不圓的圓和破洞的圓

國中組數學第二名

基隆市立安樂國民中學　　　製作學生：盧秀燕等四人
指導老師：梁　東　志

不圓的圓

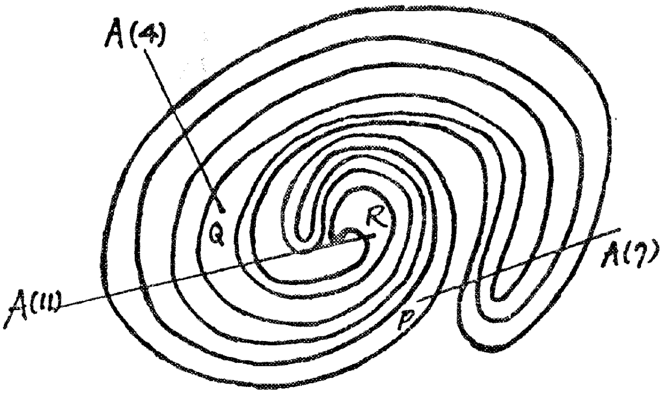
動機：有一次與同學玩套繩遊戲，奇怪的是爲什麼我總是套不中？當時，我的確找不出是什麼原因。但是爲了要找出個解釋的理由，却激發了我去想這個問題的興趣。

引言：在我們的課程中，所提到關於「判斷一定是在一定圓的內部或外部」的問題，所用的方法通常都祇限於「被判斷點與圓心」間連接線段來與半徑的大小比較。可是這却要用到線段的比較長短，在應用上較爲麻煩。那麼，我們是不是可以考慮有沒有別的方法呢？對於通常要用到的「圓心」，我們是不是也可以摒棄不用？更何況圓心祇是定位置的一點而已。

事實上，經過我們實驗的結果，我們可以不必用到圓心，而祇利用「被判斷點與圓外一點」的連接線與圓本身相交點的「個數」來判斷。結果是：若被判斷點是在圓的內部，那麼與圓外任一點連接線與圓的相交點個數是「１」。若被判斷點是在外部，那麼個數便是「０」或「２」。

不圓的圓：若圓的形狀改變，而點線的粗細不變，仍必須具有「圓的曲線間不相交」，由於我們還無法給它一個較爲合理的名稱，所以姑稱它爲「不圓的圓」。（以下簡稱圓）。不過，對於這種圓的點與點之間的緊密排列，我們可以想像到它與原來的圓（沒有變形的圓），點間仍然具有同樣的相關位置。況且，我們不難想像到，它們具有一種函數的一對一性質（後有補充）。現在，我們祇不過無法說出它究竟含有多少個點而已。

問題：有了圓的概念後，我們不難推得如下圖的圓，其中，對於P、Q、R三點，我們究竟又要如何才能判斷它們究竟是在圓的內部或是外部呢？



研究：由於圓都是本身不相交的「簡單封閉曲線」，所以，必然可以找到一點是在圓的外部（為什麼？）現在我們假設有外部任一點A，我們歸納得到的結果是：若A點與被判斷點的連線與圓相交點的個數是

(1)奇數。那麼被判斷點是在圓的內部。

(2)偶數。那麼被判斷點是在圓的外部。

(3)若連線有相切現象，切點個數以偶數計算。

(4)在圓上的點，不在內部也不在外部，這種方法不能適用。

根據上列的方法與結果，我們可以說：

P是在圓內部。

Q是在圓外部。

R是在圓外部。

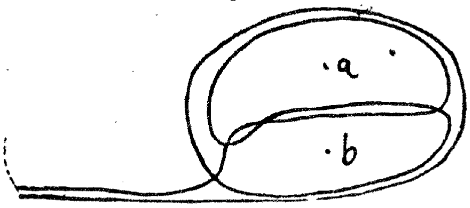
而我們所引據的理由是：圓乃是簡單的封閉曲線。而圓的內部與外部之間，由圓所分隔。

模型：引用上列結果，初步對於套繩遊戲，有下列的結果。

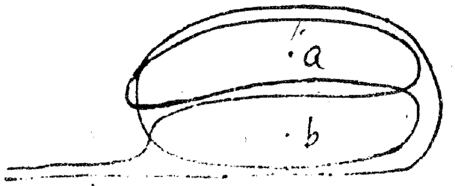
(一)若繩子成一簡單封閉曲線的形狀（外形的扭曲重疊）那麼a、b兩點都不在圓的內部，亦即不會被繩子套中。換句話說；這祇是圓的再進一步變形。現在我們再進一步觀察，，可

以發現到，若a、b兩點都與圓外任一點連線都有偶數個交點。

(二)在這個模型中，a的位置，仍然是在圓外，可是現在我們却可以在b點被套中，這究竟為什麼？原因是它已變成一個不是簡單的封閉曲線（後有詳細說明）。



模型一



模型二

破洞的圓

動機：有一次參觀展覽會中，由於會場佈置巧妙，令人有如步入「迷宮」無法一次順利看完作品，令人遺憾。所以回家後，我們就一直考慮著這個如何來走參觀會場的路線。

引言：在不圓的圓中，我們知道「已限制了點線粗細的不變」但却具有「內部、外部的區別」。可是，現在我們若換個角度方向來考慮圓的另一問題。假如我們忽略了圓的內部與外部的區別，不著重封閉與簡單的性質，而加強考慮圓點線間的可變性。那麼我們究竟可得到什麼樣的位置變換呢？事實上，在我們日常生活中，有很多的平面圖形都與這種圓在位置的轉變中有很大的關係，現在我們慢慢品味其中變化的奧妙。

破洞的圓：若有一圓，在圓上拿掉一點以後，那我們就可以得到一個「不是封閉」的曲線，現在我們也不知道該用什麼樣的名稱比較恰當，所以就實際型態而給了它一個不文雅的名稱，叫「破洞的圓」(以下簡稱圓)。由於它是不封閉，所以也就沒有內部與外部的區別，然而，我們又著重它們在點重疊的圖形粗細變化，雖然它們已被拿掉一點，可是其餘部份，我們亦可想像到仍然具有與原來完整圓間點的轉變型態位置相關的意味。

天生的觀念：假如有一位盲者走入一間祗有一個進出口的圓型大客廳，那麼試想他若想走出這個客廳最好的方法應該是怎麼樣呢？假如他在中央位置任意向前走，碰到牆壁，然後後退，回到中央，改變另一方向，繼續作下一同樣動作，如此周而復始，你想他能順利完成嗎？很值得懷疑，我們祗可以說，除非是他運氣太好了。

可是我們人天生就有解析位置的能力，我們都會隨意朝任一方向運動，等到接觸了牆壁後，就以右（左）手按著牆，沿著牆作逆（或順）時針方向運動。如是我們最多也只需要作一個近似於圓周的運動而已。更何況這是百發而無一不中的方法嗎？

研究：若要解釋這個問題，我們最基本的觀念是由點線變化來研究最爲簡單。

若仔細判斷，我們不難發現：

(1)在圓中（原來的圓），我們走的是內緣。

(2)在變了形的圓中，由於它已無所謂內緣或外緣（爲什麼？），若我們引用我們所走的方法，必可以走出缺口。

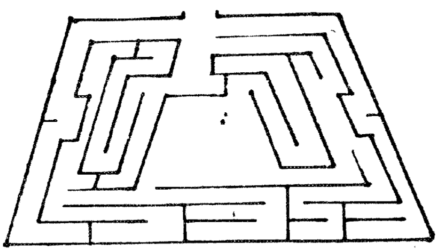
(3)若變形的圓中，伸出的小枝愈多，我們就要走愈多的路程才能完成任務。

(4)若有完全分離的點集合在這圖形附近，那與路線的長短完全無關。

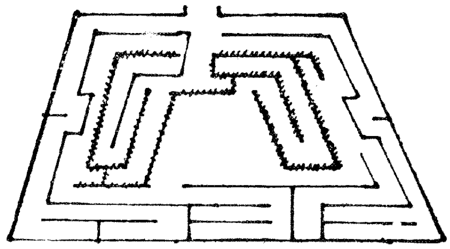
由於當時我不知道破了洞的圓已無內、外部的區別，所以也不知道有「引用天生觀念」的走法。現在我們可算是知道了。

模型：(1)在模型三中，整個圖型都是圓的變形，我們若想走出，可以引用我們研究出來的走法。

(2)在模型四中，中央較粗（線條不同）的部份，那便是圓外的另一集合，不是圓的部份，所以與我們所走的路線完全沒有影響。



模型三



模型四

結論：雖然我們由「套繩遊戲」及「參觀會場」聯想到以上兩種解析位置的問題，但我們認爲這個祇不過才是初步的位置分析而已。實際上，可能還不能滿足我們眞正的需要與眞正說出它的意義。

可是，至少我們知道不圓的圓與破洞的圓都和圓有關；而它們兩者之間却又沒有關連。而所具有的，也是完全不同的位置解析意義。

留下的問題：雖然我們已經粗略的了解這二種圓的個中奧妙，可是仍有一點小小的觀念，我們必須向大家介紹，並與大家共同來研究這些問題。

(1)我們所提到的位置一對一對應排列；究竟是如何的對應法呢？而它又一定是一對一的函數？

(2)何以我們所做的套繩遊戲中，(b)圖所套中的是「雙套」而不是「單套」呢？這又要如何來解釋呢？

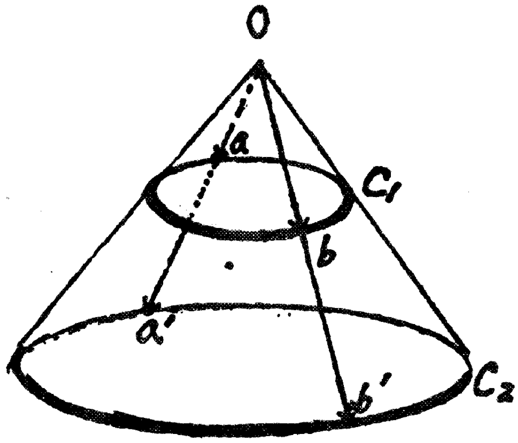
(3)若破洞的圓中，破了兩個洞，甚至更多的洞的話，那又會有那些更有意味的問題呢？

(4)若是牽涉到空間的問題，我們研究所得到的結果，是不是仍然能適用呢？

問題的再研究：

我們在題後，雖然又作了不斷的努力，但是對於較高深的問題，仍有待往後的努力，不過對於上述的問題，我們仍想出了下列的說法：

⑴任意二圓（不圓的圓或正常的圓），必須都是由通常的圓所演變而來，所以要說明它們點與點之間的排列關係可用下圖來說明，它們且具有一對一的函數性質，其中O點即爲對應的函數。其中a與a′，b與b′都互相對應。



⑵若我們以空間的解析，可以很明顯看出套中是雙套，原因乃是它已不是一個簡單圖形，是交於一點後，而以這交點爲支點將二邊圖形重疊所得到的平面圖形，所以套中的套是二個圓的圓。

⑶若是破了兩個洞，當然，我們可以把一個破洞的圓分成兩部份，那豈不是變成了兩個破洞的圓嗎？如此類推，可以知道，破了N個洞的圓，那就形成了N個破洞的圓，而每個圓之間也沒有圓的大小可言。

⑷這個又是我們以後研究的重點之一，我們現在還不敢下定論說我們一定可以想的出來，不過，我們是一直再想。祇要我們肯問肯學，我們相信一定可以解決的。