

彈性碰撞之模擬實驗

高中組物理第二名

省立基隆高級中學

製作學生：丁兆明 張錦波 華鵬瀛

指導老師：黃勝德 任 滙

一、動機：

於高中物理實驗(PSSC力學實驗10)“二度空間碰撞”中，利用物體水平拋射運動之水平位位移以測其水平速度，進而說明兩鋼球於不受外力作用下，碰撞前後之總動量守恆。此實驗對速度之測量及實驗結果之表示，應有良好之效果，惟以實驗儀器之設計太過粗略，因此，對兩物體碰撞後之動量及動能無法作更進一步之探討。

(1)“二度空間碰撞”實驗概述：

①儀器及裝置：入射球軌道、靶球位置、鋼球、白報紙。

②步驟：置靶球於支架上，使入射球自一定高度自由釋放，記錄靶球正下方位置及碰撞後兩球落點，另使入射球於不碰撞情形自軌道滑下，記錄其落地位置。

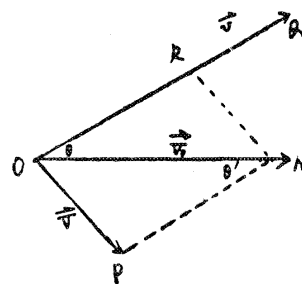
③實驗結果：

(I)若碰撞前後總動量守恆：

$$M\vec{V}_0 = M\vec{V} + m\vec{v} \text{ 或 } \vec{V}_0 = \vec{V} + \frac{m}{M}\vec{v}$$

三向量 $\vec{V}_0$ 、 $\vec{V}$ 及 $\frac{m}{M}\vec{v}$ 應恰

為三角形三邊，即記錄上



□OPAR恰可為一平行四邊形。(其中 $\vec{OR} = \frac{m}{M}\vec{OQ}$)

(II) 觀察OR及PA是否平行 (θ 與 θ' 是否相等), 與OR及PA是否相等 (OQ與PA之比值是否為M/m)可說明實驗之結果。

(2) “二度空間碰撞” 實驗缺點：

① 靶球位置設計欠佳：

(I) 靶球之支架過短，則入射球碰撞後可能仍在軌道末端運動；若靶球之支架過長，則又可能受支架之影響。

(II) 靶球之支架無法作大角度調整，因此兩球之碰撞方向將受限制。

② 欲準確測量入射球碰撞前後之速度，應決定碰撞時入射球位置 (O') 而不應測量靶球位置 (O)。

針對上述缺點，今設計一電磁開關，改使靶球受線圈磁力吸引，於入射球達軌道末端時觸及開關，切斷電流，使靶球落下，而兩球於同一高度碰撞，希望由此得一較佳結果以深入研討碰撞前後之動量及動能。

二、目的：

研究兩鋼球於不受外力下作彈性碰撞之動量與動能。

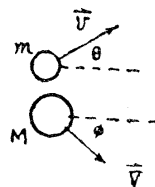
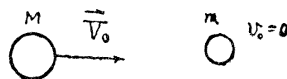
三、原理：

(1) 兩球於不受外力作用下，碰撞前後總動量守恆，又若為彈性碰撞，則碰撞前後總動能相同。

$$M \vec{V}_0 = M \vec{V} + m \vec{v} :$$

$$\begin{cases} MV_0 = MV \cos \phi + m v \cos \theta \dots\dots\dots(1) \\ 0 = MV \sin \phi - m v \sin \theta \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} M V_0^2 = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m v^2 \dots\dots\dots(3)$$



由(1),(2),(3)可得：

①碰撞後速度：

$$V = \sqrt{(M+m)^2 - 4Mm\cos\theta} \frac{V_0}{M+m},$$

$$v = \frac{2M}{M+m} V_0 \cos\theta \quad (\text{式A})$$

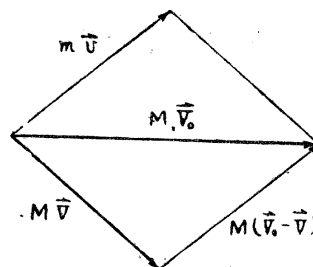
②入射球散射角。

$$\phi = \sin^{-1} \frac{m \sin 2\theta}{\sqrt{(M+m)^2 - 4Mm\cos\theta}} \quad (\text{式B})$$

③圖示應得：

(I)總動量守恆：將動量 $M\vec{V}_0$ 、 $M\vec{V}$ 及 $m\vec{v}$ 之始點重合成一平行四邊形。

$$\theta = \theta' \text{ 且 } m\vec{v} = M(\vec{V}_0 - \vec{V})$$



(II)總動能相同：由上式(3)作碰撞後兩球速度 $V - v$ 關係圖應為橢圓之一部份。

(III)綜合總動量與總動能之結果：將碰撞後兩球速度——作為角度 θ 之極座標函數圖形應得一圓(式A)。

④特例：若為質量相等兩球之碰撞，則速度 $\vec{V}_0$ 、 $\vec{V}$ 及 $\vec{v}$ 應圍成一直角三角形，且速度 $V - v$ 關係圖則成圓之一部份。

(2)線圈中通有電流時產生磁場可吸引鋼球，電流切斷則磁場消失而鋼球不受磁力作用。

(3)兩鋼球自同一高度處，入射球作水平拋射，而靶球同時自由落下，於同一水平面上碰撞：

①碰撞前，兩球於鉛直方向運動情形完全相同，碰撞開始時兩球鉛直方向速度相同。

②若碰撞時兩鋼球之球心恰在同一水平面上，則兩球間之相互作用力(沿連心線方向)必在水平方向，而鉛直方向分別受重力作用。

(I) 水平方向 (不受外力) 動量守恆：

$$M\vec{V}_0 = M\vec{V} + m\vec{v} \dots\dots\dots(4)$$

(II) 相互作用力不作功機械能守恆：

(a) 若於碰撞過程中兩球各於鉛直方向落下 h 之高度，
則由等加速度運動：

$$V_y^2 = V_y'^2 + 2gh \quad (g \text{ 表重力加速度}) \dots(5)$$

(b) 機械能守恆：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}M(V_0^2 + V_y^2) + Mgh + \frac{1}{2}mV_y'^2 + mgh \\ &= \frac{1}{2}M(V^2 + V_y'^2) + \frac{1}{2}m(v^2 + V_y'^2) \\ & \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{由(5), (6)得: } & \frac{1}{2}MV_0^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\ & \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

由(4), (7)及上述(1), (2), (3) 可知此碰撞與鉛直方向運動無關，
故仍可得原理(1)中各結果。

③兩鋼球於碰撞前後之任何時刻，球心皆在同一高度上，故自
碰撞時迄達地面止之水平位移可表示碰撞後兩球之速度 $\vec{V}$ 及
 $\vec{v}$ ；而入射球未碰撞靶球以相同速度作水平拋射，自碰撞位
置迄達地面止之水平位移，可表示碰撞前入射球之速度 $\vec{V}_0$ 。
，而靶球碰撞前之速度則視為零。

四、儀器及裝置：

(1)儀器：鋼球、軌道、開關、線圈、線圈支架、白報紙、電池、
電流計、可變電阻。

(2)裝置：

①於軌道末端分別裝置兩電源開關，於入射球沿軌道滑下時，
恰可觸及開關於球側（開關A）及球頂（開關B）而截斷電
流。

- ②調整軌道使軌道末端恰成水平，固定線圈於支架上成鉛直。
- ③使線圈支架可繞一鉛直軸旋轉，而軸恰在入射球（未碰撞靶球）作水平拋射運動之路徑中某點之鉛直線上，且軸與線圈之距離恰為兩球半徑之和。
- ④調整線圈高度，使線圈吸引靶球後，入射球於軌道末端時兩球球心恰於同一水平面上。

五、步驟：

- (1)將入射球自一定高度之軌道上自由釋放，記錄觸及開關後作水平拋射之落點A。
- (2)校準線圈高度及線圈支架旋轉軸之位置，並記錄軸於記錄紙上之射影O'。
- (3)將靶球吸於線圈下端，使入射球自軌道上與(1)相同位置釋放，記錄碰撞後兩球之落點P及Q。
- (4)作 $\overrightarrow{O'A}$ 、 $\overrightarrow{O'P}$ 及 $\overrightarrow{O'Q}$ 各向量，並測其長度（即 V_0 、 V 及 v ）並測量 $\overrightarrow{O'A}$ 與 $\overrightarrow{O'P}$ 及 $\overrightarrow{O'Q}$ 之夾角（即 ϕ 及 θ ），及 $\overrightarrow{AO'}$ 與 $\overrightarrow{AP}$ 之夾角（即 θ' ）。
- (5)改換電路上電流之方向，改變靶球位置（旋轉線圈支架），使入射球自高度相同處釋放而碰撞。
- (6)改換電磁開關及靶球，重覆上述實驗。
- (7)作角度 $\theta' - \theta$ 關係圖，長度 $|\overrightarrow{V_0} - \overrightarrow{V}| - v$ 關係圖及碰撞後速度 $V - v$ 關係圖。（等質量碰撞時另作角度 $(\theta + \phi) - \theta$ 關係圖）。

六、實驗記錄（略）。

七、實驗結果（略）。

八、討論：

- (1)於全部實驗中，對於鋼球運動時所受之空氣阻力，及兩鋼球是否確為完全彈性碰撞，無法完全確定。是以所有結果僅能在不

考慮此二因素下於儘可能精確操作時將所得各結果與理想情形加以比較。

(2)於儀器裝置時曾注意下列諸事項：

- ①入射球之軌道末端成水平，使入射球射出時作水平拋射。
- ②入射球釋放位置每次必須在同一點，爲求精確，於入射球釋放位置另裝一線圈吸引入射球，釋放時打開開關而不直接以手放球，則入射球各次作水平拋射時之水平速度 V 。可維持相同。
- ③爲確定入射球接觸電磁開關時是否受開關影響，設計兩種不同之開關，使入射球觸及開關時分別於球側及球頂。
- ④每次碰撞前改變線圈中電流之方向，以免鐵心被磁化而致靶球不能同時落下。
- ⑤爲確定碰撞前球心恰於同一水平面上，實驗時曾利用下列諸不同方法，準確調整線圈位置使靶球被吸引時與入射球於軌道末端時，兩球恰在同一水平面上：
 - ①利用直尺及水平儀校準。
 - ②利用望遠鏡自側面觀察。
 - ③於碰撞時（等質量情況下），兩球是否同時觸及地面。
 - ④每次實驗前，利用閃光攝影分別自側面及正面拍攝。
- (4)爲研討靶球落下及電流截斷是否同時，以致兩球是否恰於同一水平面上發生碰撞，今改變線圈中電流爲3安培，且調整線圈位置爲距離軌道末端30cm。
 - ①電流與距離之影響：
 - (I)電流愈大時磁場愈強，靶球所受磁力愈大，故靶球落下時若有時間延後，則電流大時延後時間應較長。
 - (II)若有時間延後，距離遠時，碰撞位置較低，兩球心於碰撞時高度差必較顯著。

$$\text{入射球落下： } H = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\text{靶球落下： } h = -\frac{1}{2}g(t - \Delta t)^2$$

$$\text{球心高度差： } H - h = -\frac{1}{2}gt^2 + gt\Delta t$$

又 $\Delta t \ll t$ ，且距離 $D \propto t$ ，故距離 D 較大時，高度差 $H - h$ 亦較大。

②實驗結果顯示，電流大距離遠，與電流小距離近之時，總動量與總動能之情形有極小不同，大致仍無顯著差異。

由上述結果，可表示時間之延後可予忽略。

(5)碰撞前後入射球之速度，皆以線圈支架旋轉之位置 O' 為始點，入射球之落點為終點之向量表示。為作圖方便，記錄紙上靶球碰撞後之速度，亦以 O' 為始點，故終點應為 Q' 而非 Q 。

(QQ' 之距離為兩球半徑和)。

(6)於實驗時皆忽略兩鋼球於“碰撞過程”中之運動，僅以碰撞開始(兩球接觸瞬時)時之位置及落地位置之水平位移表示速度：

①測量所得之碰撞後速度與實際速度略有差異。

(I)於記錄上所得各速度之大小皆較實際略小，且所測得入射球之散射角 $\phi \approx$ 理論值。

(II)接近正向碰撞部分(θ 較小處)，速度碰撞過程歷時較長，差異亦較大。

②欲消除此差異可於實驗一次後，將軌道與記錄紙間鉛直距離改變，重覆實驗於同一記錄紙上，而以對應之兩次落地點間距離表示速度。

(7)於質量不同兩鋼球碰撞之記錄上另可測量：

$$\text{①入射角之最大散射角 } \phi_{\max} = \cos^{-1} \sqrt{1 - \left(\frac{m}{M}\right)^2} = 33^\circ$$

(開關 A)， $\phi_{\max} = 30^\circ$ (開關 B)。由上原理中(1),(2),(3)

式中可得 $\phi_{\max} = \cos^{-1} \sqrt{1 - \left(\frac{m}{M}\right)^2} = 31^\circ$ ，由本實驗測

量動量所得 $\frac{m}{M} = \frac{|\vec{V}_0 - \vec{V}|}{v} = \frac{40}{75}$ ，故最大散射角

$$\phi_{\max} = \cos^{-1} \sqrt{1 - \left(\frac{m}{M}\right)^2} = 32^\circ$$

②作碰撞後兩球速度比對於速度夾角 $\left(\frac{v}{V} - (\theta + \phi)\right)$

關係圖：（略）。

(8)以開關B（入射球與開關於球頂接觸）較佳。

①入射球接觸開關A後，速度之方向改變較大。

②入射球接觸開關B後，鋼球之轉動略有減小。

(9)為發現於上述實驗過程中，所測量諸結果之誤差情形，曾擬以閃光攝影自碰撞位置之正下方向上拍攝碰撞前後兩球之運動，希望測得速度 $\vec{V}_0$ 、 $\vec{V}$ 及 $\vec{v}$ 以與上述結果比較，惜因拍攝儀器不佳，由照片中僅可見等質量碰撞時兩球碰撞後約成直角分離，碰撞前之速度無法作準確之測量，故無法比較。

(10)若欲使此實驗有更精確之結果，可將儀器作下列更進一步之改良：

①電磁開關改為一“光電開關”，可精確保入射球射出軌道時之速度與水平方向。

②線圈固定於支架上時，欲使高度之調整更方便，可將線圈纏於鐵質螺絲上，以螺絲調整其高度。

③每次實驗之同時以高速閃光攝影機由側面拍攝碰撞前迄碰撞後之兩球運動，以確保碰撞時兩球心恰於同一水平面上。