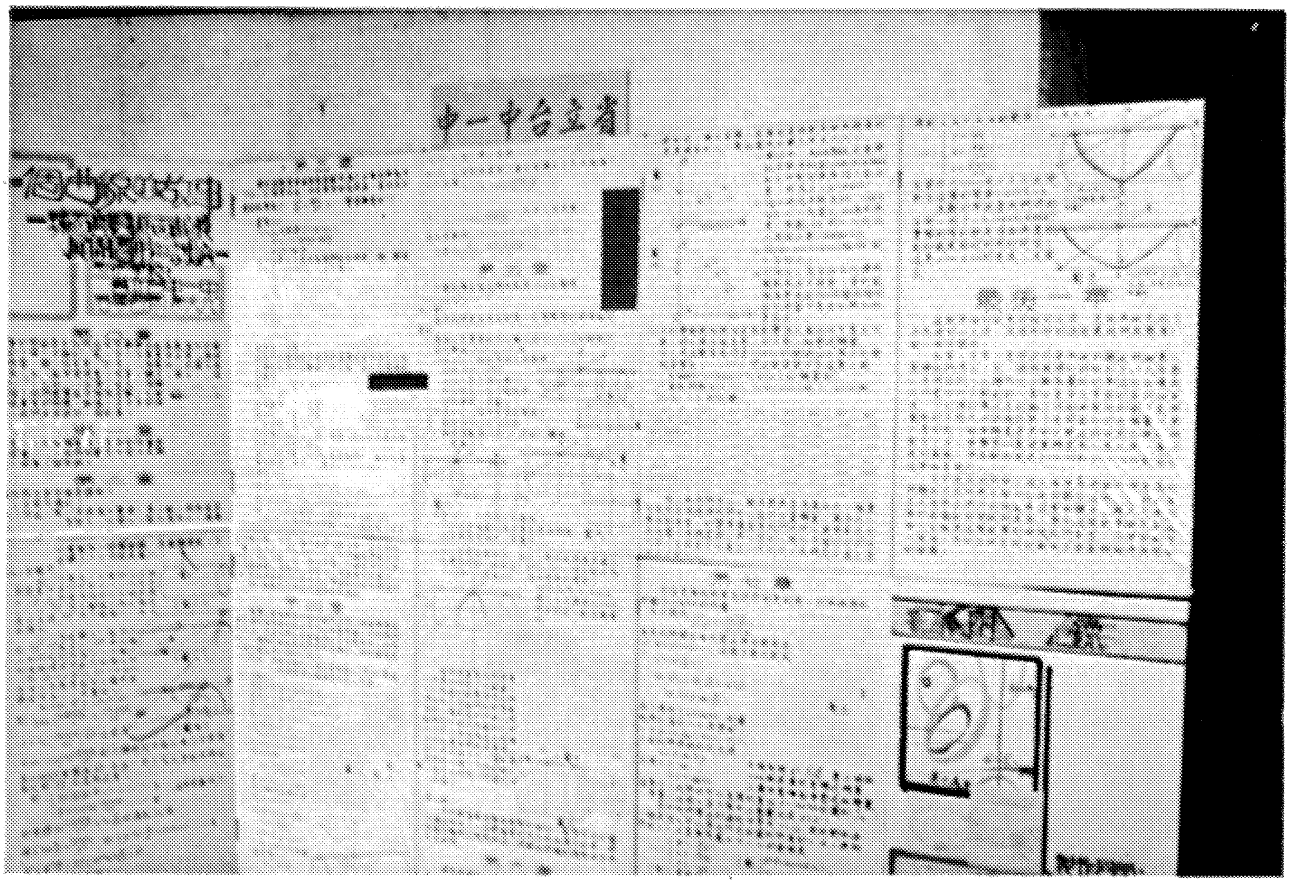
# 一個曲線的故事
# 球面與圓柱面截痕展開圖形的討論

## 高中組第一名

省立台中一中

製作學生：張志清　蔡永東　謝金雲
林玲煥　熊秉綱

指導老師：廖　天　才



## 第〇章

故事的開始是在我們這快快樂樂的班級無數個吵吵鬧鬧的下課十分鐘中的一個。有人手舉圓規高嚷：「圓規作橢圓，賭一場電影！」於是一個聰明人把課本捲起來，在上面用圓規畫一個圓，攤開了課本，「嘿嘿！…………」然而且慢！這是一個橢圓嗎？我們發覺這是個很有趣，可能也很重要的問題，經過了半年多的探討，我們要告訴你一個故事。

## 第一章

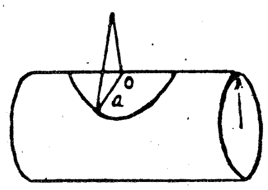
首先，它是一個橢圓嗎？多次的作圖後，我們判斷它可能不是橢圓；那麼，"她"是誰？

## 第二章

讓我們告訴你她是誰吧！

〔方程式導引〕

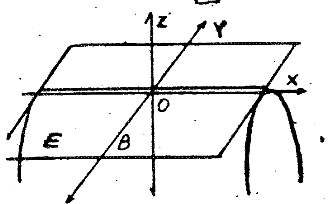
㈠作法：取一個半徑為 r 的圓筒，裹上紙，將圓規取一半徑 a，以筒上一點O為中心，順筒之表面作一封閉曲線，然後攤開紙，她出現了！（作法見圖一）



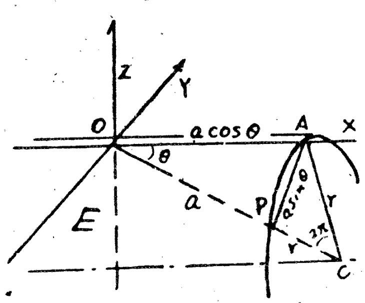

圖一

㈡方程式：

過O作圓筒中心軸的平行線$\overleftrightarrow{OX}$，將圓形展於平面E上，（E是包含$\overleftrightarrow{OX}$且與圓筒相切的平面，見圖二）以$\overleftrightarrow{OX}$為X軸，過O與X軸垂直的直線$\overleftrightarrow{OB}$為Y軸，建立一直角座標系。




圖二




圖三

令p為曲線上一點，自p向$\overleftrightarrow{OX}$作垂線垂足為A，$\overleftrightarrow{Op}$與X軸正向所成的角$\theta$（X軸正向為始邊，逆時針方向為正向，$-2\pi\leq\theta\leq 2\pi$）則$OA=|a\cos\theta|$，$Ap=|a\sin\theta|$，再自A向圓筒的中心軸作垂線，垂足為C〔見圖三〕

在△ApC中，令$\angle ACP=2\alpha$ 則$\sin\alpha=\dfrac{\frac{1}{2}|a\sin\theta|}{r}=\dfrac{|a\sin\theta|}{2r}$

$\alpha=\sin^{-1}\dfrac{|a\sin\theta|}{2r}$ $\overset{\frown}{Ap}$之長為

$\overset{\frown}{Ap}=r(2\alpha)=2r\sin^{-1}\dfrac{|a\sin\theta|}{2r}$ p攤開在平面E後的X座標

為$a\cos\theta$，Y座標則是$\overset{\frown}{Ap}$之長（因$y$有正負，所以我們這裏也將$\overset{\frown}{Ap}$的長取正負）。

即p（$x$，$y$）

$$\begin{cases} x=a\cos\theta & \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ y=\pm 2r\sin^{-1}\dfrac{|a\sin\theta|}{2r} & \cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

由②得$\sin^{-1}\dfrac{|a\sin\theta|}{2r}=\pm\dfrac{y}{2r}$，兩邊取sin值

得 $\pm\sin\dfrac{y}{2r}=\dfrac{|a\sin\theta|}{2r}$，即$\pm 2r\sin\dfrac{y}{2r}=|a\sin\theta|$

$\cdots\cdots\cdots\cdots ③$

$①^2+②^2$得$x^2+4r^2\sin^2\dfrac{y}{2r}=a^2$

這就是她：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{\sin^2\frac{y}{2r}}{\left(\frac{a}{2r}\right)^2}=1$$

## 第三章

現在讓我們來詳細的談談她吧。為了方便，我們取定$r=\frac{1}{2}$（$\frac{1}{2}$

單位長）即定圓筒的直徑為一單位長，化簡，則她變成了：

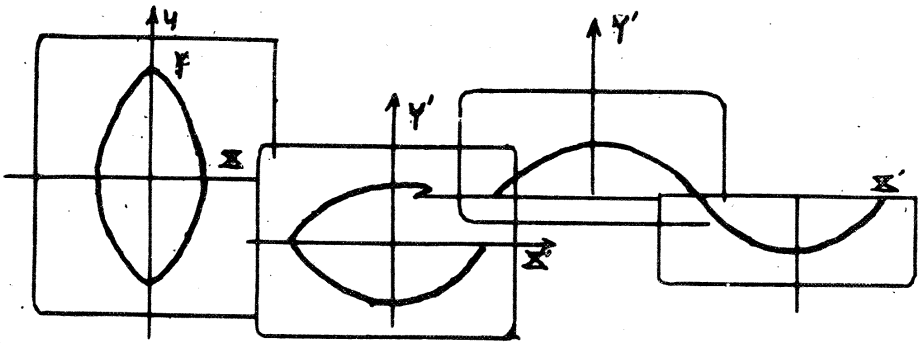
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{\sin^2 y}{a^2}=1\text{（蠻像橢圓的）}$$

(一)當取 $a=1$

代入上式時，得 $x^2+\sin^2 y=1$

$x^2=1-\sin^2 y=\cos^2 y\quad x=\pm\cos y$

此時互換 $x$，$y$，展示在我們眼前的是〃一對〃餘弦函數 $y=\pm\cos x$ 的圓形〔見圖四〕




這表示什麼？

當我們取圓規的半徑等於圓筒的直徑時，可以很正確地直接作出餘弦（正弦）函數半個週期的圖形。

(二)當取 $a<1$（當然 $a>0$）

又 $-1\leq\sin\theta\leq1$

由② $y=\pm\sin^{-1}|a\sin\theta|$（$r$ 已化簡）知 $y$ 的最大（最小）值為 $\pm\sin^{-1}a$，這是圖形的 $y$ 範圍。

若 $a\to0$（事實上即是 $r$ 遠大於 $a$ 時）$y$ 的最大（小）值 $\sin^{-1}a\to a$ 她的圖形極近似一圓（橢圓），這是最初使我們產生錯覺的原因之一。（由(二)(一)和參數式，我們知道若我們把Y軸以 $\pi$ 為單位，將要方便許多）。

(三)當取 $a>1$

由 $x^2+\sin^2 y=a^2\Rightarrow x^2=a^2-\sin^2 y$

因 $-1\leq\sin y\leq1\Rightarrow0\leq\sin^2 y\leq1$

$\Rightarrow \quad a^2 \leq x^2 \leq a^2-1$，所以 $|x|$ 介於 $a$ 與 $\sqrt{a^2-1}$ 之間，即 x 在 $-a$ 與 $-\sqrt{a^2-1}$，$a$ 與 $\sqrt{a^2-1}$ 之間，我們作了一些圖後了解到此時（$a>1$ 時）其圖形理論上成二週期為 $\pi$ 之左右振動曲線，分別位於Y軸兩側上下。無限延伸（有點像正、餘弦曲線的情形，但却不是）——基於理論與實際之間的差異，我們只能作出一個週期的圓形（不過，當然可以把各週期連接而得到理論上的曲線）〔$a>1$ 的曲線見最後附圖〕

(四)前面提到當 $r>>a$ 時，她近似橢圓，對於她和橢圓的那一點點差異，我們留待最後再談。

## 第 四 章

事實上，前面幾章所談的〃她〃是空間一球面與圓柱面截線的展開圖形而且是球心在圓柱面上的特殊情形，在這一章裏我們且來看看球心不在圓柱面上的情形——簡單的說法是我們要把圓規的一〃脚〃提離圓筒 $h$ 高，并導引她的方程式。

(一)作法：

與前法略同，只須在圓筒面上（或內）墊高一物，將圓規之軸脚置於其上作圖。

(二)方程式：

圓筒半徑為 $r$，球半徑為 $a$ 圓柱面R方程式：$y^2+(Z+r)^2=r^2$

球面C方程式：$x^2+y^2+(Z-h)^2=a^2$

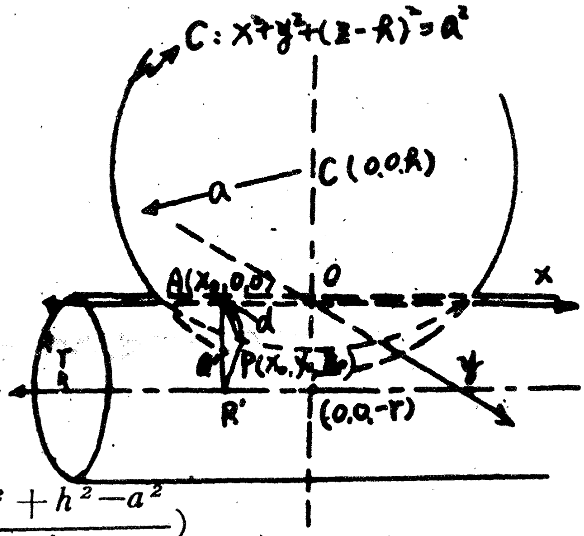
設 $p(x_0, y_0, Z_0) \in R \cap C$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_0{}^2+(Z_0+r)^2=r^2 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④ \\ x_0{}^2+y_0{}^2+(Z_0-h)^2=a^2 & \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

④ $\quad y_0^2+Z_0{}^2=-2Z_0 r \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$

由⑤⑥得

$$Z_o=\frac{x_o^2+h^2-a^2}{2(h+r)}$$




設A＝（ $x_o$，0，0 ）

＝由p向X軸作垂線

之垂足，又

$\angle AR'p=\theta'$

$\Rightarrow pA^2=y_o^2+Z_o^2$

$=-2Z_o r$

$=-2r\left(\frac{x_o^2+h^2-a^2}{Z(h+r)}\right)$

$=r^2+r^2-2r^2\cos\theta'$（在$\triangle AR'p$ 中用餘弦定理）

$=4r^2\sin^2\frac{\theta'}{Z}$

$\Rightarrow\theta'=\pm2\sin^{-1}\sqrt{\frac{a^2-h^2-x_o^2}{4r(h+r)}}$

$\Rightarrow\widehat{Ap}$ 之〃長〃（帶正負號）＝ $r\theta'$

$=\pm2r\sin^{-1}\sqrt{\frac{a^2-h^2-x_o^2}{4r(h+r)}}$，而$\widehat{A}$ p之〃長〃即爲筒

被攤至XY平面後p之Y座標，

$$\Rightarrow p=\left(x_o,\pm2r\sin^{-1}\sqrt{\frac{a^2-h^2-x_o^2}{4,(h+r)}}\right)$$

消去參數得： $x^2+4r(h+r)\sin^2\frac{2y}{2r}=a^2-h^2$

這是她的方程式

$$\frac{x^2}{a^2-h^2}+\frac{\sin^2\frac{y}{2r}}{\frac{a^2-h^2}{4r(h+r)}}=1$$

## 第 五 章

方程式導出後，我們仍取定 $r=\frac{1}{2}$ 化簡，
得 $x^2+(1+2h)\sin^2 y=a^2-h^2$

第一節：

當然，我們首先想到的是一些特殊情形時候她的圖形：

㈠當球心在圓筒的中心軸上，即 $h=-r=-\frac{1}{2}$ 的時候，方程式變成

$x^2=a^2-\frac{1}{4}$ ………………⑦

（Ⅰ）若 $a>\frac{1}{2}$（球的半徑大於筒徑）

由⑦ $\Rightarrow x=\pm\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}$ （$\pm\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}$ 是兩定數）

又 $|y|\leq\frac{\pi}{2}$ （為什麼？）

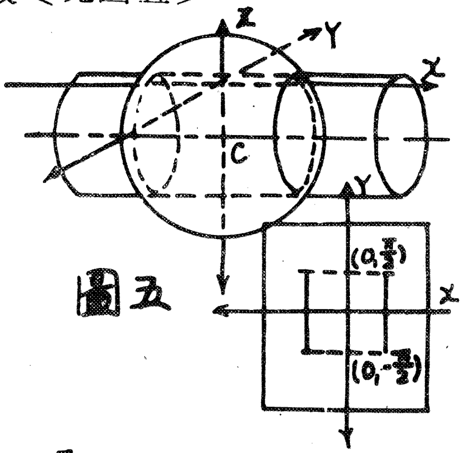
所以她成了在 $y$ 軸兩旁的兩線段〔見圖五〕

（Ⅱ）若 $a=\frac{1}{2}$（球的半徑等於筒徑）

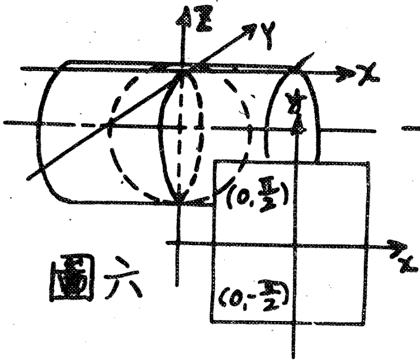
由⑦ $\Rightarrow x=0$

又 $|y|\leq\frac{\pi}{2}$

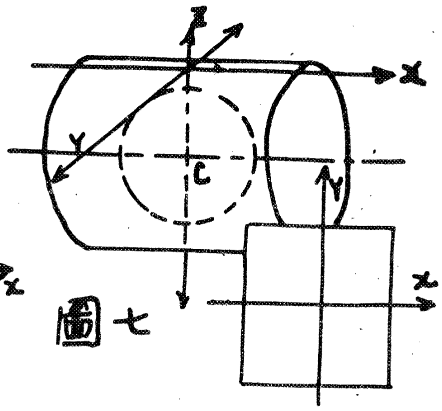
她是頂點為 $(0,\frac{\pi}{2})$，$(0,-\frac{\pi}{2})$ 的一線段〔見圖六〕



圖五



圖六



圖七

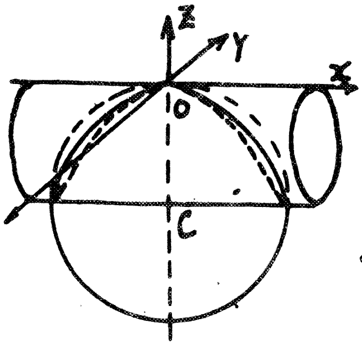
(III) 若 $a<\frac{1}{2}$（球半徑小於筒徑）代入⑦，無解，圖形為空集合，因為球面未與圓筒相交（見圖七）

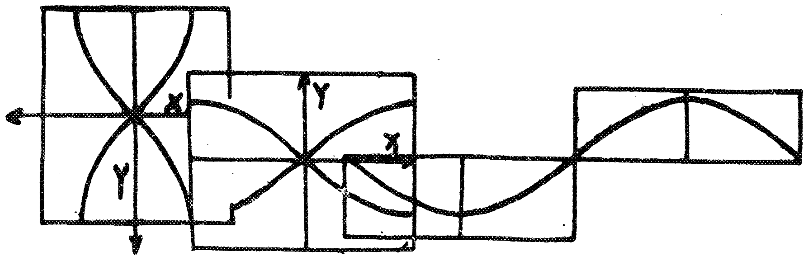
(二)球心在圓柱面的〃另一面〃上（對於我們原先建立座標系的〃那一面〃而言）即 $h=-2r=-1$ 時，方程式為 $x^2-\sin^2 y=a^2-1$

若取 $a=1$〔球半徑等於筒徑〕

$\Rightarrow x^2=\sin^2 y$

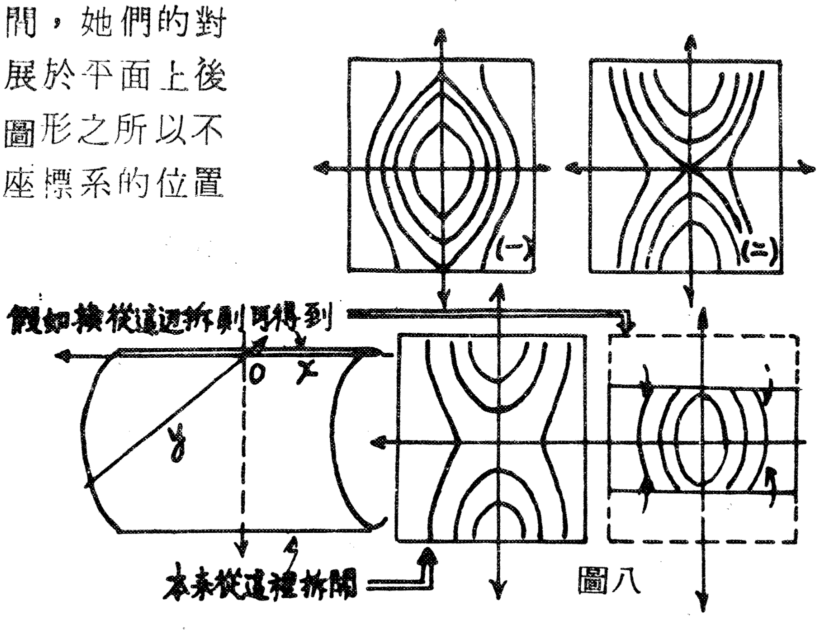
$x=\pm\sin y$，將 $x$，$y$




互換得 $y=\pm\sin x$ 得到的是〃一對〃正弦函數圖形。

這時候該是我們發覺一件事的時候，比較右邊(一)(二)兩圖的對應關係，我們得知，在空間，她們的對應截痕是一樣的，展於平面上後，她們的方程式和圖形之所以不同，只是因為建立座標系的位置和將紙從圓筒上〃拆〃下來的地方不一樣，如果我們把(二)換一下拆的地方，一樣可以得到(一)的圖形〔見圖八〕



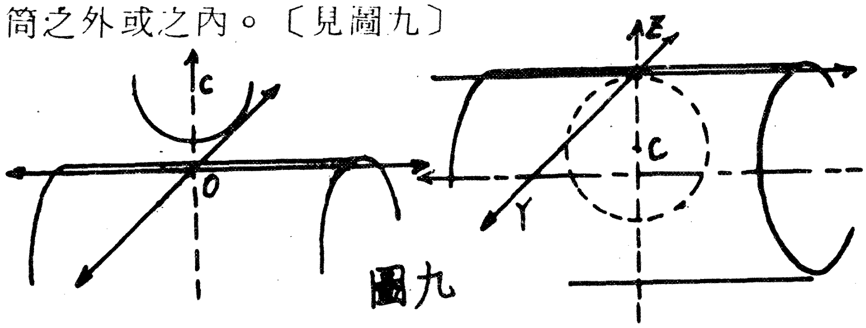

圖八

然而較重要的應該是對於她的一般情形的討論。

第二節：

在這一節裏，我們要討論她的一般情形，對於這一節裏的討論如果能在觀察演算方程式的同時，配以直觀幾何意義的思考，可以使這項討論較容易進行，并且能給你較深的印象。

(一) $1+2h>0$ （即 $h>\frac{1}{2}$ ，也就是球心在圓筒中心軸以上）。
(二) $a^2-h^2<0$ （ $a$ 長小於 $h$ 長）
此時方程式的解集合爲 $\phi$，無圖形。實際情形則是球整個在圓筒之外或之內。〔見圖九〕




圖九

(I) $a^2-h^2>0$，令 $A^2=a^2-h^2$， $B^2=\frac{a^2-h^2}{1+2h}$

($A>0$，$B>0$) 得到 $\frac{x^2}{A^2}+\frac{\sin^2 y}{B^2}=1$

(1)若 $0<a^2-h^2<1+2h$，（即 $0<a^2<(1+h)^2$
見下頁圖十）

由 $\frac{x^2}{A^2}+\frac{\sin^2 y}{B^2}=1$ 之參數式

$$\begin{cases} x=A\cos\phi \\ y=\sin^{-1}(B\sin\phi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -A\leq x\leq A \\ -\sin B\leq y\leq \sin^{-1}B \end{cases} \quad (\pm A，0)(0，\pm\sin^{-1}B)$$

是她的四個頂點

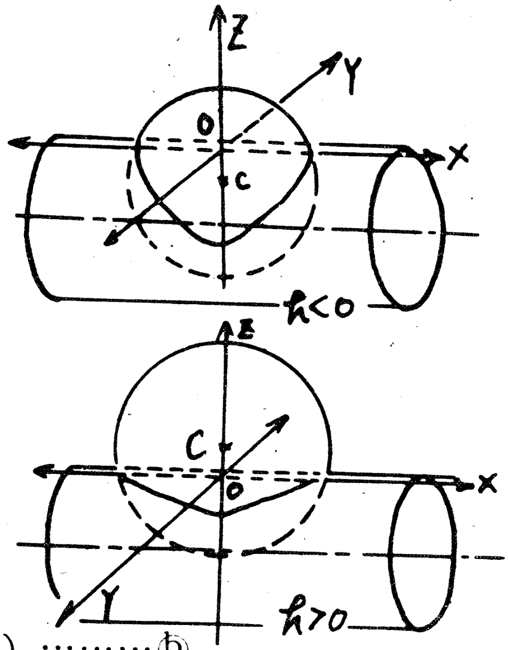
(II)若 $a^2-h^2>1+2h>0$
（即 $a>1+h$）

$$\begin{cases} \frac{x^2}{A^2}=1-\frac{\sin^2 y}{B^2} \\ y=\sin^{-1}(B\sin\phi) \cdots\cdots ⓐ \end{cases}$$

又 $|B\sin\phi|\leq 1$ （反三角定義域限制）

$$\Rightarrow\begin{cases} A^2(1-\dfrac{1}{B^2})\leq x^2\leq A^2 \\ -\dfrac{\pi}{2}\leq y\leq\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\begin{cases} A\sqrt{1-\dfrac{1}{B^2}}\leq x^2\leq A^2 \\ -\dfrac{\pi}{2}\leq y\leq\dfrac{\pi}{2}\end{cases} \\ \begin{cases} -A\leq x\leq(-A\sqrt{1-\dfrac{1}{B^2}}) \quad \cdots\cdots\cdots ⓑ \\ -\dfrac{\pi}{2}\leq y\leq\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\end{array}\right.$$




圖十

因為此時 $B^2=\dfrac{a^2-h^2}{1+2h}>1\Rightarrow B>1$

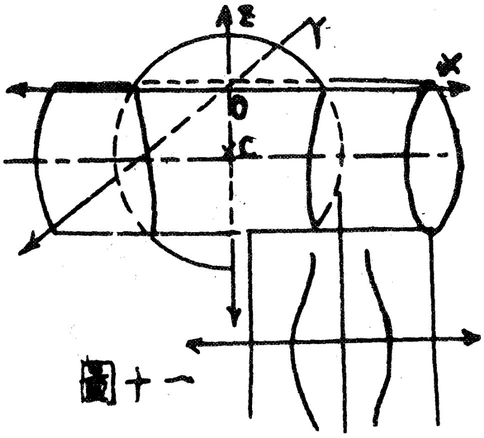
$\therefore$ 在 $y=\pm\dfrac{\pi}{2}$（$|y|$ 的最大值）時 $B\sin\phi=\pm 1$（由ⓐ）

$|\sin\phi|=\dfrac{1}{B}<1$ $\phi$ 角不能〃到達〃$90^\circ$ 與 $270^\circ$ 附近，圖形是不封閉的曲線，由ⓑ得知圖形之X範圍為 $[A\sqrt{1-\frac{1}{B^2}},A]$ 和 $[-A,-A\sqrt{1-\frac{1}{B^2}}]$〔見下頁圖十一〕

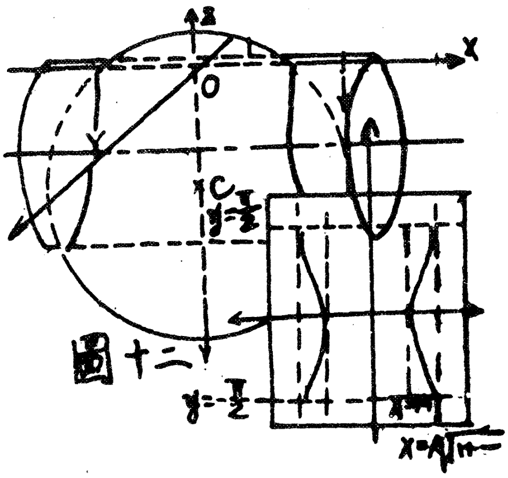
㈢ $1+2h<0$（$h<-\dfrac{1}{2}$） 這就是球心在圓筒軸以下時的情形，此時產生的各種截痕與球心在中心軸以上時的各種截痕對應相同，展開圖形和方程式不同的原因，我們在前面第五章裏討論過。

(I) 若 $a^2-h^2>0$（$a$ 長大於 $h$ 長）令 $A^2=a^2-h^2>0$

$B^2=\dfrac{a^2-h^2}{-(1+2h)}>0$ 原式變為 $\dfrac{x^2}{A^2}-\dfrac{\sin^2 y}{B^2}=1$




圖十一




圖十二

參數式是 $\begin{cases} x = A\sec\phi \\ y = \sin^{-1}(B\tan\phi) \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{A^2} = 1 + \frac{\sin^2 y}{B^2}$$

$|B\tan\phi| \leq 1$（反三角定義域限制）

$$\begin{cases} A^2 \leq x^2 \leq A^2\left(1+\frac{1}{B^2}\right) \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} A \leq X \leq A\sqrt{1+\frac{1}{B^2}} \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \left(-A\sqrt{1+\frac{1}{B^2}}\right) \leq X \leq -A \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{array} \right.$$

〔見圖十二〕

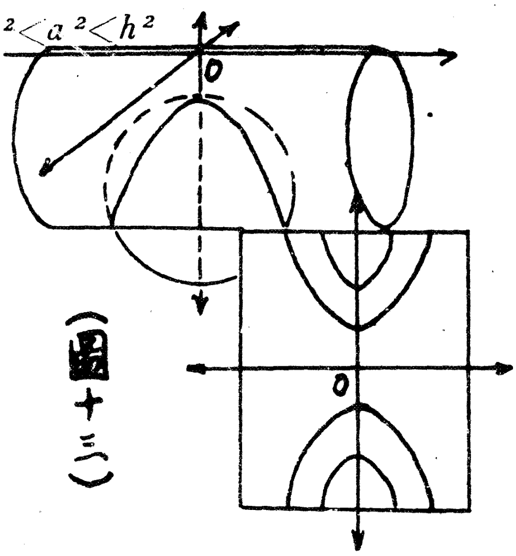
(III) 若 $1+2h < a^2-h^2 < a \Rightarrow (1+h)^2 < a^2 < h^2$

即 $|1+h| < a < |h|$ 〔見圖十三〕

令 $A^2 = 1-(a^2-h^2)$

$$B^2 = \frac{a^2-h^2}{1+2h} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{A^2} - \frac{\sin^2 y}{B^2} = -1$$




（圖十三）

參數式是

$$\begin{cases} x = A\tan\phi \\ y = \sin^{-1}(B\sec\phi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{A^2} = \dfrac{\sin^2 y}{B^2} - 1 = \dfrac{1}{B^2}(\sin^2 y - B^2) \\ \sin^{-1} B \leq |\sin^{-1}(B\sec\phi)| \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

（$\because B \leq |B\sec\phi| \leq 1$ —— 三角，反三角定義域值域）

由參數式 $\Rightarrow \sin^2 y = B^2 \sec^2\phi$

$$\Rightarrow B^2 \leq \sin^2 y \leq 1$$

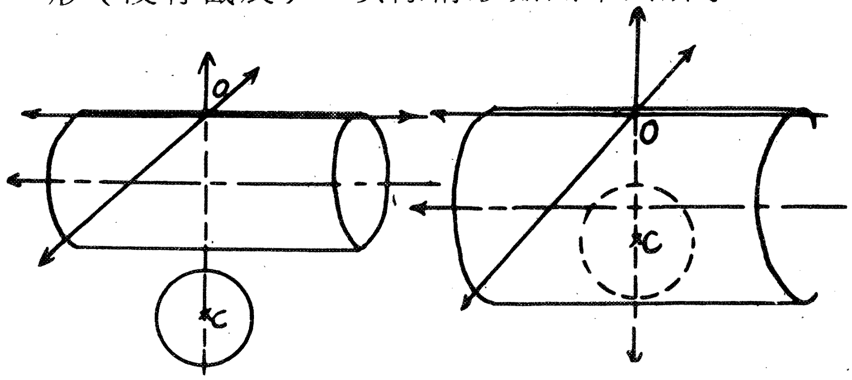
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \leq A^2(\dfrac{1}{B^2} - 1) \\ \sin^{-1} B \leq |y| \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| \leq A\sqrt{\dfrac{1}{B^2} - 1} \\ \sin^{-1} B \leq |y| \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

(V) 若 $a^2 - h^2 < 1 + 2h < 0$ （$|h| > |1+h| > a$）

$$\because B^2 = \frac{a^2 - h^2}{1+2h} > 1$$

由 $\dfrac{x^2}{A^2} = \dfrac{\sin^2 y}{B^2} - 1 = \dfrac{1}{B^2}(\sin^2 y - B^2) < 0$

（因 $\sin^2 y \leq 1$，又 $B^2 > 1$），不合，所以這時沒有圖形（沒有截痕），實際情形如圖十四所示。




(IV) 若 $a^2 - h^2 = 1 + 2h < 0 \Rightarrow a = |1+h| < |h|$

令 $A^2 = h^2 - a^2$，$B^2 = \dfrac{a^2 - h^2}{1+2h} = 1$

得 $\dfrac{x^2}{A^2} - \dfrac{\sin^2 y}{B^2} = -1$

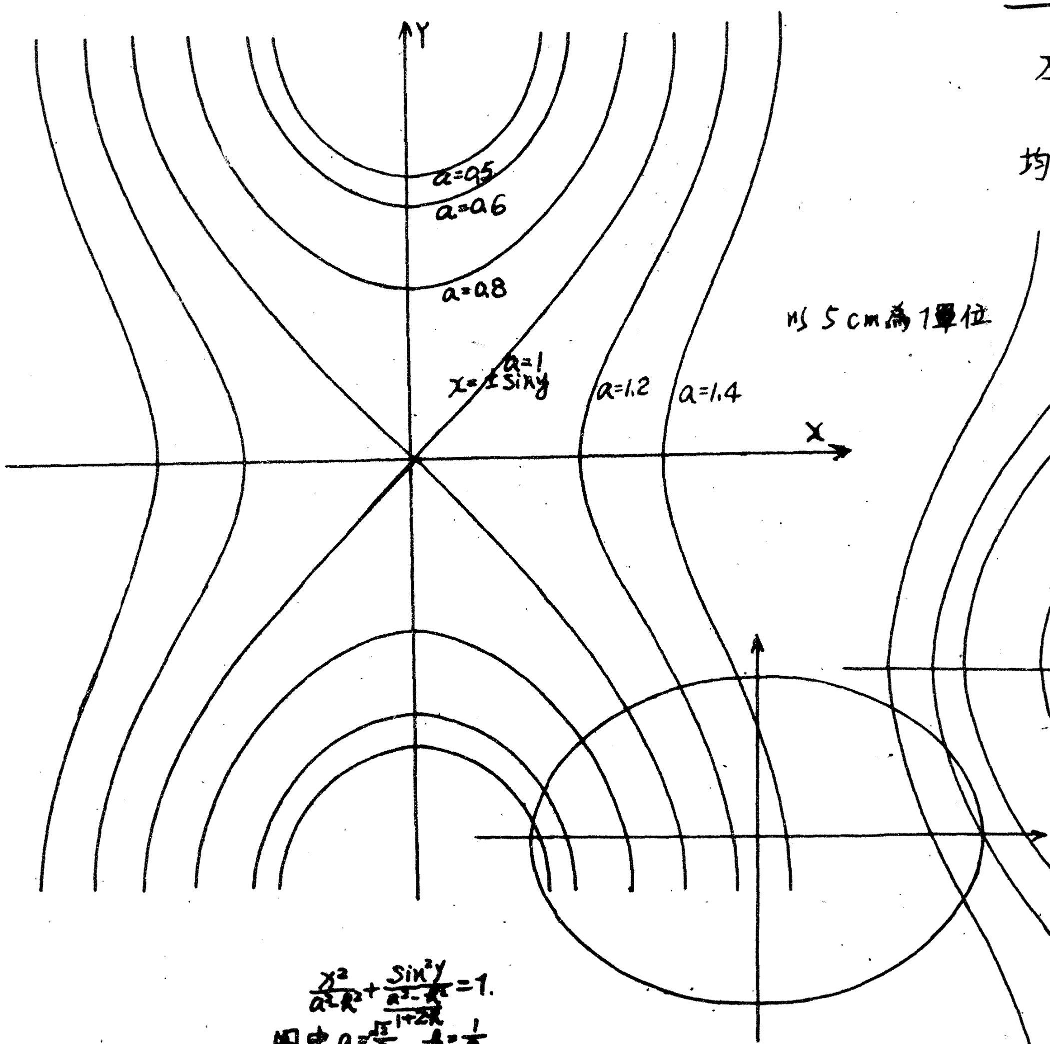
參數式 $\begin{cases} x = A\tan\phi \\ y = \sin^{-1}(B\sec\phi) \end{cases}$ ⓒ

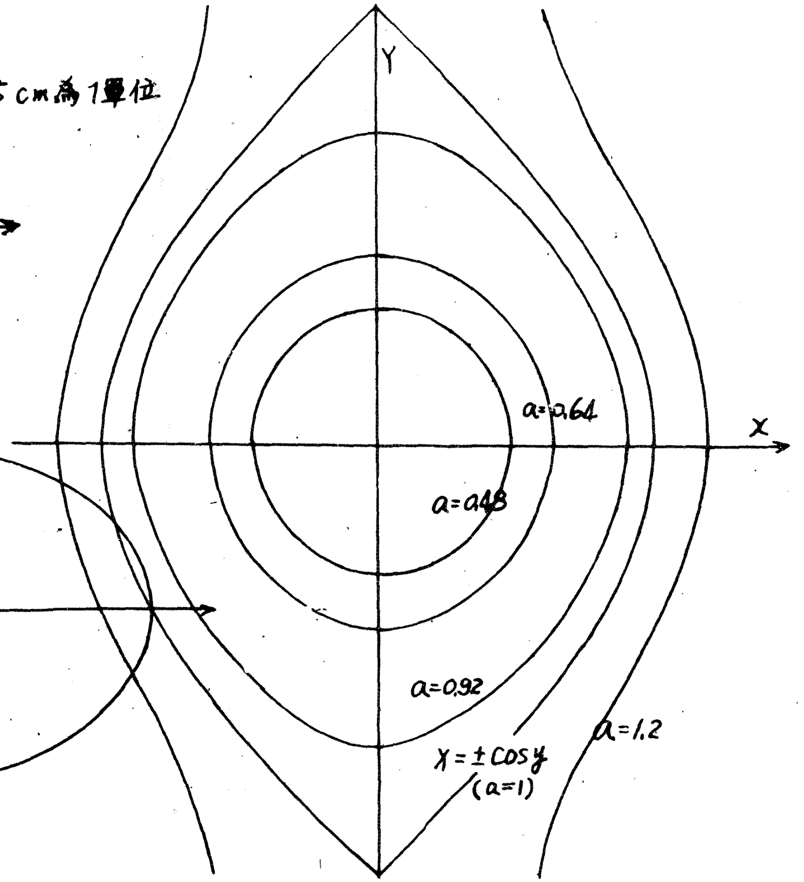
# 一套新的曲線

左邊是 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{\sin^2 y}{a^2}=1$.

右邊是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{\sin^2 y}{a^2}=1$.

均為球面与圓柱面截痕的展開.



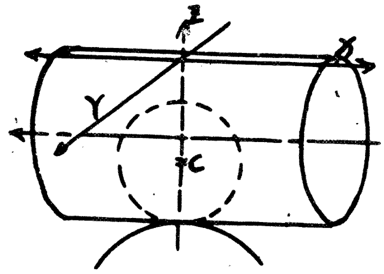




$\frac{x^2}{a^2-k^2}+\frac{\sin^2 y}{\frac{a^2-k^2}{1+2k}}=1.$

圖中 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $k=\frac{1}{3}$

以 8.2cm 為 1

$\because B^2=1$，由ⓒ解得方程式之唯一兩組解（$0$，$\pm\frac{\pi}{2}$），故知此時的圖形是兩點。然而 $a=|1+h|<|h|$ 是球與柱面恰交於一點的條件，也就是說這兩點事實上是同一個點（由兩點的 $y$ 座標差等於圓柱周長 $\pi$ 亦可推得這個事實）從這裏也可體會到我們所討論的〃展開圖形〃與實際情形間的微妙差異。




## 第　六　章

現在我們回到第〇章的問題———她與橢圓的差異。

以四頂點 $(A,0)$，$(-A,0)$，$(0,\sin^{-1}B)$，$(0,-\sin^{-1}B)$之方程式，（$1\geq B>0$，$A>0$）

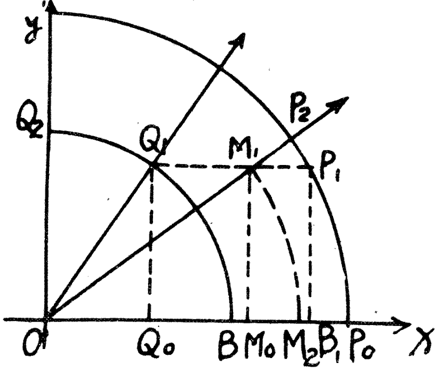
她：$\dfrac{x^2}{A^2}+\dfrac{\sin^2 y}{B^2}=1$　　橢圓：$\dfrac{x^2}{A^2}+\dfrac{y^2}{(\sin^{-1}B)^2}=1$

參數式 $\begin{cases} x_1=A\cos\theta \\ y_1=\sin^{-1}(B\sin\theta) \end{cases}$　　參數式 $\begin{cases} x_2=A\cos\theta \\ y_2=(\sin^{-1}B)\sin\theta \end{cases}$

一對同一個X座標而言，Y座標的差別就是他們兩者的差異對

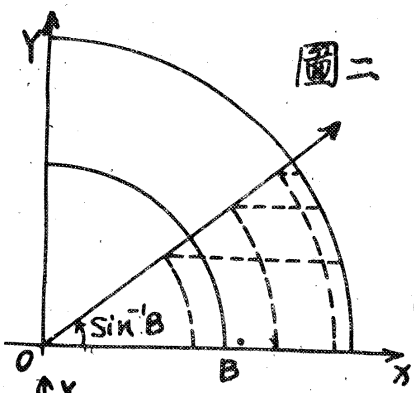
$\sin^{-1}(B\sin^{-1}\theta)$與 $(\sin^{-1}B)\ \sin\theta$ 的比較是我們研究過程中所遇到有趣而且很辣手的問題之一，（雖然由多次作圖中，已知〃她〃是介於橢圓與正圓間的一個曲線）現在我們引入一單位圓來比較

$|\sin^{-1}(B\sin\theta)|$ 與 $|(\sin^{-1}B)\sin\theta|$ 的大小。（你會體會到這個過程非常的奧妙）。




(1)分別以1，B為半徑劃一圓以O為圓心如左圖，過$Q_2$作X軸的平行線交單位圓於$p_2$則$\angle p_0 O p_2=\sin^{-1}B$

(2)作任一 $\theta$ 角，交圓B於$Q_1$，則 $\overline{Q_1Q_0}=B\sin\theta$




圖二

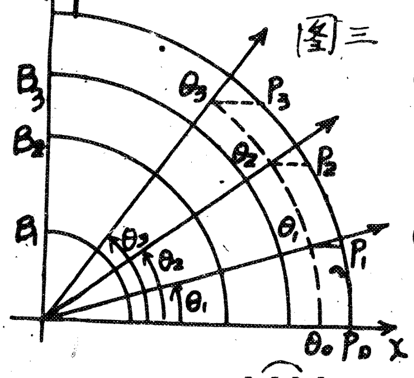
將 $\overline{Q_1Q_0}$ 平移至 $\overline{p_1B_1}$，則

$\angle p_0Op_1 = \sin^{-1}(B\sin\theta)$ 故

$\widehat{p_1p_2}$ 之弧長（含正負）$= y_1 = \sin^{-1}$

$(B\sin\theta)$

(3)以 O 為圓心 $\sin\theta$ 為半徑畫一弧截 $\angle p_0Op_2$ 於 $M_1M_2$ 則 $\widehat{M_1M_2}$ 之長（含正負）$=(\sin^{-1}B)$ $\sin\theta = y_2$




圖三

(4) $M_1M_0 = (\sin\theta)\cdot\sin(\sin^{-1}B)$

$= B\sin\theta = \overline{Q_0Q_1} = \overline{p_1B_1}$

$\Rightarrow M_1$ 剛好落在 $\overline{Q_1p_1}$ 之線段上。

(5)因為同心圓中，兩平行線所截弧長半徑愈小者，所截弧長愈長（此定理可用極限及斜率方法證明，因過於繁雜在此略去）。

所以 $y_2 = \widehat{M_1M_2}$ 之長 $> \widehat{p_1p_2}$ 之長 $= |y_1|$。

$\Rightarrow$ 這表示她的圓形在橢圓之內（除了四個頂點）

(6)從圖(二)中可看出 $|y_1|$ 與 $|y_2|$ 的差很小尤其當 $\sin\theta \longrightarrow 1$，時，兩個弧幾乎重疊。

三、B的變化對 $\sin^{-1}(B\sin\theta)$ 與 $(\sin^{-1}B)\sin\theta$ 的影響。

圖(三)中 $1 > B_3 > B_2 > B_1 > 0$；$\theta_3 = \sin^{-1}B_3$

$\theta_2 = \sin^{-1}B_2$，$\theta_1 = \sin^{-1}B_1$

$y_1 = \sin^{-1}(B_1\sin\theta) = \widehat{p_0p_1}$ 之長，$y'_1 = (\sin^{-1}B_1)\sin\theta = \widehat{Q_0Q_1}$ 之長

$y_2 = \sin^{-1}(B_2\sin\theta) = \widehat{p_0p_2}$ 之長，$y'_2 = (\sin^{-1}B_2)\sin\theta = \widehat{Q_0Q_2}$ 之長

$y_3 = \sin^{-1}(B_3\sin\theta) = \widehat{p_0p_3}$ 之長，$y'_3 = (\sin^{-1}B_3)\sin\theta = \widehat{Q_0Q_3}$ 之長

則 $|y_3 - y'_3| > |y_2 - y'_2| > |y_1 - y'_1|$ 所以B愈小時 $|y - y'|$ 愈小，也就是 $B \rightarrow 0$，$|\sin^{-1}(B\sin\theta) - (\sin^{-1}B)\sin\theta|$ $\rightarrow 0$，由三角函數表知 $0 < B \leq 0.2000$(徑) 時 B 與 $\sin^{-1}B$ 的

差在0~0.001之間，下表是當$B = 0.1011$，$\sin^{-1}B=0.1012$時$\sin^{-1}(B\sin\theta)$與$(\sin^{-1}B)\sin\theta$的比較

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\theta$ | 5° | 10.1° | 15.2° | 19.4° | 28.1° |
| $\sin\theta$ | 0.0872 | 0.1754 | 0.2622 | 0.3322 | 0.4710 |
| $\sin^{-1}(B\sin\theta)$ | 0.0087 | 0.0175 | 0.0262 | 0.0332 | 0.0471 |
| $(\sin^{-1}B)\sin\theta$ | 0.0087 | 0.0175 | 0.0262 | 0.0332 | 0.0471 |
| $\theta$ | 30.4° | 38.9° | 44.3° | 47.1° | 55° |
| $\sin\theta$ | 0.5060 | 0.6280 | 0.6984 | 0.7325 | 0.8191 |
| $\sin^{-1}(B\sin\theta)$ | 0.0506 | 0.0628 | 0.0698 | 0.0732 | 0.0820 |
| $(\sin^{-1}B)\sin\theta$ | 0.0506 | 0.0628 | 0.0698 | 0.0733 | 0.0821 |
| $\theta$ | 60.7° | 73.4° | 77.4° | 83.2° | 87° |
| $\sin\theta$ | 0.8721 | 0.9583 | 0.9759 | 0.9930 | 0.9988 |
| $\sin^{-1}(B\sin\theta)$ | 0.0873 | 0.0960 | 0.0979 | 0.0995 | 0.1010 |
| $(\sin^{-1}B)\sin\theta$ | 0.0874 | 0.0963 | 0.0979 | 0.0996 | 0.1010 |

由上可看出兩者的差距在0 ～ 0.0004 之間，也就是當我們取40公分爲一單位時他們只有0.016公分的誤差，所以我們可以用這個原理達到最初的願望----圓規畫橢圓。

這個畫橢圓儀器的設計和一些非常微妙的計算式我們暫且置而不談〔見附錄〕，讓我們再繼續對她的討論吧。

## 第 七 章

在這一章裏我們將利用她的特殊情形推展出$y=\pm\cos nx$的直接作圖方法。

從一開始我們就一直定$2r=1$來化簡方程式，這使我們差點失去了發現這個〃她〃的機會，經過後來的檢討，我們才注意到了這件

事，讓我們回過頭來細看她吧！

(一)原方程式

$$\frac{x^2}{a^2-h^2}+\frac{\sin^2\frac{y}{2r}}{\frac{a^2-h^2}{4r(r+h)}}=1$$

首先，將分母化簡去掉，即令 $a^2-h^2=4r(r+h)=1$

則方程式就變成了

$$x^2+\sin^2\frac{y}{2r}=1$$

$$\Rightarrow x^2=1-\sin^2\frac{y}{2r}=\cos^2\frac{y}{2r}$$

$$\Rightarrow x=\pm\cos\frac{y}{2r}$$

再令 $n=\frac{1}{2r}$ $(n\in N)$ 代入上式就得 $x=\pm\cos ny$，再將 $x$，$y$ 互換，得到的就是 $y=\pm\cos nx$

這表示了我們也可以〃直接的〃畫出 $y=\cos nx$ 的圖形了，(事實上，這個 n 并不限於正整數，而是 $n\in R^{+}$)。

當我們令 $n=\frac{1}{2r}$ 時，$a$，$h$，$r$ 也就隨 n 而定了，$a$，$h$，$r$，n 的關係是

$$(一)\quad\begin{cases}h=\dfrac{n^2-1}{2n}\\[2mm] a=\dfrac{n^2+1}{2n}\\[2mm] r=\dfrac{1}{2n}\end{cases}\qquad (解\begin{cases}a^2-h^2=4r(r+h)=1\\ r=\dfrac{1}{2n}\end{cases}即得)$$

這就是說，每個 $y=\cos nx$ 的圖形都有一個球面與柱面的交集與之對應

例如：我們想作 $y=\cos 3x$ 的圖形，則將 $n=3$ 代入關係式(一)得

$$h=\frac{9-1}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

$$a=\frac{9+1}{6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

$$r=\frac{1}{6}$$

在控制這三個〃因素〃的環境下，我們就可以作得她的圖形。

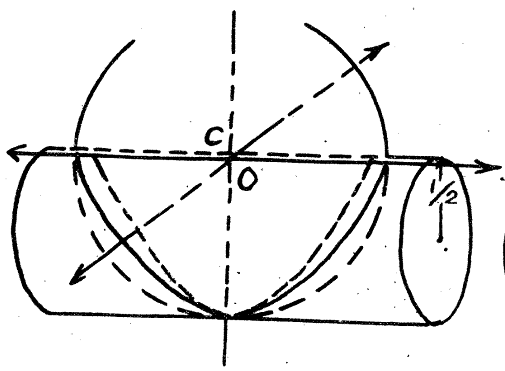
㈡至於 $y=m\cos nx$ 的作圖用的是同樣的道理：

令 $a^2-h^2=m^2$ ，$\dfrac{a^2-h^2}{4r(r+h)}=1$，$r=\dfrac{1}{2n}$

代入原方程式解得了 $a$，$h$，$r$，$m$，n 的關係：

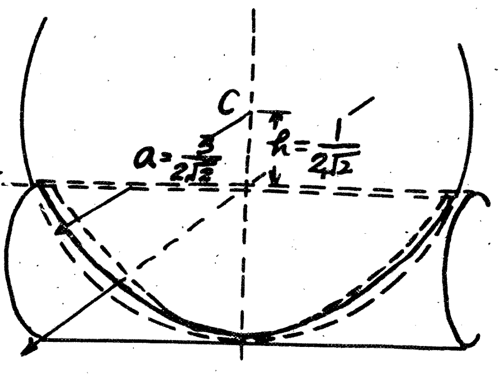
$$\begin{cases} r=\dfrac{1}{2n} \\ h=\dfrac{n^2m^2-1}{2n} \\ a=\dfrac{n^2m^2-1}{2n} \end{cases} \qquad \text{（關係式㈡）}$$

在關係式㈠，㈡中 $r$，$h$，$a$ 之間都有這樣的關係：$2r+h=a$，直觀的來說，當我們得到任何一個 $y=m\cos nx$（$m$，$n\in R^+$）實際的情形都是球面與圓柱面截痕〃恰好封閉〃的時候（這是 $2r+h=a$ 的意義，見圖十五）




n＝1時　$h=0$，$a=1$，$r=\frac{1}{2}$

即是第三章 $y=\cos x$ 的圖形




$n=\sqrt{2}$ 時　$h=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$，$a=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$，

$r=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$，可得 $y=\cos\sqrt{2}\,x$ 的圖形，

## 最後一章

這就是她的故事，從她的出現，一直到與她交往了半年後的今天，是一段很奇妙的過程；讓我們再簡單的做個回顧吧！

在第○章，第一章裏，說的是與她的解逅經過，第二章裏我們導出了在一個特殊情形時她的方程式。在第三章裏，談到了正確作出正、餘弦圖形的事（這個收獲，是我們最初所未料到的！）。第四章、第五章說的是對她更進一步的了解，導出幷討論了球面與圓柱面截痕展開圖形的方程式，也詳細訴說了各種情形下的展開圖形。第六章回到了她與橢圓差異的比較，這時也因而使我們產生了另一個構想——圓規畫橢圓。第七章又是故事發展的最後一個高潮，那就是 $y=\cos n\theta$ 和 $y=m\cos n\theta$ 的出現，這使她更吸引人了！

至於原先我們抱了很大希望，有關她物理意義的問題，則因目前所學有限而告擱淺，在這裏我們特別要求先進，學長們共同協助，使這整個體系更趨於完美，因限於篇幅和時間（我們是高三學生）這個故事就寫到這裏了，在結束這個故事的時候我們說：希望今後能聽到她被重視，被討論，被發展的音訊，我們會很高興的——因為，她是一個很好的曲線。

## ○ 附　　錄 ○

繪〃橢圓〃儀器的原理與設計

要說明這儀器的理論，我們必須繼續主文內第六章的討論：

(一)觀察下面三個參數式：

$$\begin{cases} x = A\cos\phi \\ y = \sin^{-1}(B\sin\phi) \end{cases} \quad \left(\text{方程式：} \frac{x^2}{A^2} + \frac{\sin^2 y}{B^2} = 1\right)$$

$$\begin{cases} x = A\cos\phi \\ y = (\sin^{-1}B)\sin\phi \end{cases} \quad \left(\text{方程式} \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{(\sin^{-1}B)^2} = 1\right)$$

$$\begin{cases} x = A\cos\phi \\ y = B\sin\phi \end{cases} \quad \left(\text{方程式} \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1\right)$$

在 $0 < B < 0.200$（徑）時，對於同一 $x$ 值，她們的 $y$ 座標 $\sin^{-1}(B\sin\phi)$，$(\sin^{-1}B)\sin\phi$，$B\sin\phi$ 之間的差異在 0～0.0010（千分之一單位徑度量）之間，遠非一般量度儀器所能測量，所以在這時候我們可以將 $\frac{x^2}{A^2} + \frac{\sin^2 y}{B^2} = 1$ 與 $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ 的圖形視為同一（也就是說我們現在所說的畫〃橢圓〃儀器畫出的實際上是 $\frac{x^2}{A^2} + \frac{\sin^2 y}{B^2} = 1$）。由前定之 $A^2 = a^2 - h^2$，$B^2 = \frac{a^2 - h^2}{1+2h} \Rightarrow$

$\frac{A^2}{B^2} = 1+2h$（其中 $h > 0$，$\therefore A^2 > B^2$）……①

而由定義得橢圓 $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ 之離心率 e，為 $e^2 = 1 - \frac{B^2}{A^2}$ ……②

代①入② $\Rightarrow e^2 = \frac{2h}{1+2h} \Rightarrow h = \frac{e^2}{2(1-e^2)}$，也就是當 e 被給定後，$h$ 值就隨而固定。

至於$A=\sqrt{a^2-h^2}$　的意義正是這橢圓長軸的半長（$A^2>B^2 \Rightarrow A$為長軸）。所以只須調整作圖筆尖到我們所須求長軸頂點的位置，就可以畫出所需的橢圓了。因爲e只爲$h$的函數，所以對於同一$h$高度，作出的一系列不同長短軸的橢圓的離心率都相同，因此用此原理作橢圓，長短軸的控制幷不構成問題。（但在長軸太大時，原有的千分之一的誤差將會提高，這時候要求精密就必須把單位長〃放大〃也就是將須要曲率半徑較大的圓筒）。

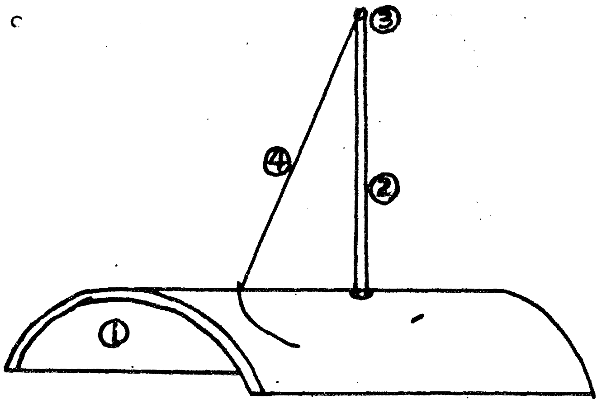
(二)繪橢圓儀器簡圖見右

①曲率半徑爲$r$的柱面的一部分。

②可調整高度的柱。

③柱頂可自由旋轉。

④線。




(三)儀器操作（以2$r$爲一單位）

〔論例〕作離心率爲$\frac{1}{2}$，長軸10$cm$　之橢圓。

作法：（設已有圓弧板的曲率半徑爲20$cm$）

$$由e=\frac{1}{2} 得\ h=\frac{\frac{1}{4}}{2(1-\frac{1}{4})}=\frac{1}{6}（單位）$$

因以$2r=40cm$爲一單位$\therefore h=\frac{1}{6}=\frac{20}{3}cm$

調整螺旋柱到$\frac{20}{3}cm$的高度，再調整儀器使製圖筆尖恰落在長軸的頂點，固定線長順柱面畫一封閉曲線，攤開紙就得到一個長軸10$cm$離心率爲$\frac{1}{2}$的〃橢圓〃誤差爲0.02$cm$。（要減小誤差可以把單位長放大例如若$2r=1=80cm$則誤差爲0.008$cm$)

(四)這個儀器只是直接利用主文第六章所述原理做出來的，在實際使用上還有許多不便。在設計方面有專長的您可以動動腦筋。