彩　色　三　角　形

高中組第二名

省立左營高級中學

製作學生：林信志　林建東

指導老師：李　武　炎

引言：在數學許多部門及定理的證明研究中，排列組合是頗爲有用的如二項式定理，多項式乘法，因式分解集合問題等應用很多，本文謹以一則排列組合問題作爲研究的開端，透過邏輯推演的過程，尋求其存在的道理，並籍遊戲的方式以引導學習的興趣。在文中的證明裏，我們有時常陷於錯誤的推論不自覺，經過無數多次的討論後，纔加以改正，當然所化費的時間與精力很多，但一方面也使我們體會如何才是正確的推證，同時我們也深深感覺到身旁不費心的事物常蘊涵深透的意義，其本身就是研究的好題材。

動機：當我們學得排列組合，在課本上常看到許多類似的問題，算多少個點，多少條直線或多少個三角形的問題，諸如在平面上兩點可決定一直線，三點最多可決定三直線，四點最多可決定六條直線……n個點最多可決定$_nC_a$ 條直線，這些有關的問題在課本或參考書上，可以說是俯拾皆是，在某一本有關組合排列的書中論及兩人畫線的遊戲，題目的意思是說：在平面上有六個點，任三點皆不共線，以兩色連結各點，先畫出同色三角形者爲輸大家覺得好玩，從多次的嘗試中，我們歸納出似乎後畫的人較爲有利，但又說不出什麼道理來，實在是知其然而不知其所以然，所以我們聚集幾個同學利用課餘的時間，從反覆不斷的試驗中，尋出其中存在的道理。

本文：

第一部分：

平面上六點若任三點不共線則我們很容易知道，可以畫出C(6,2)條直線亦即15 條直線我們也可以算出，所決定的三角形有110個（註1）這些問題都難不倒我們，祇要花一點時間算，也就得出來了，但是現在我們所感興趣的祇是以所予六點爲頂點的三角形，我們要問，在這種情形下，如何贏得遊戲，換句話說也就是不讓自己的同色三角形首先出現。

在我們玩了許多次後，我們得一個結論：

最後必定有人會輸，因爲同色三角形一定會出現。

同時我們也懷疑，先畫的人與後畫的人何者較佔便宜？

對於這一點，我們曾經想到採用對稱的畫法，發覺到先畫的人要

比較吃虧，因為後畫的祇要比照先畫的對稱着畫，那麼，先畫的在未形成同色三角形以前，後畫的也是還沒有畫出同色三角形（見圖１）。

我們也畫過(圖２)這一個圖形，可以發現到已經畫了14條線，而還未形成同色三角形，剩下的一條線當然由先畫的人畫，則我們很明顯地看出那剩下的唯一條線是先畫的人的致命傷，因為那條線，無論畫什麼色都可形成同色三角形。

同時，我們也發覺不管怎麼玩，到最後一定可以出現至少兩個同色三角形，這是什麼道理呢？為什麼會有這樣的結果呢？探討之心不禁油然而起，經過多次的相互研討綜合以後，我們得到如下的分析：

假設平面上有六個點Ａ。Ｂ。Ｃ。Ｄ。Ｅ。Ｆ。無任意三點共線者，在無損於普遍性的原則下，我們以Ａ點為基準。

㈠過點Ａ畫五條同色線（在此假設紅線）即AB。AC。AD。AE。AF均為同色，則至少有十條線不可再着紅色（即BC。BD。BE。BF。CD。CE。CF。DE。DF。EF）否則馬上與AB。AC。AD。AE。AF 四紅線中之二線形成一同色三角形（紅色），因此上述十條線均須着藍色如此一來很容易便出現了藍色三角形（圖３）。

㈡過點Ａ畫四條同色線，假設AB。AC。AD。AE 為紅色，則如同 BC。BD。BE。CD。CE。DE 六條線均必須為藍色，但此六藍線自然可形成一藍色三角形（圖４）。

㈢過點Ａ畫三條同色線，假設AB。AC。AD為紅色，則BC。BD。CD必須為藍則△BCD為藍色三角形。（圖５）

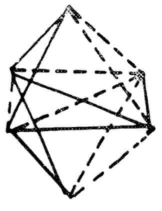


圖1

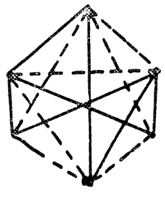


圖2

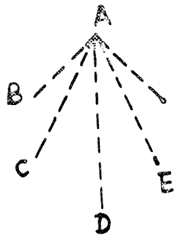


圖3

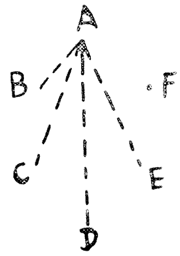


圖4

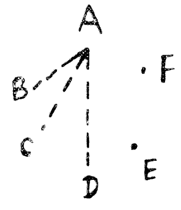


圖5

由上面初步的分析，我們可以下結論說，必可形成一同色三角形，而且由㊀㊁可看出至少形成兩個同色三角形。至於㊂的情形呢？

我們已經知道AB。AC。AD均爲紅線且△BCD 爲一藍色三角形，則AE。AF爲藍色現考慮E。F。如果和E。F 連結的線不止三條同色，則由先前 ㊁已論及所以至多三條同色且此三條須爲紅色（圖 6 ）。

因爲在BE。CE。DE。FE四條中（ AE已爲藍色 ）若再有二條藍線則馬上形成一藍色三角形。（ 圖 7 ）

如BE。CE爲藍則△BCE爲一藍色三角
BE。DE 〃 △BDE 〃
BE。EF 〃 △AEF 〃
CE。DE 〃 △CDE 〃
CE。EF 〃 △AEF 〃
DE。EF 〃 △AEF 〃

現已知BE。CE。DE。FE四條中有三條爲紅色，我們要說必須BE。CE。DE 三條爲紅色 ， 因爲若與E連成三條紅線的點非B。C。D則那三點不就可決定一個同色三角形嗎？且這個三角形不同於△BCD〔理由如下，如同剛才所討論者與一點所連三線同色之其他三點勢必成爲一個同色三角形〕(圖 8)。

故BE。CE。DE爲紅色，同理 BF。CF。DF 亦爲紅線，如果還未形成同色三角形則由A。E。F可得到，因爲 EF 必爲藍線（∵BE。CE。DE。EF中恰有BE。CE。DE三線爲紅色）(圖 9)。

故形成異於△ B C D之同色三角形。

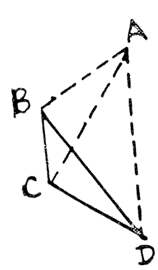


圖 6

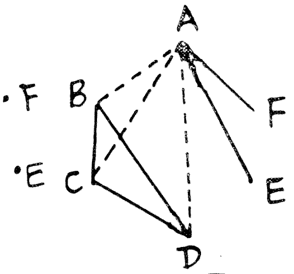


圖 7

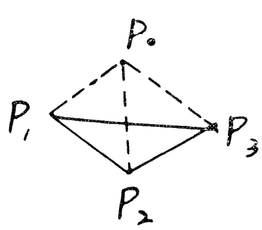


圖 8

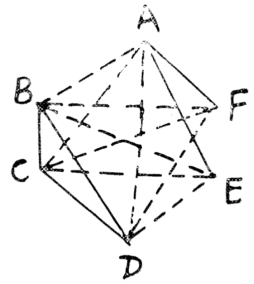


圖 9

由上㊂之分析亦可得到兩個同色三角形的結論，不過連來連去，連得有點迷惘起來，似乎分析得太繁，另外有同學想到利用前面至少可得一同色三角形的結論再予引申，比上㊂之分析稍具簡潔。

由前面的推論，我們已經知道至少可得一同色三角形，我們假定△ＡＢＣ爲一紅色三角形如△ＤＥＦ非同色三角形，則其中至少有一邊爲藍色，我們假定是ＤＥ爲藍色。

如△ＡＤＥ非同色三角形則AD。AE至少有一紅色。

同理如△ＢＤＥ非同色三角形則BD。BE至少有一紅色。

△ＣＤＥ如非同色三角形則CD。CE至少有一爲紅色(圖10)。

因此有下面八種情形（ $2^3=8$ ）

AD。BD。CD爲紅色	考慮三角形	△BCD
AD。BD。CE 〃	〃	△ABD
AD。BE。CD 〃	〃	△ACD
AD。BE。CE 〃	〃	△BCE
AE。BD。CD 〃	〃	△BCD
AE。BD。CE 〃	〃	△ACE
AE。BE。CD 〃	〃	△ABE
AE。BE。CE 〃	〃	△ABE

如此很容易便找到了另一個異於△ＡＢＣ之同色三角形了，經過以上的解剖以後，我們終於把這個小遊戲弄清楚，當然以後再同別人玩遊戲時一定會知趣地禮讓對方先畫，不過我們覺得這個遊戲的意義絕不僅止於此，我們發現平面上六點（任三點不共線）能有這個性質，同時我們也懷疑五點能否有同樣的性質呢？在此我們也找到了一個例子，在這五個點所形成的十條線段中令ＡＢ爲紅、ＡＣ爲紅、ＡＤ爲藍、ＡＥ爲藍、ＢＣ爲藍、ＢＤ爲紅、ＢＥ爲藍、ＣＤ爲藍、ＣＥ爲紅、ＤＥ爲紅，則幷無同色三角形出現，因此６爲使得圖形具有同色三角形之最小點數，這也是數字６的性質，這實在是很奇妙的事（圖11）。

另外，我們特別强調，圖形之出現同色三角形乃指圖形出現

紅色三角形或藍色三角形，此地所言爲"或"并非"且"亦即不一定同時出現紅色及藍色三角形。

"6"不過是一個很單純的數目而已，它給我們的感受祇不過是六點鐘，4枝鉛筆加2枝鉛筆的總數，六個學生，甚至於聯想到週末而已，我們何曾想到6本身存在如此大的道理？

在此我們特別注意可以用其他方式來說明同一原則：

在任何六人之中可能發現三人爲相互熟識者「或」可能發現三人中無兩人爲熟識，祇要把上面兩點所連的線當做此兩點的關係，就可以用圖形來解釋了。

推而廣之我們同時也考慮到七點的情況，如果仍以藍紅兩色連結各點的話，當然也一定會出現至少兩個同色三角形，但我們發覺不祇是兩個甚至於可以出現三個同色三角形，這事實是不難解釋的。

假設A B.C.D.E.F.G 爲平面上七點，無三點共線，則由A.B.C.D.E.F 六點產生至少兩個同色三角形，此兩同色三角形之頂點均爲A.B.C.D.E.F 者，我們假定A爲此兩者之一的一頂點，則由B.C.D.E.F.G 所構成之六點又可找出至少兩個同色三角形，當然這兩個同色三角形異於剛才所取以A爲頂點之三角形，因此 A.B.C.D.E.F.G所形成之七點至少可找出三個同色三角形。

由6點可決定兩個同色三角形推及7點決定三個同色三角形，自然地我們歸納到：n點可決定n－4個同色三角形。

同時，我們也考慮到以更多顏色來畫畫看，則是否也能出現同色三角形？如果要出現同色三角形，至少必須有幾點？我們說：如果以三色來畫，平面上十七點可望出現一同色三角形，同時亦可推廣及4色的情況，66點可望出現一同色三角形。這祇要利用前面所述，平面上六點的性質就可證明。

如果5色時又如何呢？在此我們也歸納出其個數的算式，不過我們以一序列（Sequence）來解釋。

設a n表n色時平面上至少出現一同色三角形之點數則：

$a_2=6$，$a_3=17$，$a_4=66$，$a_5=327$ 。………………

我們可以改寫為：

$a_2 = 6$

$a_3 = 17 = (6-1) \times 3 + 2 = 3(a_2 - 1) + 2$

$a_4 = 66 = (17-1) \times 4 + 2 = 4(a_3 - 1) + 2$

$a_5 = 327 = (66-1) \times 5 + 2 = 5(a_4 - 1) + 2$

……………………………………………………………

則　$a_n = n(a_{n-1} - 1) + 2$　　　　n 3 3

或　$a_n = n a_{n-1} - (n-2)$

最後我們來解一則問題，做為本部分的尾聲。

一宴會中，可能在人羣中發現一組三人，彼此各曾握過手或可能發現一組四人而其中無兩人握過手，則此宴會滿足這種條件之人數最少為9人，亦即若有9人參加的宴會中，就可以找出這種關係，當然比9人更多的羣衆更可以辦到，而少於9人則無此可能。

以下是我們的證明：

這個問題可以仿造上面畫三角形的情形來解釋，現在我們把藍線當做二人曾握過手，而把紅線當做二人未曾握過手，那麼這個問題就變成9為使圖形出現藍色三角形或紅色四邊形之，最小正整數，注意，此處能言之紅色四邊形是指由四點六線段所成之圖形，任兩點所連線段皆為紅色，如圖12：因為前面所言是指一組四人中無「任」兩人曾握過手，所以四點所成之圖形任兩點的連線應為紅色。（註2）

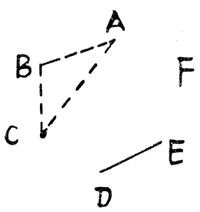


圖 10

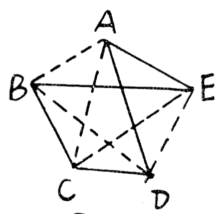


圖 11

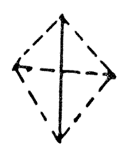


圖 12

首先，我們看平面上九點，若以紅線與藍線連結任意兩點，則是否無論如何一定可出現藍色三角形或紅色四邊形，我們以0。1。2。3。4。5。6。7。8代表平面上的九個點。

這個問題的結論，馬上就可以得到，如果能找到一個點而至少有四條藍線通過此點（因爲可出現紅色四邊形）。

而每一點均通過5條紅線與3條藍線那是不可能的事，因爲3.5.9都是奇數（$5\cdot9=45$，$3\cdot9=27$，45.27均爲奇數不能爲2整除……如果平面上n點每點均通過m條紅線則紅線之個數爲$\dfrac{m\cdot n}{2}$）

因此，我們再考慮如果有一點通過6條紅線，那也是很容易解釋的。

假設通過點0有6條紅線及2條藍線，且假設0與點1.2.3.4.5.6之聯線爲紅線如圖13現在我們單就點1.2.3.4.5.6來考慮，此六點所形成的圖形中一定可以出現一同色三角形如果是藍色三角形則本題已得證，若出現紅色三角形，則此紅色三角形與點0即可形成一紅色四邊形了，例如若由點1.2.3可形成一紅色三角形，則此三點與點0就可形成一紅色四邊形，其中0.1.2.3 任兩點連線均爲紅線，當然在此證明過程中我們仍舊還是應用到"6"的性質。

至於如果有一點通過7條紅線或8條紅線，那更不難瞭解了。因此我們結論說：在平面上九點着以藍紅兩色連結任意兩點則一定可以出現一藍色三角形或紅色四邊形。

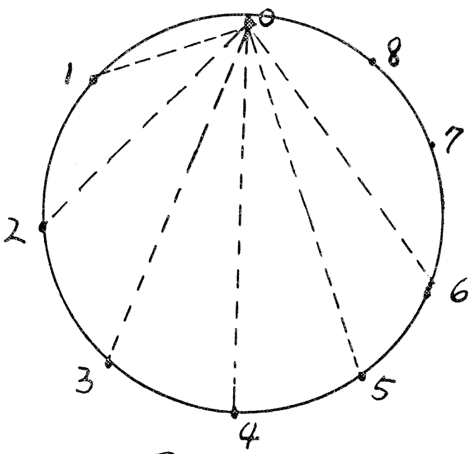


圖 13.

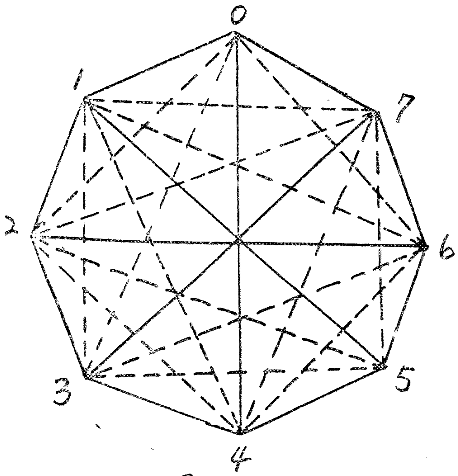


圖 14

另外，8點是否能具有這個性質呢？我們答案是否定，我們

從多次不斷的試驗中發現了一圖形（圖形14），在此圖形中我們找不到一個藍色三角形也找不到一個紅色四邊形，我們試觀底下兩個圖形（圖15、圖16）就很明顯了。

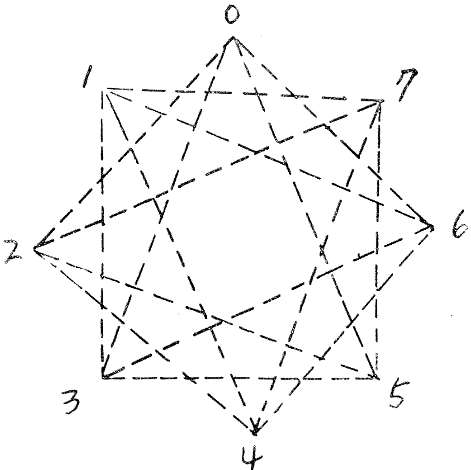


圖 15

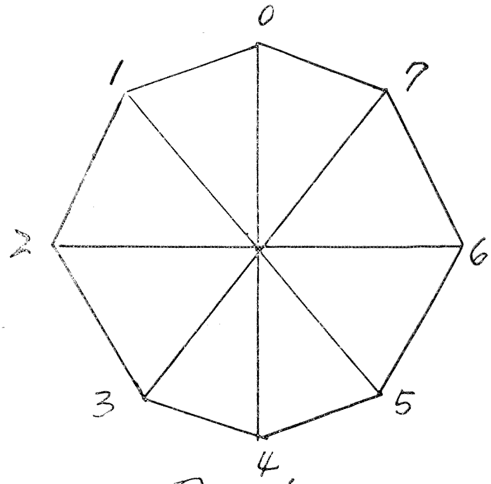


圖 16

圖14分解爲圖15與圖16來看，在圖15中共$\frac{4 \cdot 8}{2}=16$條紅線，且無紅色四邊形。

在圖16中有$4+8=12$條藍線無藍色三角形者。

二者共$16+12=28={}_8C_2$條線卽圖14中線之總數。

我們旣找不出一藍色三角形亦不復找出一紅色四邊形，因此八點不能滿足我們的條件，所以最後，我們的結論是9爲滿足條件之最小整數。

在以上的證明中我們曾經假設把藍線當做二人曾握過手而把紅線當做二人未曾握過手，如果將之交換，變成假設把紅色當做二人曾握過手，而把藍色當二人未曾握過手，那麼問題就變成使圖形出現紅色三角形或藍色四邊形的情形，其實這兩者假設的本質均相同，推論的方法，內容均一樣，祗不過將紅藍互易就可以了。不過我們要强調一點的是，我們的問題，雖然變成出現紅色三角形，或藍色四邊形之情況圖14又好像滿足這條件，其實不然祗要將紅線改爲藍線，藍線改爲紅線，照樣不能滿足我們現在這個條件，因此9仍然是滿足問題中所言條件之最小整數，而事實上，我們把〃一組三人任二人曾握過手〃與〃一組四人無二人握過手〃互易所得的結

果是相同的，祇要這兩件事互斥（如握過手與不曾握過手）在前面提到過相識與陌生兩種性質也是互相排斥的。

第二部分：

在第一部分所給的證明，都曾告以滿足條件之整數，為了求證這些事實，我們曾經下了很多功夫，從不斷反覆的畫圖中尋求其存在的道理，但是並無任何提示告訴我們如何去決定滿足條件的數目字，不過我們在第一部分中的研究已經得到了不少心得，對於數學上的論證，多少有了一些基本的認識，雖然如此仍不能滿足同學們的求知慾，本着鍥而不捨的精神，我們要問是否有一定的規律可尋，本部分就是針對這個問題，做更進一步的探討與研究，在這部分中我們證明了一個式子，用這個式子或許有助於找出滿足條件之整數。但這一部分的研究也並非很完美，因為這一個式子祇不過是提供了一絲線索而已，但至少比大海撈針更為實際一點，由這個式子可以告訴我們這個數字的一個上界，當然有待繼續研究，不過因為時間，課業能力的關係，不得不在此告一段落。

首先我們必須定義幾個符號：

（ p。q。2 ）表最小正整數 n，此 n 點使得平面上出現 A 色的 p 邊多邊形或 B 色的 q 邊多邊形。

………我們假設以 A．B 兩色來連結任二點，此處 A．B 不限紅藍以其他顏色代之均可，但 A．B 兩者互斥（即不同一色） 而最重要的我們必須認清敘述中所指的是〃or〃的情況。（註 3 ）

此處 $p \geqq 2$，$q \geqq 2$ 若 p 為 2 則 p 邊多邊形，變成線段，p 為 3 則為三角形，p 為 4 則為四邊形，所謂 A 色 p 邊多邊形即指由 p 點所成之圖形任二點所連線段均為 A 色。

例如：剛才所求（ 3．3．2 ）＝ 6，（ 3．4．2 ）＝ 9

當然，如果 $N \geqq$（ p．q。2 ）則此 N 點也可以滿足敘述中所言之條件。

由上面的定義，我們歸納出（ p。q。2 ）＝（ q。p。2 ）這祇須將前面所講的 A、B 兩色互調即可看出，如前面我們討

論使圖形出現藍色三角形或紅色四邊形之最小整數爲9同理，使圖形出現紅色三角形或藍色四邊形之最小整數爲9，同時；我們也可以看出（p。2。2）＝p、（2。q。2）＝q、（p。2。2）是一個正整數n使得平面上出現A色的p邊形或一條B色的線段，當然p點可以滿足這個條件，因爲此平面上p點以A、B兩塗之，若有一線段爲B色，則當然滿足上述條件，如果沒有一線段是B色，則所有線段均爲A色，因此p點任兩點間之連線均爲A色，則可得一A色P邊形。P－1個點則無法滿足這個條件，祇要將這些連線均塗以A色則即不可得一A色p邊形（點只有P－1個），更不復得一B色線段，所以P爲滿足所予條件之最小整數

∴（P。2。2）＝P

可理可證：（2。q。2）＝q

另外我們考慮，如果平面上有n個點，現以A、B兩色塗此n個點(可看作一個圈)則不論如何塗法，能否找到p個A色或q個B色點，當然n足夠大時一定可以辦得到我們同樣把滿足此條件的最小正整數用（p。q。1）表之，則（p.q.1）一定是p＋q－1；因爲在此p＋q－1個點中有p個A色點則已，否則最多祇有p－1個A色點，亦即至少有q個B色點〔（p＋q－1）－（p－1）＝q〕則滿足所予條件，p＋q－2個點則無法滿足上述條件，我們祇要將p＋q－2個點分配爲p－1個A色點，q－1個B色點即可。

有了上述的分析以後我們再來看一個式子，這也是本部分所主要研究的重點（註4）

$(p.q.2) \geqq p_1+q_1 \qquad p_1=(p.-1\ q.2)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad q_1=(p.q.-1\ 2)$

有了這個式子以後我們以後求（p。q。2）雖不能馬上就得出，但至少有一上界可做參考，有時很幸運的p_1+q_1就爲（p。q。2）之最小上界即（p。q。2）＝p_1+q_1

如（3.3.2）$\leqq p_1+q_1$

$p_1=(2.3.2)=3 \qquad \therefore (3.3.2) \leqq 3+3=6$

$q_1=(2.3.2)=3$ 　　而事實上，在第一部分已知（

3。3。2 ）＝6。

再如第一部分中最後的一個例子（3．4．2）亦即

（4。3。2）來說（3．4．2）$\leq p_1+q_1$

$p_1=(2.4.2)=4$　　$\therefore(3.4.2)\leq 4+6$

$p_1=(3.3.2)=6$　　即（3。4．2）≤ 10而

事實上（3。4．2）＝9

雖然 p_1+q_1 不一定即是（p。q。2）但至少可給我們一點資料參考而不至於無所措手，雖不中亦不遠矣！

又如隨便舉一個例子（4。4。2）$\leq p_1+q_1$

此地　$p_1=(3.4.2)=9$

$q_1=(4.3.2)=9$

$\therefore(4.4.2)\leq 18$

說明了上面的例子後我們該回到（p．q。2）$\leq p_1+p_1$ 這個式子的證明，這個式子的證明較爲特殊，這個證明也是從前面的分析心得中得來的。

證明：

上式即證明在平面 p_1+q_1 個點，若以 A．B 兩色連結兩點，則可出現一A色P邊形或一B色q邊多邊形，試選定一特殊點 P_0 重新定義，其他 p_1+q_1-1 個 "點的顏色"。

若x與 p_0 點所連線段爲A色則稱x點爲A色點若x與 p_0 點所連線段爲B色則稱x點爲B色點現考慮除點 p_0 以外之 p_1+q_1-1 個點：

因（p。q．1）$=p_1+q_1-1$

所以根據定義這些點中包含有 p_1 個A色點或 q_1 個B色點。

（I）若包含有 p_1 個A色點（即此 p_1 個點與p所連線段均爲A色）

首先我們看 $p_1=(p-1.q.2)$

所以此 p_1 個點可能形成一A色 $p-1$ 邊多邊形或B色q邊多邊形。

若屬後者則得證。

若出現一A色 $p-1$ 邊多邊形則此 $p-1$ 個點與點 p_0 形成一A色 p 邊多邊形。

(Ⅱ)若包含有 q_1 個B色點(即此 q_1 個點與 p_0 所連線段均爲B色)

則因 $q_1=(p.q-1,2)$

故此 q_1 個點亦可能形成一A色 p 邊多邊形或B色 $q-1$ 邊多邊形。

若屬前者則得證。

若出現一B色 $q-1$ 邊多邊形,則此 $q-1$ 個點再與點 p_0 形成一B色 q 邊多邊形。

故不論如何均可能形成一A色 p 邊多邊或B色 q 邊多邊形。

所以 $(p.q.2)\leqq p_1+q_1$

又 $(p_1.q_1.1=p_1+q_1-1$

故上不等式亦可寫爲 $(p.q.2)\leqq(p_1.q_1.1)+1$

此處 $p_1=(p-1.q.2)$

$q_1=(p.q-1.2)$

導後語:

排列組合在中學數學課本中可以說較引人入勝亦常使學生大傷腦筋的一個單元,每年大專聯考數學亦多少以此部分爲命題焦點,甚而競以新奇技巧爲尚,困惑了不少莘莘學子,在目前的教學中,排列組合常被分析爲出題的趨向,坊間所出之有關參考書,更是不勝枚舉,學生孜孜於解題之技巧,以求考試中能猜題命中,愚意以爲某些題目雖然解題之妙,常使人歎爲觀止,但却不是考試的好題材,因爲考試常有時間的限制,有些難題常無法在短時間內想出,有時靈感未屆,也使人徒有望題興歎之感,這些題目雖不適於考學生,但却是"欣賞"的好題材,我們有時評價學生的數學能力,亦應從另一個角度着眼,譬如數學的鑑賞能力,本題材的研究係在此種背景下產生,由於學

生從參考書上所發掘的一則小遊戲而對此題材作一系列的分析研討。

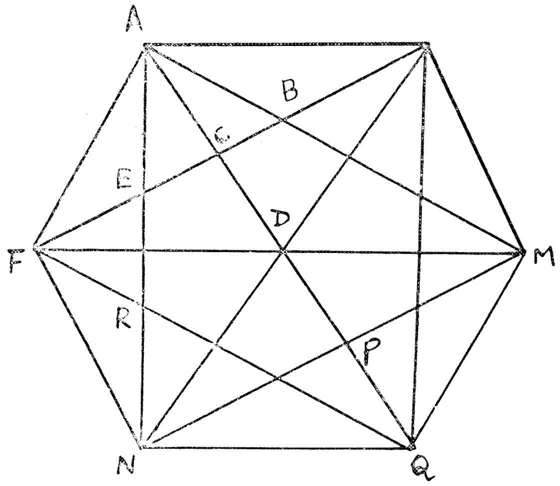
……有關同色三角形（或彩色三角形）之研究實際上已引起學生莫大的興趣，彼且提及以更多顏色塗之狀況以及推廣等，但因高中學生之能力有所不逮，故本文研究的進展僅止於此，但在探討之過程中所帶給我們的意義，則獲益匪淺，雖然這祗是一則小問題由這樣的研究中、無形中可以訓練學生推理想像的能力，養成博徵旁引，兼籌并顧之態度與習慣，對於問題的處理有更系統與正確的判斷，當然本文所作的研究成果有限，尤其是涉及更高深的研究當非高中生能力所能理喻，但如從啓發學生研究數學的興趣，體驗邏輯推理與判斷，欣賞數學美的觀點來看，則就不可同日而語矣，再者，本文之研究循序以進并不須兼備很高深的數學知識做基礎，也因此之故而更能引起一般學生的研究與興趣，實乃本文的另一特色。

在此，我們感歎於時下學生研習之態度，讀書不求甚解，企冀背誦以圖應付考試，實在是數學教育之一大敗筆，如何選擇適當數學題材以引發學生之研究興趣是一件刻不容緩的事。

數學研習之最大成效乃在於啓發學者邏輯思考的能力，以及磨練科學處事的方法，至於平時日常應用諸如裁決事物，判斷問題都可借助數學推理分析的方法，尤其在發掘問題至發現眞理之過程所涉獵之處理方法當爲珍惜可貴，是以我們覺得推動數學教育是教學生"如何去想"而不僅止於如何去做更不是教學生如何去"讀"數學。

過去的教材或教學以訓練解題技巧爲主而不以訓練思考爲教育之方針，是以徒然造成學生專務背誦之能事，以記憶代替瞭解，誠然，學而不思則罔矣，形成教育上的偏差，今後教材之革新以及教學方法之改進當以此鍼砭，使數學教育之理想臻於眞善。

註1：



三角形種類：

		全等形個數	相似形個數
正三角形	①△ABE	6	
60°－60°－60°	②△ADF	6	14
	③△AMN	2	
直角三角形	①△ABC	12	
30°－60°－90°	②△ACF	24	
	③△FBA	12	
	④△ANP	12	
	⑤△ANQ	12	72
鈍角三角形	①△AEF	6	
30°－30°－120°	②△ANF	12	24
	③△AQR	6	
			110 個

註2：　我們剛開始證明這個問題，曾誤把紅色四邊形看做四點四邊所成之四邊形而未考慮其兩條對角線。

在這種情況下我們也證明了，九點所成之圖形一定可以出現藍色三角形或紅色四邊形（未考慮其兩條對角線者）。

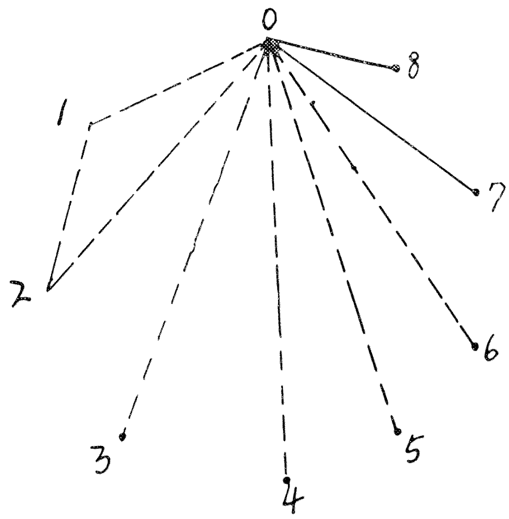
首先我們以0．1．2．3．4．5．6．7．8代表平面上的九個點。

這個問題的結論馬上就可以得到，如果能找到一個點而至少有四條藍線通過此點（Why？）

而每一點都通過 5 條紅線與 3 條藍線，那是不可能的，因爲 3。5。9 均爲奇數（Why？）

而如果有一點通過 6 條紅線（即通過二條藍線）即也是很容易解釋的。

假定通過點 0 有條紅線，2 條藍線，且與 1。2。3。4。5。6 之聯線均爲紅線如圖



現考慮點 1 通過此點至少也有 5 條紅線（∴若至多 4 條紅線，則至少 4 條藍線通過點 1，則當然很容易就出現紅四邊形了）

所以 2。3。4。5。6 至少有二點與點 1 連線爲紅線，假設是點 2 及點 3。

再考慮點 2 在 3。4。5。6 中至少有一點與 2 之連線爲紅線如此紅色四邊形就出現了（譬如假設是 3 與 2 連線爲紅線則 0。1。2。3爲紅色四邊形）

至於如果有一點通過 7 條紅線或 8 條紅線，更是不難瞭解了。

但 9 就非最小整數了，八點所成之圖形就可以出現紅色四邊形（見圖14　四邊形1。3。5。7）

主要的關鍵乃在於紅色四邊形的定義，正確的紅色四邊形應該是包含兩個對角線在內的，雖然以上的證明同四邊形定義的錯誤而無效，但從這些推論中，我們得到很多啓示，而且完成了正確的推論。

註3： 原先我們定義的是：

（p.p.2）表最小正整數n，此n點使得平面上圖形出現藍色p邊多邊形，或紅色q邊多邊形，與原先定義中所差的是藍色改爲A色，紅色改爲B色，使得重新定義後的A.B兩色不加以限制爲A藍與B紅，意思是說A.B以其他黑、白、棕、黃等代替均無不可甚至於將A.B兩色改爲A紅、B藍亦可，對於前者我們若以黑白表A.B色，則祗要把黑當做藍，白當做紅來看，就很容易瞭解，我們最感不妥的卽是將藍、紅兩色對調後的情況，原先（p.q.2）是表出現藍色p邊多邊形或q邊紅色多邊形，是有次序的關係爲了便於說明我們將其改寫爲（p藍、q紅、2）現在我們要問（p藍、q紅、2）是否也可能出現紅色p邊多邊形或藍色q邊多邊形，經過我們的研究討論後兩者是互爲充要的卽：

（藍色p邊多邊形或紅色q邊多邊形）

$\Leftrightarrow$（紅色p邊多邊形或藍色q邊多邊形）

譬如我們在第一部分中圖形出現藍色三角形或紅色四邊形一定也可以保證出現紅色三角形或藍色四邊形，反之亦然，爲了便於證明上列的命題，明瞭起見，我們先以這個例子來說明：

我們假設圖形中（3藍、4紅、2）個點已經使得圖形出現藍色三角形或紅色四邊形，是否保證紅色三角形與藍色四邊形必至少出現其一，如果原先出現的是紅色四邊形則得證（因從這個紅色四邊形中可窺出紅色三角形）問題是很可能出現的是藍色三角形，而沒有出現紅色四邊形，而且也看不到藍色四邊形，但那是不可能的。因爲我們如果將這個圖形藍紅交換畫，因爲剛才的圖形說有藍色三角形（無藍色四邊形）無紅色四邊形（亦看不到紅色三角形）所以重畫後，祗有紅色三角形（無紅色四邊形）亦無藍色三角形。旣無紅色四邊形亦無藍色三角形，豈不與（3藍、4紅、2）的定義矛盾，所以必定出現藍色四邊形或紅色三角形。

同理：在前命題若不出現紅色p邊多邊形且不出現藍色q邊

多邊形，則將此圖形藍紅對調重畫，則所出現的即無藍色 p 邊形，亦不出現紅色 q 邊形這又與（ p 藍 q 紅 2 ）的意義矛盾。由上觀之（ p．q．2 ）定義中的藍紅兩色實無固定限制之必要，故將藍紅以 A、B 代之。

註 4　何以我們會導出此式（ p.q. 2 ）$\leqq p_1 + q_1$

$$p_1 = (\ p-1.q.2\ )$$

$$q_1 = (\ p.q-1.2\ )$$

在第一部分中我們已經知道（ 3.4.2 ）＝9即使圖形出現藍色三角形或紅色四邊形之最小整數。

我們先從六點開始因爲（ 3.3.2 ）＝6因此便會出現藍色三角形或紅色四邊形，是否也出現藍色三角形或紅色四邊形。如果六點所出現的圖形是紅色三角形而無藍色三角形，則我們勢必要增加點數以使得圖形出現紅色四邊形或藍色色三角形，問題是加多少點才夠！當然我們知道加三點就夠了（ 3.4.2＝9 ）即（ 3.4.2 ）＝（ 3.3.2 ）＋3 從這裏我們就想到（ 3.3.2 ）是把（ 3.4.2 ）裏的4減1而如果把（ 3.4.2 ）裏的 3 減 1 呢？即爲（ 2.4.2 ）＝ 4 而 3 ＜ 4

因此我們幾乎已看出一點苗頭，即

（ 3.4.2 ）＝（ 3.3.2 ）＋3＜（ 3.3.2 ）＋（ 2.4.2 ）

是否（ p q 2 ）＜（ p － 1．p．2 ）＋（ p．p － 1．2 ）？

由不斷分析中我們終於發現下面的一個式子

（ p，q，2 ）≦（ p － 1，p 2 ）＋（ p，q － 1，2 ）