三角錐的「容錐」、「容心」與「心線」

高中組數學第一名

台北市建國中學　　製作學生：洪明昀　王元芳
指導老師：邱　顯　義

一、前言：

在三角錐中有很多性質，這可以由數學書藉中找到，在此不再陳述。現在僅就我們研究所得結果，定義出「容錐」、「容心」與「心線」，再把此心線與極著名之歐拉（Euler）線作一比較，並研究其在四角錐五角錐以至 n 角錐中是否成立。

二、定義1：容錐

一三角錐，過其四頂點分別作與其對面平行之平面，則此四平面圍成另一三角錐，稱爲原三角錐之容錐。

定義2：外心

三角錐外接球的球心稱爲外心。

定義3：容心

容錐之外心稱爲其原被包容三角錐的容心。

三、討論1（三角錐容心與三角形垂心的關係）

由於三角形的垂心爲過頂點之三垂線的交點，故我們很容易想到三角錐之「垂心」可能爲過頂點且垂直對面的四垂線的交點，但由演算結果知，除某些三角錐（如正角錐）外，垂線常發生歪斜而不交於一點。

現根據另一方法來決定「垂心」，便不會有上述的缺點。我們都知道；若△ABC過三頂點各作與對邊平行的直線，設兩兩相交於D、E、F則 △DEF 之外心爲△ABC之垂心。類似上法，我們過三角錐之四頂點作與其對面平行的平面，而構成容錐，定義容錐之外心爲原三角錐之容心（定義3），當然三角錐的容心與三角形的垂心是相當的。

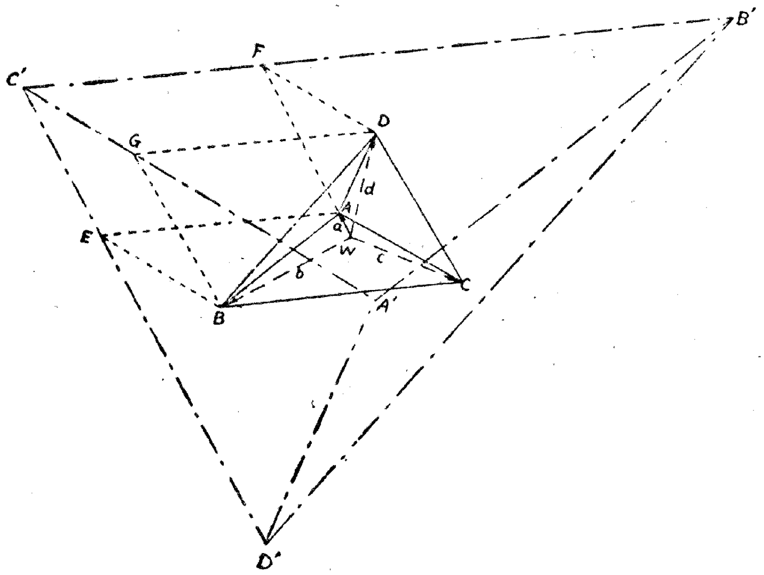
四、定理1：

三角錐之外心0、重心W、容心H* 共線，此線稱爲外心線

，此線稱爲外心線，且 $3\overline{OW}=\overline{WH}$*

證　明：

三角錐 ABCD（如圖一），過A作 $E_A /\!/ E_{BCD}$，過B作 $E_B /\!/ E_{ACD}$，過 C 作 $E_C /\!/ E_{ABD}$，過D $E_D /\!/ E_{ABC}$，圍成另一三角錐A′B′C′D′，則根據上述討論，三角錐A′B′C′D′之外心可相當爲三角錐ABCD之垂心。



〔圖一〕

以三角錐ABCD之重心W爲始點，設 $\overrightarrow{AW}=a$，$\overrightarrow{WB}=b$，$\overrightarrow{WC}=c$，$\overrightarrow{WD}=d$

則 $\frac{1}{4}(a+b+c+d)\overrightarrow{WW}=0$

亦即 $a+b+c+d=0$

再者以向量平移理論得一平行六面體，（ACBEFDGC′）

所以

$$\overrightarrow{WC'}=\overrightarrow{WC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC'}$$

$$=\overrightarrow{WC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}$$

$$=C+(b-c)+(a-c)+(d-c)$$

$$=(a+b+c+d)-3C=-3C$$（CWC′共線）

同理 $\overrightarrow{WA'}=-3a$　$\overrightarrow{WB'}=-3b$　$\overrightarrow{WD'}=-3d$

（∴AWA′，BWB′，CWC′共線）

換句話說：三角錐A'B'C'D'是先把三角錐ABCD以W為中心，作反映再延長了3倍。

即得三角錐A'B'C'D'的外心H*， 即$\overrightarrow{WH^*}=-3\overrightarrow{WO}$這也說明了OWH*共線

且∵$\overrightarrow{WH^*}\doteqdot 3\overrightarrow{OW}$ ∴ $\left|\overrightarrow{WH^*}\right|=3\left|\overrightarrow{OW}\right|$ 故$3\overrightarrow{OW}=\overrightarrow{WH^*}$

註：同理可證三角錐之內心，重心與容錐的內心共線，其倍數關係同上。此直線稱為內心線，與外心線合稱為心線。

五、定理2：

一三角錐，若過某一頂點之三平面角為直角（如圖二），則外心線通過此頂點，且此頂點為容心，外心所連線段之中點。

證明：

（i）令外心O（$x_1 y_1 z_1$）

則：$x_1^2+y_1^2+z_1^2\left(\overline{OA}^2\right)$

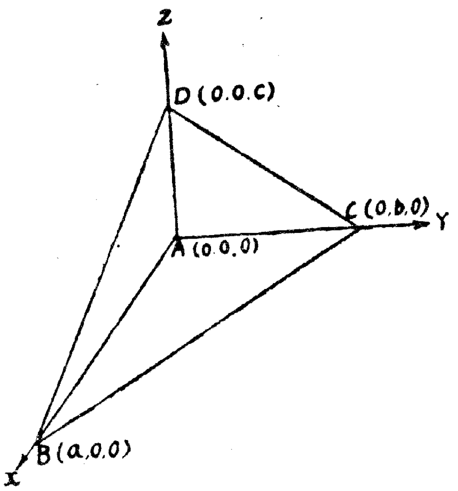
$=(X_1-a)^2+Y_1^2+Z_1^2\left(\overline{OB}^2\right)$

$=X_1^2+(r_1-b)_1^2+Z_1^2\left(\overline{OC}^2\right)$

$=X_1^2+Y_1^2+(Z_1-C)^2\left(\overline{OD}^2\right)$

解得$X_1=\dfrac{a}{2}$　$Y_1=\dfrac{b}{2}$　$Z_1=\dfrac{C}{2}$

$\therefore O\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{b}{2},\dfrac{C}{2}\right)$



〔圖二〕

(i i)重心W（x_2，Y_2，Z_2）

$\therefore \overrightarrow{WA}+\overrightarrow{WB}+\overrightarrow{WC}+\overrightarrow{WD}=0$

$\therefore (a-4x_2,\ b-4y_2,\ c-4z_2)=0$

解得$x_2=\frac{a}{4}$　$y_2=\frac{b}{4}$　$z_2=\frac{c}{4}$

$\therefore W(\frac{a}{4},\frac{b}{4},\frac{c}{4})$

(iii)H*爲（x_3，y_3，z_3）

$\because 3\overrightarrow{OW}=\overrightarrow{WH^*}$（定理1）

$\therefore 3(\frac{-a}{4},\frac{-b}{4},\frac{-c}{4})=(X_3-\frac{a}{4},\ y_3-\frac{b}{4},$

$Z_3-\frac{4}{c})$

解得$X_3=\frac{-a}{2}$　$Y_3=\frac{-b}{2}$　$Z_3=\frac{-c}{2}$

$\therefore H^*(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2},\frac{-c}{2})$

(iii)$\therefore \overrightarrow{OA}=(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2},\frac{-c}{2})$，$\overrightarrow{AH^*}=(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2},$

$\frac{-c}{2})$

$\therefore \overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AH^*}$ 故OAH*共線（心線過A）

且 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AH^*}|$ $\therefore \overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AH^*}$ A爲$\overrightarrow{OH^*}$中點

六、討論2：（外心線與歐拉線之比較）

由討論1我們知道，三角錐之外心線爲外心，重心，容心（相當於垂心）所決定，此與三角形的歐拉線頗爲相似，因爲它們都是外心，重心垂心所決定。而當所在爲直角三角形或三角錐時，它們都通過此直角頂，唯一不同的是其間的倍數關係由三角形的2變爲三角錐的3。

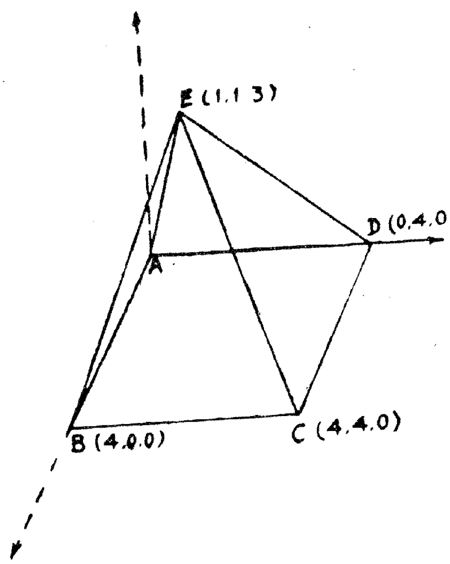
七、推廣：（四角錐、五角錐……的引申）

(1)容錐：

四角錐以上的角錐中，它們的容錐並不一定存在，因爲n角錐中，其底必共平面（角錐定義），但若其底不爲正n邊形，則相對的側表面不定，故四角錐以上的角錐，底必須爲正n邊形。

(2)根據定理1知心線之存在與重心是否挪動及其挪動方式有極大關係，在四角錐、五角錐……中由演算結果知其重心挪動極可能脫離心線，故四角錐以上不一定存在心線（僅正角錐存在，而比例關係不規則）現舉一例說明。

令一四角錐E－ABCD（如圖三）



〔圖三〕

解：

(1)設其外心O（$x_1 y_1 z_1$）

則O點到四角錐之五頂點等距。

解得外心O 2，2，$\frac{1}{2}$)

(2)容心H^*($x_2y_2z_2$)

註：當n角錐底爲正n邊形，而n爲奇數時，容錐可由過各頂點之平面決定，但當n爲偶數時(如圖三)，則不可能過每一頂點作對面(不定)之平行面，所以除頂點外，須過其底之一邊作對面之平行面(如圖三中，過$\overline{AB}$作 E_{CDE}之平行面)，才能找到容錐。

故得容錐之五圍成面分別爲

$$\begin{cases} z=3 \\ 3x-z=12 \\ 3y-z=12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

得容錐五頂點爲
$$\begin{cases} (5,5,3) \\ (-3,-3,3) \\ (-3,5,3) \\ (5,-3,3) \\ (3,3,-3) \end{cases}$$

求得容錐之外心爲被包容四角錐之容心座標爲(1,1,2)

又原四角錐之重心W($x_3y_3z_3$)

由$\overrightarrow{WA}+\overrightarrow{WB}+\overrightarrow{WC}+\overrightarrow{WD}+\overrightarrow{WE}=0$ 得w$\left(\frac{9}{5},\frac{9}{5},\frac{3}{5}\right)$

又容錐之重心W′ 仿上法得$\left(\frac{7}{5},\frac{7}{5},\frac{9}{5}\right)$

則由演算結果知無W或W′ 都不在$\overleftrightarrow{OH^*}$線上

故此四角錐不存在心線

八、結語：數學本來就是一門無止境的學問，三角錐一定還有許多性質尚待發掘。朋友！您不妨也一試！

本作品乃匆促完稿，不能盡合理想之處在所難免，敬祈指正，則不勝感幸。

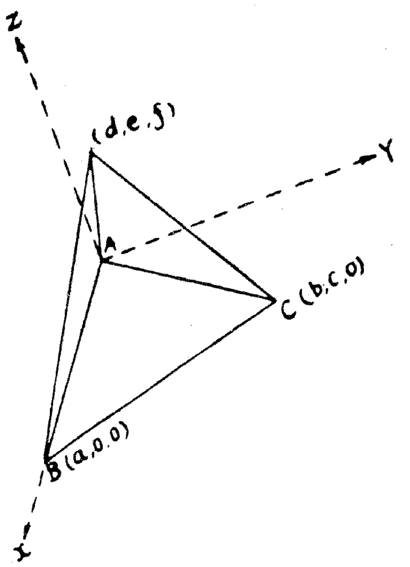
附錄：

1。一直線X，恆過一定點V，且沿一不含此V點之多角形ABCD……之周移動，其所成之表面稱爲角錐面，此角錐面與此多角形(底)所圍成之空間中有限部份稱曰角錐。

2. 若一角錐之底爲正多角形，且自頂點所引底面之垂線通過底之中心，則稱此角錐曰正角錐。

3. 外心線之座標證明：

令一三角錐如右圖



〔圖四〕

解：

(1)設外心O（$X_1Y_1Z_1$）

則$X_1^2+Y_1^2+Z_1^2$（$\overline{OA}^2$）

$=(X_1-a)^2+Y_1^2+Z_1^2$（$\overline{OB}^2$）

$=(X_1-b)^2+(Y_1-C)^2+Z_1^2$（$\overline{OC}^2$）

$=(X_1-d)^2+(Y_1-e)^2+(Z_1-f)^2$（$\overline{OD}^2$）

解得$X=\dfrac{a}{2}$　$y=\dfrac{b^2+c^2-ab}{2c}$

$$Z=\frac{(d^2+e^2+f^2-ad)c-(b^2+c^2-ab)e}{2cf}$$

(2)重心W（X_2，Y_2，Z_2）

$\because \overrightarrow{WA}+\overrightarrow{WB}+\overrightarrow{WC}+\overrightarrow{WD}=O$

解得W（$\dfrac{a+b+d}{4}$，$\dfrac{c+e}{4}$，$\dfrac{f}{4}$）

(3)容心H*

求過A B C D而各與其對面平行之平面

得

$$\begin{cases} cfx+(a-b)fy+(be+ac-ae-cd)z=o \\ fy-ez=cf \\ cfx-bfy+(be-cd)z=acf \\ z=f \end{cases}$$

其四頂點爲 $(a+b+d\ ,\ c+e\ ,\ f\ )$

$(b+d-2d\ ,\ c+e\ ,\ f\ )$

$(a+d-2b\ ,\ e-2c\ ,\ f\ )$

$(a+b-2d\ ,\ c-2e\ ,\ -2f\ )$解得此容

錐之外心爲 $\left(b+d-\dfrac{a}{2}\ ,\ \dfrac{3b^2+c^2-3ab-2ce}{-2c}\ ,\right.$

$$\left.\dfrac{(3d^2+3e^2+f^2-3ad)c-3(b^2+c^2-ab)e}{-2cf}\right)$$

$$\therefore \overrightarrow{OW}=\left(\dfrac{b+d-a}{4}\ ,\ \dfrac{2ab+ce-2b^2-c^2}{4c}\ ,\right.$$

$$\left.\dfrac{2(b^2+c^2-ab)e-(2d^2+2e^2+f^2-2ad)c}{-4cf}\right)$$

$$\overrightarrow{WH^*}=\left(\dfrac{3(b+d-a)}{4}\ ,\ \dfrac{3(2ab+ce-2b^2-c^2)}{4c}\ ,\right.$$

$$\left.\dfrac{6(b^2+c^2-ad)e-3(2d^2+2e^2+f^2-2ad)c}{4cf}\right)$$

$\therefore 3\overrightarrow{OW}=\overrightarrow{WH^*}$ 故OWH*共線

$\therefore 3\left|\overrightarrow{OW}\right|=\left|\overrightarrow{WH^*}\right|$ 故 $3\overline{OW}=\overline{WH^*}$