巧巧式——整數的神秘結構

高中組數學第二名

私立輔仁中學　　　　製作學生：黃　嘉　麟
指導老師：張　健　三

一、動機：

如果你對數有興趣的話，你一定知道什麼是完美，什麼是奧妙。一個數學問題，你能解決了它，它即是完美；若你不能解決，它即是奧妙。

數與數之間存在著許多性質，而由數組成的式，同樣亦具有完美的結構。我對於式的討論，便是在每一個式子附以一特定的坐標，用它來討論彼此之間的結構，並像解析幾何一般，建立坐標系，求其幾何意義，這一切都是表明式子與式子之間，必然存在某些共通的結構，和其可以互相推求的性質。

在高一時我曾提出兩個有趣的梯形式：

$$1+2=3$$
$$4+5+6=7+8$$
$$9+10+11+12=13+14+15$$
$$16+17+18+19+20=21+22+23+24$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$3^2+4^2=5^2$$
$$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$$
$$21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2$$
$$36^2+37^2+38^2+39^2+40^2=41^2+42^2+43^2+44^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots$$

從那時起，我即有式子與式子間必然有結構存在的信念，亦即是我懷疑「數論」是否可推展至「式論」。

高二時，我研究一些數列——定冪數列，其美妙的間差性質：

$1^n+2^n+3^n+4^n+5^n+\cdots\cdots$其間差爲$n!$

我們爲了分析這個性質，萌發了巧巧式的觀念，隨後發展甚速，憑著想像我爲巧巧式建立幾何、坐標、向量的關係，及代數的分析和基本結構，更由巧巧式推展到其他巧式。

二、什麼是巧巧式

1.巧巧式的外觀

巧巧式是一種有趣的式子，大凡如下是巧巧式的形態：

$1^2+5^2+6^2=2^2+3^2+7^2$

$1+5+6=2+3+7$　　　　（二次三項巧巧式）

$1^3+7^3+8^3+14^3=2^3+4^3+11^3+13^3$

$1^2+7^2+8^2+14^2=2^2+4^2+11^2+13^2$

$1+7+8+14=2+4+11+13$　　　　（三次四項巧巧式）

2.巧巧式的定義（二次三項）

〔定義〕 $a^2+b^2+c^2=d^2+e^2+f^2$ 中 $a、b、c、d、e、f\in R$

且$\begin{cases} a+b+c=d+e+f \\ a+f=b+e=c+d \end{cases}$，則稱$a^2+b^2+c^2=d^2+e^2+f^2$爲二次三項巧巧式。

〔註〕以下所稱巧巧式，皆指二次三項巧巧式

3.基本定理：

$$\begin{cases} a+b+c=d+e+f \\ a+f=b+e=c+d \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2=d^2+e^2+f^2 \text{爲巧巧式}$$

〔證明〕

1.$a+b+c=d+e+f$

2.$(a-f)+(b-e)+(c-d)=0$

3.令$a+f=b+e=c+d=k$

4.(2)×(3)得$(a+f)(a-f)+(b+e)(b-e)+(c+d)(c-d)=0$

$\Rightarrow a^2-f^2+b^2-e^2+c^2-d^2=0$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=d^2+e^2+f^2$

由定義知其爲巧巧式。

基本定理頗爲重要，它是二次三項巧巧式之最基本的一個定理。

三、結構性質——推演更多的巧巧式：

1.〔梯狀性質〕

$a^2+b^2+c^2=d^2+e^2+f^2$是一巧巧式

$\Rightarrow (a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2$

$=(d+1)^2+(e+1)^2+(f+1)^2$成立，且亦是巧巧式。

〔例〕 $1^2+5^2+6^2=2^2+3^2+7$

$\Rightarrow 2^2+6^2+7^2=3^2+4^2+8^2$

$\Rightarrow 3^2+7^2+8^2=4^2+5^2+9^2$

$\Rightarrow \cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots$

2.〔ON性質〕

$a^2+b^2+c^2=d^2+e^2+f^2$爲巧巧式

$\Rightarrow (a+0)^2+(b+1)^2+(c+2)^2$

$=(d+0)^2+(e+1)^2+(f+2)^2$成立，且亦是巧巧式。

〔例〕$1^2+5^2+6^2=2^2+3^2+7^2$

$2^2+6^2+7^2=3^2+4^2+8^2$

$3^2+7^2+8^2=4^2+5^2+9^2$ $\xRightarrow{\text{ON性質}}$

$4^2+8^2+9^2=5^2+6^2+10^2$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$1^2+6^2+8^2=2^2+4^2+9^2$

$2^2+7^2+9^2=3^2+5^2+10^2$

$\Rightarrow$ $3^2+8^2+10^2=4^2+6^2+11^2$ $\Rightarrow \cdots\cdots$

$4^2+9^2+11^2=5^2+7^2+12^2$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

3.〔巧巧性質〕

$a^2+b^2+c^2=d^2+e^2+f^2$

$a'^2+b'^2+c'^2=d'^2+e'^2+f'^2$ 皆是巧巧式

$\Rightarrow (a+a')^2+(b+b')^2+(c+c')^2$

$=(d+d')^2+(e+e')^2+(f+f')^2$成立，且亦是巧巧式

〔巧巧性質之證明〕

1. $\because a^2+b^2+c^2=d^2+e^2+f^2$

$a'^2+b'^2+c'^2=d'^2+e'^2+f'$ 皆是巧巧式

2. 由定義如 $\begin{cases} a+b+c=d+e+f \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ a+f=b+e=c+d \cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

$\begin{cases} a'+b'+c'=d'+e'+f' \cdots ③ \\ a'+f'=b'+e'=c'+d' \cdots ④ \end{cases}$

3. ①+③得 $(a+a')+(b+b')+(c+c')$

$=(d+d')+(e+e')+(f+f')$

②+④得 $(a+a')+(f+f')=(b+b')+(e+e')$

$=(c+c')+(d+d')$

4. 由基本定理　得 $(a+a')^2+(b+b')^2+(c+c')^2$

$=(d+d')^2+(e+e')^2+(f+f')^2$ 是巧巧式

〔梯狀性質〕和〔ON性質〕之證明：

1. 由定義知　$1^2+1^2+1^2=1^2+1^2+1^2, 0^2+1^2+2^2$

$=0^2+1^2+2^2$ 皆是巧巧式。

2. 令　$a^2+b^2+c^2=d^2+e^2+f^2$ 是巧巧式

3. 由巧巧性質　得 $(a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2$

$=(d+1)^2+(e+1)^2+(f+1)^2$，

$(a+0)^2+(b+1)^2+(c+2)^2=(d+0)^2+(e+1)^2$

$+(f+2)^2$ 皆是巧巧式。

四、幾何意義：

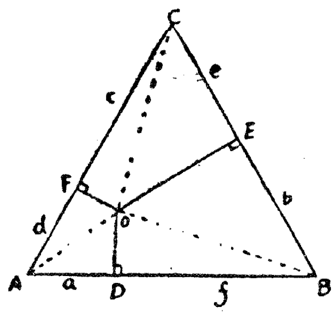
如（圖一）△ABC爲正△，0到

$\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CA}$ 三邊垂足爲D，E，F

取 $\overline{AD}=a$　　$\overline{DB}=f$

$\overline{BE}=b$　　$\overline{EC}=e$

$\overline{CF}=c$　　$\overline{FA}=d$



（圖一）

則得：　①$a^2+b^2+c^2=d^2+e^2+f^2$

②$a+b+c=d+e+f$

③$a+f=b+e=c+p$

〔證明〕1.作$\overline{OA}$，$\overline{OB}$，$\overline{OC}$

2.由畢氏定理 $\overline{AO}^2-a^2=\overline{OB}^2-f^2$………①

$\overline{OB}^2-b^2=\overline{OC}^2-e^2$………②

$\overline{OC}^2-c^2=\overline{OA}^2-d^2$………③

3.①＋②＋③ 得 $a^2+b^2+c^2=d^2+e^2+f^2$

4.∵△ABC是正△ ∴$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$

即$a+f=b+e=c+d=k$

5.由$a^2+b^2+c^2=d^2+e^2+f^2$

$\Rightarrow a^2-f^2+b^2-e^2+c^2-d^2=0$

$\Rightarrow (a+f)(a-f)+(b+e)(b-e)+(c+d)(c-d)=0$

$\Rightarrow k(a-f+b-e+c-d)=0$

$\Rightarrow a-f+b-e+c-d=0$

$\Rightarrow a+b+c=d+e+f$

6.由(3)(4)(5)得

①$a^2+b^2+c^2=d^2+e^2+f^2$

②$a+b+c=d+e+f$

③$a+f=b+e=c+d$

此恰合於巧巧式定義，故知巧巧式可用幾何圖形表示，任一O點到正△ABC三邊垂足，即可決定一巧巧式。

五、巧巧坐標系：

1.〔平面巧巧坐標系〕

〔定義〕 R值$=a+f=b+e=c+d$

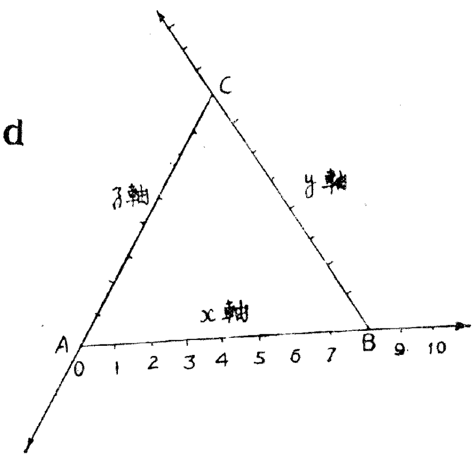
為正△三邊長。

以$\overleftrightarrow{AB}$為x軸　$\overrightarrow{AB}$為正向

$\overleftrightarrow{BC}$為y軸　$\overrightarrow{BC}$為正向

$\overleftrightarrow{CA}$為z軸　$\overrightarrow{CA}$為正向

A，B，C為基點



（圖二）

不同R值有不同的平面坐標系組合這些R值大小不同之平面巧巧坐標系，則成一完整的立體坐標系。

2.〔空間巧巧坐標系〕

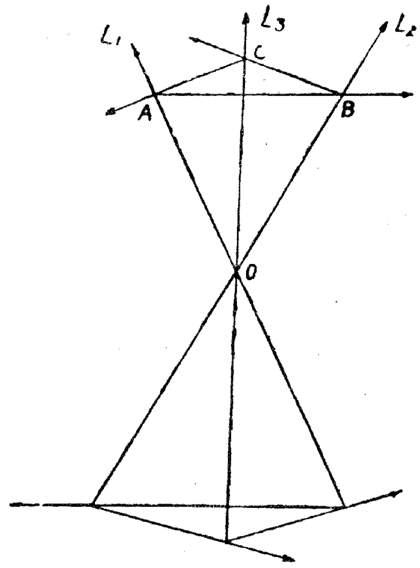
$L_1L_2L_3$相交於O點，且兩兩交成60°

$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$。$\overrightarrow{OC}$分別爲正向。

取$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=R$則

△ABC爲正△且$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=R$

△ABC即一平面巧巧坐標系，爲空間巧巧坐標系之一部分。



（圖三）

〔註〕1. O點代表巧巧式

$O^2+O^2+O^2=O^2+O^2+O^2$

2. P代表巧巧式　$a^2+b^2+c^2=d^2+e^2+f^2$

Q代表巧巧式　$(-a)^2+(-b)^2+(-c)^2=(-d)^2+(-e)^2+(-f)^2$

則$\overline{PQ}$之中點爲O

3. 坐標

(x, y, z)　x表x軸上坐標，　y表y軸上坐標，z表z軸上坐標。

若　$a^2+b^2+c^2=d^2+e^2+f^2$ 爲巧巧式

則（a，b，c）爲其坐標。

〔例〕$1^2+6^2+8^2=2^2+4^2+9^2$ 之坐標（1.6.8）

4. 有關定理　$\boxed{1(a.b.c)\text{之}R\text{值}=\frac{2}{3}(a+b+c)}$

〔例〕求（2.6.7）所代表的巧巧式

〔解〕$R=\frac{2}{3}(2+6+7)=10=a+f=b+e=c+d$

$\because a=2\qquad b=6\qquad c=7$

$f=8\qquad e=4\qquad d=3$

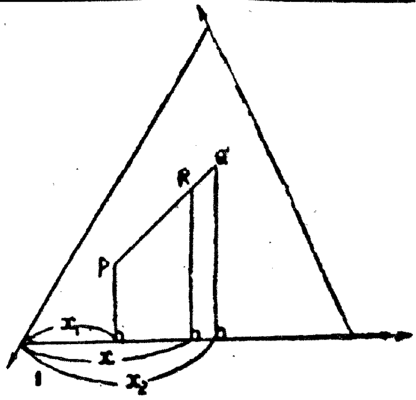
故得巧巧式　$2^2+6^2+7^2=3^2+4^2+8^2$

2 $P(x_1,y_1,z_1)$,$Q(x_2,y_2,z_2)$ 若R在$\overline{PQ}$上，且 $\overline{PR}:\overline{RQ}=r:1$ 則R坐標$\left(\dfrac{x_1+rx_2}{1+r}, \dfrac{y_1+ry_2}{1+r}, \dfrac{z_1+rz_2}{1+r}\right)$

〔證明〕 1. $\dfrac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}=r=\dfrac{x-x_1}{x_2-x}$

$\therefore r(x_2-x)=x-x_1$

得 $x=\dfrac{x_1+rx_2}{1+r}$



（圖四）

2.同理 $y=\dfrac{y_1+ry_2}{1+r}$ $z=\dfrac{z_1+rz_2}{1+r}$

3.得 R坐標$\left(\dfrac{x_1+rx_2}{1+r} \quad \dfrac{y_1+ry_2}{1+r} \quad \dfrac{z_1+rz_2}{1+r}\right)$

§ 引理（共線公式）若$A(x_1,y_1,z_1)$ $B(x_2,y_2,z_2)$ $C(x_3,y_3,z_3)$共線

$$\text{則}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0$$

六、巧巧向量

1.〔定義〕 $A(x_1y_1z_1)$、$B(x_2y_2z_2)$兩巧巧式在同一巧巧平面坐標系上（即R值相同）

則

定義$\overrightarrow{AB}=\langle x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\rangle$

〔註〕其運算及性質皆與直角坐標之向量相同。

〔定義〕 向量內積

$$\langle x_1y_1z_1\rangle\langle x_2y_2z_2\rangle=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

2.由以上定義得定理：

①若$\langle x_1y_1z_1\rangle\langle x_2y_2z_2\rangle=0$則此兩向量垂直。

②若 $\overrightarrow{AB}=\langle x_1y_1z_1\rangle$ $\angle BAC=\theta$

$\overrightarrow{AC}=\langle x_2y_2z_2\rangle$

$$\cos\theta=\frac{\frac{2}{3}\langle x_1y_1z_1\rangle\langle x_2y_2z_2\rangle}{\overline{AB}\ \overline{AC}}$$

3.基本公式：定 $\overrightarrow{AB}$ 長 $=|\overrightarrow{AB}|$ 設 $\overrightarrow{AB}=\langle x,y,z\rangle$

$$|\overrightarrow{AB}|=\overline{AB}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

4.由上述定理、定義及公式，可得平面巧巧坐標系之各圖形所表的「巧巧方程式」。

茲將一些重要觀念論述如下：

①（x,y,z）表平面巧巧坐標上之任一點，

則 $ax+by+cz+d=0$ 表示一直線。

〔比較〕：直角坐標系上爲一平面。

②$x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$表示一圓。

〔比較〕：直角坐標系上爲球面。

③同理可推演出各圓錐曲線之巧巧方程式。

七、基本結構：

1.基本結構原理：同一平面坐標上，若A，B，C三巧巧式不共線且R值≒O，則A，B，C三巧巧式依巧巧性質可導出所有巧巧式。

〔解說〕：ABC三點若不共線，則可決定一平面，此平面上之所有點可以 $pA+qB+rC$ 且 $p+q+r=1$ 表示之。

再乘上一實數k得 $kpA+kqB+krC$，R值爲一變數，所得之點即充滿整個空間巧巧坐標系。

故不共線三巧巧式可決定出所有巧巧式。

2.以幾何來討論基本結構

公式：A（x_1,y_1,z_1），B（x_2,y_2,z_2），C（x_3,y_3,z_3）爲三巧巧式，

若 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ A，B，C可決定

所有的巧巧式。

〔證明〕由（引理1）若A，BC，共線

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

則其對偶命題

$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ A，B，C不共線

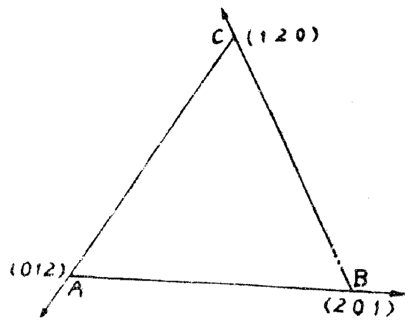
討論①若A，B，C　R值相同，由結構原理得

A，B，C可決定所有之巧巧式。

②若A，B，C　R值不等，則存在實數m，使mA，mB，mC之R值相等，由結構原理知，mA，mB，mC可決定所有巧巧式

$\Rightarrow$ A，B，C可決定所有巧巧式。

3.基本結構



吾人可取平面巧巧坐標上之三基點做爲基本結構。

若取R值$=\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=2$之坐標系可得A（0，1，2）

B（2，0，1）

C（1，2，0）

$$\because \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

故A，B，C可決定所的巧巧式。

〔定義〕〔x，y，z〕=x〔1，0，0〕+y〔0，1，0〕+z〔0，0，1〕〔a，b，c〕+〔a′，b′，c′〕

爲巧巧性質之運算。

規定　〔1，0，0〕代表 $0^2+1^2+2^2=0^2+1^2+2^2$

〔0，1，0〕代表 $2^2+0^2+1^2=1^2+2^2+0^2$

〔0，0，1〕代表 $1^2+2^2+0^2=2^2+0^2+1^2$

得運算定理1.〔x,y,z〕+〔x′,y′,z′〕=〔x+x′,y+y′,z+z′〕

2. n〔x,y,z〕=〔nx,ny,nz〕

3. $0^2+0^2+0^2=0^2+0^2+0^2$爲運算之單位元素

〔例〕　〔1，0，0〕：$0^2+1^2+2^2=0^2+1^2+2^2$

$+$　〔0，1，0〕：$2^2+0^2+1^2=1^2+2^2+0^2$

〔1，1，0〕：$2^2+1^2+3^2=1^2+3^2+2^2$

〔例〕　〔1,1,0〕：$2^2+1^2+3^2=1^2+3^2+2^2$

⇨ 3〔1,1,0〕=〔3,3,0〕：$6^2+3^2+9^2=3^2+9^2+6^2$

〔例〕　〔1,5,6〕=〔1,0,0〕+5〔0,1,0〕+6〔0,0,1〕

〔1,0,0〕：$0^2+1^2+2^2=0^2+1^2+2^2$

5〔0,1,0〕：$10^2+0^2+5^2=5^2+10^2+0^2$

$+$　6〔0,0,1〕：$6^2+12^2+0^2=12^2+0^2+6^2$

〔1,5,6〕：$16^2+13^2+7^2=17^2+11^2+8^2$

任何一個巧巧式都存在著〔x,y,z〕來代表它。

八、千奇百怪的性質

設 $a^2+b^2+c^2=d^2+e^2+f^2$爲巧巧式，則有下列性質：

〔代數性質〕①$ab+bc+ca=de+ef+fd$

② $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$

$=(d+e)^2+(e+f)^2+(f+d)^2$

③若 $f(x)=px^2+qx+r$

則 $f(a)+f(b)+f(c)=f(d)+f(e)+f(f)$

④令 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$

$g(x)=(x-d)(x-e)(x-f)$

則 $f(d)=f(e)=f(f)=k$

$g(a)=g(b)=g(c)=-k$

〔巧式變形〕

(A)等差變形：$1^2+5^2+6^2=2^2+3^2+7^2$

$\Rightarrow 12^2+56^2+67^2=23^2+34^2+78^2$

$\Rightarrow 123^2+567^2+678^2=234^2+345^2+789^2$

（理由）(1) $1^2+5^2+6^2=2^2+3^2+7^2$

$\Rightarrow 10^2+50^2+60^2=20^2+30^2+70^2$

(2) $1^2+5^2+6^2=2^2+3^2+7^2$

$\Rightarrow 2^2+6^2+7^2=3^2+4^2+8^2$

(3)由(1)(2)應用巧巧性質

$\Rightarrow 12^2+56^2+67^2=23^2+34^2+78^2$

(B)循環變形：

〔例〕 $12^2+56^2+67^2=23^2+34^2+78^2$

$\Rightarrow 1212^2+5656^2+6767^2=2323^2+3434^2+7878^2$

$\Rightarrow$……………………………

(C)對應變形：

〔例〕 $1^2+5^2+6^2=2^2+3^2+7^2$

$\Rightarrow 12^2+53^2+67^2=21^2+35^2+76^2$

$\Rightarrow 1221^2+5335^2+6776^2=2112^2+3553^2+7667^2$

$\Rightarrow$……………………………

(D)自映變形：

〔例〕 $1^2+5^2+6^2=2^2+3^2+7^2$

$\Rightarrow 156^2+561^2+615^2=237^2+372^2+723^2$

〔註〕以上變形各項位數須相等。

〔僭次性質〕：若 $a^2+b^2+c^2=d^2+e^2+f^2$ 爲巧巧式

則 ① $abc-def=(a+1)(b+1)(c+1)-(d+1)(e+1)(f+1)$

② $(a^3+b^3+c^3)-(d^3+e^3+f^3)$
$=[(a+1)^3+(b+1)^3+(c+1)^3]$
$-[(d+1)^3+(e+1)^3+(f+1)^3]$

由僭次性質可導出高次巧巧式。

〔對積性質〕：

若 $a^2+b^2+c^2=d^2+e^2+f^2$

$a'^2+b'^2+c'^2=d'^2+e'^2+f'^2$ 爲巧巧式

則 $aa'+bb'+cc'=dd'+ee'+ff'$

對積性質是巧巧性質是可行之判別式。

九、二次幾項巧巧式

1.〔定義〕$a_1,a_2,a_3\cdots a_n\in R, b_1,b_2,b_3\cdots b_n\in R$

若 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2+\cdots+b_n^2$

且有下列關係：

①$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$

②$a_1+b_n=a_2+b_{n-1}=a_3+b_{n-2}=\cdots\cdots=a_n+b_1$

則謂之爲二次 n 幾項巧巧式

〔例〕：$1^2+12^2+13^2+14^2+15^2=7^2+8^2+9^2+10^2+21^2$ 爲二次五項巧巧式。

2.〔結構性質〕——巧巧性質。

若 $a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2=b_1^2+b_2^2+\cdots\cdots+b_n^2$

$a_1'^2+a_2'^2+\cdots+a_n'^2=b_1'^2+b_2'^2+\cdots b_n'^2$ 爲巧巧式

⇨

$(a_1+a_1')^2+(a_2+a_2')^2+\cdots\cdots+(a_n+a_n')^2=(b_1+b_1')^2+(b_2+b_2')^2+\cdots\cdots+(b_n+b_n')^2$ 是巧巧式。

其證明與二次三項巧巧式同理，此省略。

由巧巧性質可得梯狀及ON性質，及一些千奇百怪的性質，二次三項所有性質皆可推至二次 n 項巧巧式

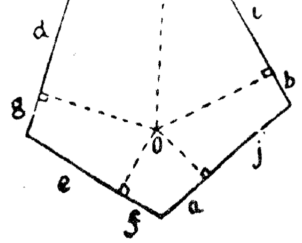
3.〔二次 n 項巧巧式的幾何意義〕

二次 n 項巧巧式的幾何意義乃由等邊 n 邊形所決定。如二次三項巧巧式幾何意義爲等邊△所決定。

〔註〕：正 n 邊形⊂等邊 n 邊形

例二次五項巧巧式可由O點到等邊五邊形之垂足所決定

即



①$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=f^2+g^2+h^2+i^2+j^2$

②$a+b+c+d+e=f+g+h+i+j$

③$a+j=b+i=c+h=d+g=e+f$

4.基本結構

二次巧巧式的基本結構，甚爲艱難，經久久研究以來，稍有心得，我以代數來解釋基本結構。

以二次三項解說如下：

設有二次三項巧巧式基本結構如下：

$$[1,0,0]\quad a_1^2+b_1^2+c_1^2=d_1^2+e_1^2+f_1^2$$
$$[0,1,0]\quad a_2^2+b_2^2+c_2^2=d_2^2+e_2^2+f_2^2$$
$$[0,0,1]\quad a_3^2+b_3^2+c_3^2=d_3^2+e_3^2+f_3^2$$

若此基本結構成立，則必存在〔x，y，z〕可代表任一巧巧式 $a^2+b^2+c^2=d^2+e^2+f^2$

$$\text{即}\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=a \\ a_2x+b_2y+c_2z=b \\ a_3x+b_3y+c_3z=c \end{cases}\qquad \text{存在一解}$$

要使 x,y,z 有解 則必 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$

推展至二次 n 項，

$$\text{若}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \vdots & & \cdots\cdots \\ \vdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{則}(a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\cdots a_{1n})$$

$(a_{21}a_{22}a_{23}\cdots a_{2n})\cdots\cdots(a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots a_{nn})$ 可代表基本結構。

〔例〕(1,1,0,0) (1,0,1,0) (1,0,0,1) (0,0,1,1)

可建立爲二次四項巧巧式基本結構。

$$\because \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

即 $[1,0,0,0]$ $1^2+1^2+0^2+0^2=1^2+1^2+0^2+0^2$

$[0,1,0,0]$ $0^2+1^2+0^2+1^2=0^2+1^2+0^2+1^2$

$[0,0,1,0]$ $1^2+0^2+0^2+1^2=0^2+1^2+1^2+0^2$

$[0,0,0,1]$ $0^2+0^2+1^2+1^2=0^2+0^2+1^2+1^2$

必可表示出所有之二次四項巧巧式。

所以 $[1,8,3,2]=[1,0,0,0]+8[0,1,0,0]+3[0,0,1,0]+2[0,0,0,1]$

即得 $4^2+9^2+2^2+13^2=1^2+12^2+5^2+10^2$

5.數學遊戲——二次巧巧式和幻方的關係

2	9	4
7	5	3
6	1	8

如圖是一個 3 × 3 的幻方，方格中每一行，每一列，及兩個對角線上的數加起來都是15。

1	8	15	10
12	13	6	3
14	11	4	5
7	2	9	16

(1)幻方有對稱排列：

方格中之任二數以中心點或中心格爲對稱中點，則此二數和爲一常數。

例 右圖4×4幻方中

1 和16，6 和11，12和 5 ………

之和皆爲17。

(2) n 階幻方是由二次 n 項巧巧式所組成：

幻方基本的原則是每行每列都相等，又加上了對稱的原則，即構成了二次巧巧式的定義。

得一結論：n 階幻方是由二次 n 項巧巧式所組成。

例：如圖4×4幻方中

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

1.設 $a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}=k$

$\Rightarrow a_{41}+a_{42}+a_{43}+a_{44}=k$

2.對稱原則 所以

$a_{11}+a_{44}=a_{12}+a_{43}=a_{13}+a_{42}$

$=a_{14}+a_{41}$

3.由(1)(2)及基本定理

得 $a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2+a_{14}^2=a_{41}^2+a_{42}^2+a_{43}^2+a_{44}^2$

即是一巧巧式。

此外 $a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2+a_{24}^2=a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2+a_{34}^2$

亦是巧巧式

幻方既然是由二次巧巧式組成，則以上所論述之一切巧巧式的性質、公式，皆可應用到幻方來，成爲幻方的性質。

十、高次巧巧式

(一)三次巧巧式：

1.由來：由二次巧巧式經僭次性質導得。

2.定義：

$a^3+b^3+c^3+d^3=e^3+f^3+g^3+h^3 \quad a,b,c,d,e,f,g,h\in R$

若① $a+d=b+c=e+h=f+g$

② $ad+bc=eh+fg$

③ $3a+b=3e+f$

則 $a^3+b^3+c^3+d^3=e^3+f^3+g^3+h^3$ 是三次巧巧式。

3.性質：

(1)梯狀性質，ON性質，巧巧性質。

(2)配積性質：

若 $a^3+b^3+c^3+d^3=e^3+f^3+g^3+h^3$

$a'^3+b'^3+c'^3+d'^3=e'^3+f'^3+g'^3+h'^3$

$a''^3+b''^3+c''^3+d''^3=e''^3+f''^3+g''^3+h''^3$ 爲巧巧式，

$\Rightarrow aa'a''+bb'b''+cc'c''+dd'd''$

$=ee'e''+ff'f''+gg'g''+hh'h''$

(3)僭次性質

若 $a^3+b^3+c^3+d^3=e^3+f^3+g^3+h^3$爲巧巧式

$\Rightarrow a^4+b^4+c^4+d^4+(e+1)^4+(f+1)^4+(g+1)^4+(h+1)^4$

$=e^4+f^4+g^4+h^4+(a+1)^4+(b+1)^4+(c+1)^4$

$+(d+1)^4$

(4)基本結構

〔1,0,0〕 $1^3+3^3+0^3+2^3=2^3+0^3+3^3+3^3+1^3$

〔0,1,0〕 $0^3+1^3+2^3+3^3=0^3+1^3+2^3+3^3$

〔0,0,1〕 $3^3+2^3+1^3+0^3=3^3+2^3+1^3+0^3$

㈢四次及四次以上之巧巧式

愈高次其基本結構，愈不易了解，但其性質仍和二次、三次相同，下列舉一些結構，由它可做出無限多巧巧式。

(1)四次：〔1,0,0〕 $0^4+3^4+2^4+1^4+5^4+4^4$
$=1^4+0^4+4^4+3^4+2^4+5^4$

〔0,1,0〕 $0^4+1^4+2^4+3^4+4^4+5^4$
$=0^4+1^4+2^4+3^4+4^4+5^4$

〔0,0,1〕 $5^4+4^4+3^4+2^4+1^4+0^4$
$=5^4+4^4+3^4+2^4+1^4+0^4$

(2)五次：〔1,0,0〕 $0^5+3^5+2^5+1^5+7^5+6^5+5^5+8^5$
$=1^5+0^5+3^5+6^5+2^5+5^5+8^5+7^5$

〔0,1,0〕 $0^5+1^5+2^5+3^5+4^5+5^5+6^5+7^5$
$=0^5+1^5+2^5+3^5+4^5+5^5+6^5+7^5$

〔0,0,1〕 $7^5+6^5+5^5+4^5+3^5+2^5+1^5+0^5$
$=7^5+6^5+5^5+4^5+3^5+2^5+1^5+0^5$

到此由僭次性質可繼續推至六次、七次。

十一、變巧式

變巧式由二次三項巧巧式導出，它雖然不是巧巧式但是由巧巧式的觀念，可簡單地解決它。

1.〔定義〕$a,b,c,d\in z$

若 $a^2+b^2=c^2+d^2$ 謂之爲變巧式。

2.〔基本結構〕

$n_P(1,0)$ $y^2+(-x)^2=(-y)^2+x^2$

$n_P(0,1)$ $x^2+y^2=x^2+y^2$

$P=x^2+y^2$ p爲質數 $x<y$

運算和巧巧式基本結構相同。

通式：$n_P(a,b)$：$(ay+bx)^2+(-ax+by)^2$
$=(-ay+bx)^2+(ax+by)^2$

$P=x^2+y^2$ p爲質數 $x<y$

〔例〕

$$n_{17}(2,9)=?$$

$$n_{17}(2,9)=n_{17}(2,0)+n_{17}(0,9)$$

$P=17=1^2+4^2$

$$n_{17}(1,0)\Rightarrow \quad 4^2+(-1)^2=(-4)^2+1^2$$
$$n_{17}(0,1)\Rightarrow \quad 1^2+4^2=1^2+4^2$$

$$\therefore n_{17}(2,0)\Rightarrow \quad 8^2+(-2)^2=(-8)^2+2^2$$
$$+n_{17}(0,9)\Rightarrow \quad 9^2+36^2=9^2+36^2$$
$$\overline{n_{17}(2,9)\Rightarrow \quad 17^2+34^2=1^2+38^2}$$

3.〔式値定理〕

$$M=(ay+bx)^2+(-ax+by)^2$$
$$=a^2y^2+b^2x^2+a^2x^2+b^2y^2$$
$$=(a^2+b^2)(x^2+y^2)=P(a^2+b^2)$$

〔例〕 $n_{17}(2,9)$：$17^2+34^2=1^2+38^2$

式值$=17^2+34^2=1445$

由公式$M=P(a^2+b^2)=17\times(2^2+9^2)=1445$

兩者相合。

4.〔可分質數〕 在$n_P(a,b)$中之P爲質數（$=x^2+y^2$）我謂之爲可分質數。

如下：2，5，13，17，29，37，41，53，61……………………

等都是可分質數。

5.應用

〔例〕分解 145 爲兩平方和

$$145=5\times 29$$
$$=(1^2+2^2)(2^2+5^2) \quad \text{設 } P=x^2+y^2$$
$$=P(a^2+b^2) \qquad \therefore\ x=1,\ y=2,\ a=2,\ b=5$$

$\therefore 145=n_5(2,5)$

$$n_5(2,0)\Rightarrow 4^2+(-2)^2=(-4)^2+2^2$$
$$n_5(0,5)\Rightarrow 5^2+10^2=5^2+10^2$$
$$\overline{n_5(2,5)\Rightarrow 9^2+8^2=1^2+12^2}$$

即　$145=9^2+8^2=1^2+12^2$

〔例〕分解 1450 爲兩平方和

$$
\begin{aligned}
1450 &= 2\times5\times5\times29\\
&=(1^2+1^2)(1^2+2^2)(1^2+2^2)+(2^2+5^2)\\
&=(3^2+1^2)(1^2+2^2)(2^2+5^2)\\
&\quad [n_2(1.2)=3^2+1^2]\\
&=(7^2+(-1)^2)(2^2+5^2)\text{或}((-5)^2+5^2)(2^2+5^2)\\
&=33^2+(-19)^2=(-37)^2+9^2=(-15)^2+35^2
\end{aligned}
$$

$\therefore 1450=33^2+19^2=37^2+9^2=15^2+35^2$

十二、結語：

巧巧式仍不斷在發展中，在每上完一單元數學課本時，我總能把巧巧式推展至相對應的單元上，課本有向量，我推出巧巧向量，課本有解析幾何，我也推展巧巧式的解析幾何，這完全是純粹的興趣所使然。限於時間及篇幅，實在難以詳細論述。其他類型的巧巧式，如泛巧式，3－1巧式，和和積巧式都未能談及，匆匆之間完成此文，若有疑問或建議歡迎互相研討共勉。