

# 三 度 空 間 碰 撞

## 高中組物理第三名

省立台中第一高級中學

製作學生：劉中鈺等四人

指導老師：黃 男 敏

內容簡介：

利用平常習見的一些簡單器材，由學生自己構思、組合，利用它證明三度空間內彈性碰撞的動量不減，並進而討論其碰撞後之運行軌跡。

壹、動機：

上個學期，我們在物理課學了動量不減定律，並做過二度空間碰撞的實驗之後，同學們在一起討論：三度空間內的碰撞結果會怎樣呢？要如何證明呢？於是有人發言：非利用閃光攝影辦不到，而且需幾架攝影機同時運用。」當時我們深深不以爲然，爲什麼不能用些簡單的器材證明呢？我們就證明看看。

貳、目的：

組合一些簡單常見的儀器證明三度空間碰撞之動量不減。

參、構想：

動量不減公式：（M表質量，V、V'表碰撞前後速度）

$$M_1 \vec{V}_1 + M_2 \vec{V}_2 = M_1 \vec{V}'_1 + M_2 \vec{V}'_2$$

速度值無法直接測得。這在二度空間的碰撞，可讓物體於碰撞後隨即離開此平面而落至一較低之平行平面，因其水平方向不再受力，且落地時間相同，位移與速度成正比，因而可用位移代替速度，得：

$$M_1 \vec{S}_1 + M_2 \vec{S}_2 = M_1 \vec{S}'_1 + M_2 \vec{S}'_2$$

上式兩邊除以它們落地共同時距 t 則可得

$$M_1 \frac{\vec{S}_1}{t} + M_2 \frac{\vec{S}_2}{t} = M_1 \frac{\vec{S}'_1}{t} + M_2 \frac{\vec{S}'_2}{t}$$

$$\Rightarrow M_1 \vec{V}_1 + M_2 \vec{V}_2 = M_1 \vec{V}'_1 + M_2 \vec{V}'_2$$

因此，雖  $t$ ， $V$  未知，仍可證明動量不減，但在三度空間內，因有垂直方向的分速，其掉落時間不同，故須設計一可精確測出球自碰撞至落地經過的時距。又，若讓其中一物靜止，可化簡公式，並使得碰撞較易控制，故我們又須設計使被撞體能在碰撞發生之刹那消失其支持力。

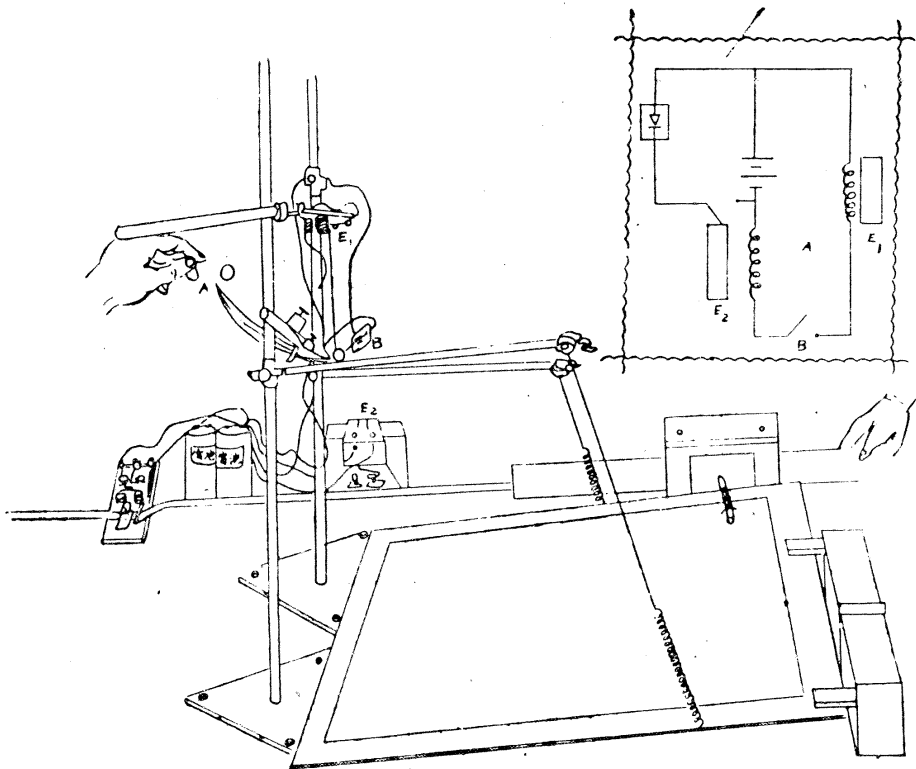
#### 肆、實驗裝置（見附圖）

現在我們使兩球相撞，稱見初速之球為入射球，原靜止球為靶球；稱使入射球獲得初速之斜面為發射台。

##### 1. 關於電路：

入射球自 A 點下滑，至 B 點撞掉開關（以銅絲做成，質量、阻力均極微），兩電磁鐵  $E_1 E_2$  磁力消失，發生碰撞時原由  $E_1$  吸住之靶球支持力消失，且  $E_2$  吸住之計時器開關掉下，接通計時器開始打點計時。

##### 2. 木板與振動的記錄：



木板上鋪白紙及複寫紙，記下球的落點；因其上接彈簧，球落下之衝力可產生一振動，此振動可由固著於一側之筆在一拉動之紙帶上記下，且板之阻力甚大，很快振動即近於停止，要二球再落下時，造成另一次波動，雖然這兩次時間間隔很短，但仍可看出。

### 3. 紙帶之分析：

紙帶開始拉動時，並未開始打點，直至B點經過計時器時，球撞開了開關而接通計時器（此時亦即發生碰撞之時），因此將A A'疊合，見自B點至振動開始處有m個打點，第二次振時有n個打點，而計時器每秒可打點N個，則知第一、二球

落地需時分別為 $\frac{m}{N}$ 秒和 $\frac{n}{N}$ 秒

### 伍、步驟：

1. 各部分儀器組合妥善，紙帶拉伸後，在記錄波動和計時打點兩處作出始點。
2. 控制入射球的人喊一、二、三然後放球，而拉紙帶的人於聽到之時即開始拉動，因為紙帶是拉直的，在記錄波的筆下和計時器經過的紙帶長度相同。
3. 球下落而離開發射台時，撞掉開關，兩電磁鐵磁力消失，靶球失去支持力，此時之碰撞無外力參與。
4. 量取所需數據；計時點數，平面位移。
5. 再做一次實驗，但此次實驗無靶球，使入射球不發生碰撞而落下。以此次之資料計算碰撞前入射球之速率。

### 陸、記錄、計算與分析：

下面是我們的一次實驗結果。

### 記錄：

		質量 (g)	位 移 (cm)			時間 (sec)	
			$\vec{S}_x$	$\vec{S}_y$	$\vec{S}_z$	打點數	時 距
碰撞前	入射球	11.8	49.0	0	-120.0	23.3	0.048
	入射球	11.8	34.0	-4.3	-120.0	27.1	0.475
碰撞後	靶 球	16.9	36.0	3.7	-120.0	27.26	0.480
g 值 : 960 cm/sec <sup>2</sup> 計時器每點間隔 $\frac{1}{57}$ 秒							

[註]座標系之建立：1.碰撞點為原點；2.高為z軸，g之方向為負；3.底板為x-y平面。

計算：1.速度： $\vec{V}_x$ 及 $\vec{V}_y = \vec{S} \div t$  總速率 $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$

$$\vec{V}_z = \frac{\vec{S}_z}{t} - \frac{1}{2} g t \quad (\text{註：} V_z \text{表碰撞後的初速})$$

2.動量 =  $\vec{V} \times m$  (應用向量之加減法可求總動量)

3.角度：①與X軸所夾之角 $\theta_x \Leftrightarrow \tan \theta_x = \frac{|V_y Z|}{|V_x|}$ ，其

餘類推。

4.方程式：①有重力作用時 $\rightarrow$

$$\begin{cases} x = \vec{V}_x t & V_x, V_y, V_z \text{ 爲定數} \\ y = \vec{V}_y t & t \text{ 爲參數且 } t \geq 0 \\ z = \vec{V}_z t + \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

②無重力作用時 $\rightarrow$

$$\begin{cases} x = \vec{V}_x t \\ y = \vec{V}_y t \\ z = \vec{V}_z t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{V_x} = \frac{y}{V_y} = \frac{z}{V_z},$$

$V_x, V_y, V_z$  爲定數

[註]角度與軌跡方程式的運算結果，只是理論值，其基本假設為速度與  $g$  值無誤差。

5. 動量之誤差的計算：

① 設入射球損失之動量為  $\Delta \vec{P}_1$

靶球所獲得之動量為  $\Delta \vec{P}_2$  (理論上  $\Delta \vec{P}_1 = \Delta \vec{P}_2$ )

② 吾人以  $(\Delta \vec{P}_1 + \Delta \vec{P}_2) \div (\frac{\Delta \vec{P}_1 + \Delta \vec{P}_2}{2})$

③ 因  $\Delta \vec{P}_1$  與  $\Delta \vec{P}_2$  在同一直線上，所以可用純量之運算來運算誤差。

計算結果：〔  $B_1$ ：入射球，  $B_2$ ：靶球 〕

組					
號					
次 數					
碰撞之前後		$B_1$	$B_1$	$B_2$	誤 差
球 之 區 別					
速 度 cm/sec	$\vec{V}_x$	120.1	75.8	70.8	
	$\vec{V}_y$	0	-10.2	7.4	
	$\vec{V}_z$	-81.3	-98.3	+1.5	
	$ \vec{V} $	147.0	124.7	71.2	
動 量 gcm/sec	$\vec{P}_x$	14.2	8.94	12.0	32.1%
	$\vec{P}_y$	0.0	1.2	1.24	3.8%
	$\vec{P}_z$	9.6	11.60	0.30	14.3%
	$ \vec{P} $	17.1	14.77	12.02	28.1%

角  度	與 x 軸 所夾著	34.2°	52.7°	8.1°	
	y	0°	85.6°	83.8°	
	z	55.9°	38.6°	88.7°	

組	號	次數	碰撞後 之球	無重力作用時 之軌跡方程式	有重力作用時 之軌跡方程式
			B <sub>2</sub>	$\frac{x}{75.8} = \frac{y}{-10.2} = \frac{z}{-98.3}$	$\begin{cases} x = 75.8 t \\ y = -10.2 t \\ z = 98.3 t - 480 t^2 \end{cases}$
			B <sub>2</sub>	$\frac{x}{70.8} = \frac{y}{7.4} = \frac{z}{+1.5}$	$\begin{cases} x = 70.8 t \\ y = 7.4 t \\ z = -1.5 t - 480 t^2 \end{cases}$

柒、討論：

1. 軌跡方程式：

(a) 無重力作用下

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \text{ 此為空間之直線方程式}$$

(b) 有重力作用下

$$\begin{aligned} \textcircled{1} x &= \vec{V}_x t & \textcircled{2} \text{代入} \textcircled{3} & x = \frac{\vec{V}_x}{\vec{V}_y} y \dots\dots\dots \text{I} \\ \textcircled{2} y &= \vec{V}_y t & \textcircled{2} \text{代入} \textcircled{1} & z = \frac{\vec{V}_B}{\vec{V}_y} y + \frac{\vec{g}}{2\vec{V}_y^2} y^2 \dots \text{II} \\ \textcircled{3} z &= \vec{V}_z t + 1/2 \vec{g} t^2 & & \vec{V}_x \quad \vec{V}_y \quad \vec{V}_z \quad \vec{g} \text{ 為定數} \end{aligned}$$

I 式為與 z 軸重合之一平面。  
II 式為過原點之一拋物面。

由計算之結果發現其軌跡為拋物線之一部份。

2. 各球之軌跡與其落地之時間之關係。

設 B<sub>1</sub> 不碰撞 B<sub>2</sub> 時之落地時距為 t'<sub>1</sub>。

$B_2$  被碰撞  $B_2$  後之落地時距為  $t'_2$

$B_2$  被碰撞後之落地時距為  $t_2$

(a) 當  $t_{\lambda}' > t_{\lambda_0}$  時

此時  $B_{\lambda}$  受到一向上之衝量，而  $B_2$  受到一向下之衝量，因而得其垂直位移與時間之關係如下：

(b) 當  $t_{\lambda}' < t_{\lambda_0}$  時

此時  $B_{\lambda}$  受到一向下之衝量， $B_2$  受到一向上之衝量。

(c) 當  $t_{\lambda}' = t_{\lambda_0}$  時

此時無碰撞之  $B_{\lambda}$  軌跡和撞後之  $B_{\lambda}$  相同。 $B_2$  之軌跡和水平拋射一樣。

3. 發生碰撞後兩球於空間之運行軌跡：

4. 誤差發生之原因：

(a) 球之滾動動量未併入計算。

(b) 電磁鐵磁力消失而未碰撞前，球可能已稍下落而得一初速度。

(c) 兩次從發射台滾下之球速度稍有變化。

(d) 重力加速度經測定為  $960 \text{ cm/sec}^2$ ，稍有出入。

(e) 計時器兩打點間時距是取平均值。

5. 碰撞兩球皆具初速時：

利用兩發射台，調整其位置，高度使兩球滑下後可發生碰撞，其餘步驟同靶球靜止時。此時誤差會增大，這是因為撞前速度是取平均值。

3. 三球碰撞：

綜合前面兩種，即兩球具初速，一球靜止。此時須假設三球間之碰撞同時發生，故誤差增大。

捌、結論：

三度空間之彈性碰撞，經此一番實驗討論之後，已可見其大概。此實驗裝置簡單，且誤差的範圍，在目前高中是可容許的，故實驗適合高中生使用。

## 裝置改進過程

一、此裝置的主要部分有三：一為靶球固定器，二為“計時開始”之儀器，三為底板。

### 1. 靶球固定器：

起初是想以細絲擊於靶球之上，而此絲通過一似斷頭台之儀器固定之，並使入射球碰及靶球與切斷此細絲的動作“同時發生”後因無法使其“同時”發生，乃易以鐵釘代之，即將細絲掛於釘之尖端以“碰”及“切”之二動作同時發生，但如此一來，誤差增加，故又代以電磁鐵即於細絲之另一端上一小鐵片，吸附電磁鐵上，並把電源開關置於碰撞點，如此求得二動作之同時發生並可減少誤差。

### 2. “計時開始”：

此處之作用乃為找一適當之時機開始計時：

#### a. 此時機為入射球放手之一剎那時：

原先欲以一輔助球測得基本時間，再配上底板所得之  $\Delta t$ （此點詳見於“肆”實驗裝置），則可求得時距，因此實驗手續太繁雜且不易控制，所以改成測出入射球自放手到碰撞及自放手到落地，再加上  $\Delta t$ ，可知時距，又因誤差很大，所以把計時開始之時機改為碰撞之時。

#### b. 碰撞之時機：

把計時器之開關亦置於碰撞點，即使“碰”、“切”、“計時”三者同時發生。

### 3. 底板：

此處功用為計下計時器之終點和量得位移（位移的測量不須修改）。起先是以彈簧掛住底板，在底板上釘一鐵釘，將通過計時器之紙條置於釘之下方，當球落於木板上之時，木板在下，壓釘亦在紙帶上留一痕跡，則可知時間之終點，然而此裝置不甚靈敏，所以改成把一枝筆綁在底板之一側，使底板震動之波紋畫在寬紙帶上，再以波之性質來測知時距，因底板太大且不夠硬，所以波型很複雜，不易得知球何時落地，而我們所須要波只是在球落下之一瞬間時所劃上的，故加以限制木板之震動，不使其任意的運動則可判斷出確切之時刻。