

$$\mathrm{Log}_e e^{2iy} = \mathrm{Log}_e \frac{1 + i\tan y}{1 - i\tan y}，$$

$2iy = \mathrm{Log}_e(1 + i\tan y) - \mathrm{Log}_e(1 - i\tan y)$，由對數級數得

$$2iy = \mathrm{Log}_e(1 + i\tan y) - \mathrm{Log}_e(1 - i\tan y)$$

$$= \left\{ i\tan y - \frac{(i\tan y)^2}{2} + \frac{(i\tan y)^3}{3} - \cdots \right\}$$

$$- \left\{ -i\tan y - \frac{(i\tan y)^2}{2} - \frac{(i\tan^5 y)^3}{3} - \cdots \right\}$$

$$= 2i\left\{ \tan y - \frac{\tan^3 y}{3} + \frac{\tan^5 y}{5} - \frac{\tan^7 y}{7} + \cdots\cdots \right.$$

$$故 y = \tan y - \frac{\tan^3 y}{3} + \frac{\tan^5 y}{5} - \frac{\tan^7 y}{7} + \cdots\cdots,$$

若$\tan y = x$，則$\tan^{-1} x = y$，於是$y = \tan^{-1} x$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots\cdots\cdots \text{③}$$

於③中若以（$\frac{\pi}{2} - x$）代x，即得$\cot^{-1} x$的級數， 因可取$\tan y$或$\cot y$之絕對值小於1，故必有一收歛級數。

㈡π的計算：

（Ⅰ）由反正弦級數求之：

因$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$，則$\frac{\pi}{6} = \sin^{-1}\frac{1}{2}$代入①得

$$\frac{\pi}{6} = \sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} \times \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} \times \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \cdots\cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \frac{3}{1280} + \frac{5}{14336} + \cdots\cdots\cdots$$

故$\pi = 6 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \frac{3}{1280} + \cdots\cdots\right)$

$$= 3.14159265\cdots\cdots\cdots$$

（Ⅱ）由反正切級數求之：

因$\tan\frac{\pi}{4} = 1$，則$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} 1$代入③得$\frac{\pi}{4}$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\cdots\cdots \text{④}$$

故 $\pi = 4\left\{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots\cdots\right\}$

$= 3.14159265\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

又④收斂甚緩，求 π 值不易正確，特述修正方法如下：

設 $\tan(\alpha+\beta)=\tan\frac{\pi}{4}=1$

即 $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\ \tan\beta}=\tan\frac{\pi}{4}=1$

又如 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，$\tan\beta=\frac{1}{3}$，滿足 $\tan(\alpha+\beta)=1$

$$
\begin{aligned}
\text{故}\frac{\pi}{4}=\alpha+\beta &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) \\
&-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right) \\
&+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}\right) \\
&-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}\right)+\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤
\end{aligned}
$$

⑤比④收斂較速，用以求 π 之值較佳。

附註：數學家W. Shanks曾煞費苦心計算 π 之值到707位小數我輩青年學者有無此勇氣？下列摘下幾個富有意義的數，供大家參考：

$\pi = 3.141592653589793238\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\frac{1}{\pi}=0.318309886183\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\mathrm{Log}\,\pi = 0.497149872694\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

八、尤拉公式 (Euler Formula)

在高中數學第四册複數系一章中曾介紹符號 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 用來證明三角恆等式，此符號究竟怎樣得來？未曾提及。若把指數函數中的指數擴充到複數，且利用前所提及的指數級數、複數性質、三角級數，便易了解此符號的由來。再就此符號繼續探索，推廣數的領域，更可發現甚多的趣味問題。這些可能是前人早已發現，可是我們尚是初次碰面哩！茲分別敘述如下：

(一)尤拉公式，即 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

證明：由指數級數，複數基本性質及三角級數得：

$$e^{ix}=1+\frac{ix}{1!}+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\frac{(ix)^5}{5!}+\frac{(ix)^6}{6!}+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{ix}{1!}+\frac{-x^2}{2!}+\frac{-ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{ix^5}{5!}+\frac{-x^6}{6!}+\cdots\cdots$$

$$=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\cdots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)$$

$=\cos x+i\sin x$，故 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

㈡尤拉公式的推廣：

(Ⅰ)因$e^{ix}=\cos x+i\sin x$中，$x\in R$。命$x=\pi$，得

$$e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

即$e^{i\pi}=-1$ ……………………………①

①中爲數學上四個重要的數的結合，如e爲自然對數之底，i爲虛數單位；π爲圓周率；-1爲負數單位。

(Ⅱ)取①之平方根得$e^{\frac{i\pi}{2}}=\sqrt{-1}=i$ ……………②

(Ⅲ)於①中兩端取對數得 $i\pi=\mathrm{Log}_e(-1)$…………③

故知-1也有對數，惟因-1之對數爲虛數，不合於通常計算之用。

(Ⅳ)因$\cos\phi+i\sin\phi=\cos(2k\pi+\phi)+i\sin(2k\pi+\phi)$，$k\in z$

則$e^{i\phi}=e^{(2k\pi+\phi)i}$ ……………………………④

又$e^{(2k\pi+\phi)i}=\cos(2k\pi+\phi)+i\sin(2k\pi+\phi)$

兩端取對數得$(2k\pi+\phi)i$

$$=\mathrm{Log}_e\left\{\cos(2k\pi+\phi)+i\sin(2k\pi+\phi)\right\}\cdots\cdots⑤$$

(Ⅴ)於⑤中，命$\phi=0$，得$2k\pi i=\mathrm{Loge}\,1$ ……………⑥

若$k=0$，則由⑥得$\mathrm{Loge}\,1=0$

若$k=1$，則由⑥得$\mathrm{Loge}\,1=2\pi i$

若$k=2$，則由⑥得$\mathrm{Loge}\,1=4\pi i$

…………………………………………

結論：Loge 1 有多值，其中祗有一值爲實數。

(Ⅵ)於⑤中，命$\phi=\pi$，得$(2k+1)\pi i=\mathrm{Loge}(-1)$ …⑦

若$k=0$，則由⑦得$\mathrm{Loge}(-1)=\pi i$

若$k=1$，則由⑦得$\mathrm{Loge}(-1)=3\pi i$

若$k=2$，則由⑦得$\mathrm{Loge}(-1)=5\pi i$

…………………………………………

結論：負數之對數恆爲虛數。

(Ⅶ)考慮某數N之對數。因$Ne^{2k\pi i}$

$=N[\cos(2k\pi)+i\sin(2k\pi)]$

則$\mathrm{Log}_eN+2k\pi i=\mathrm{Log}_eN+\mathrm{Log}_e(\cos2k\pi+i\sin2k\pi)$

$=\mathrm{Log}_eN+\mathrm{Log}_e1=\mathrm{Log}_eN$

故$\mathrm{Log}_eN=\mathrm{Log}_eN+2k\pi i$ ……………………………⑧

由⑧得：一數之對數爲在對數表上檢出之數，再加以$2k\pi i$。

若$k=0$，則得常用對數；若$k\neq0$，則其對數有一虛數部分。

九、結　語

對冪級數的收斂圖形用途以及尤拉公式等之探討後，在我們腦海裏，已經消除了不少的疑難，且發現數學是一門系統很完整、組織極嚴密、觀念務求正確的學科。在高中數學課本中，卻無法把這些重要資料一一列入，詳盡討論，使一般同學死記呆背，强迫吸收，殊爲可惜。

這次在彭老師和張老師的熱心協助和指導下，我們五位同學才能順利討論完畢。在此特地向兩位老師致謝！又作者還期望有志諸位青年朋友，不妨共同來研討，欣賞這數學世界裏的各種美妙奇觀。

十、參考資料

㈠平面三角學（彭商育著）

㈡三角學講義（李　成著）

㈢高等代數講義（彭商育著）

㈣大代數講義（上野淸著）

㈤Elementary Functions(S. M. S. G. 21. Yale)

㈥Elementary Functions(S. M. S. G. 22. Yale)

㈦Plane Trigonometry(Hall & Knight)

㈧Higher Algebra (Hall & Knight)

㈨College Algebra (Fine)