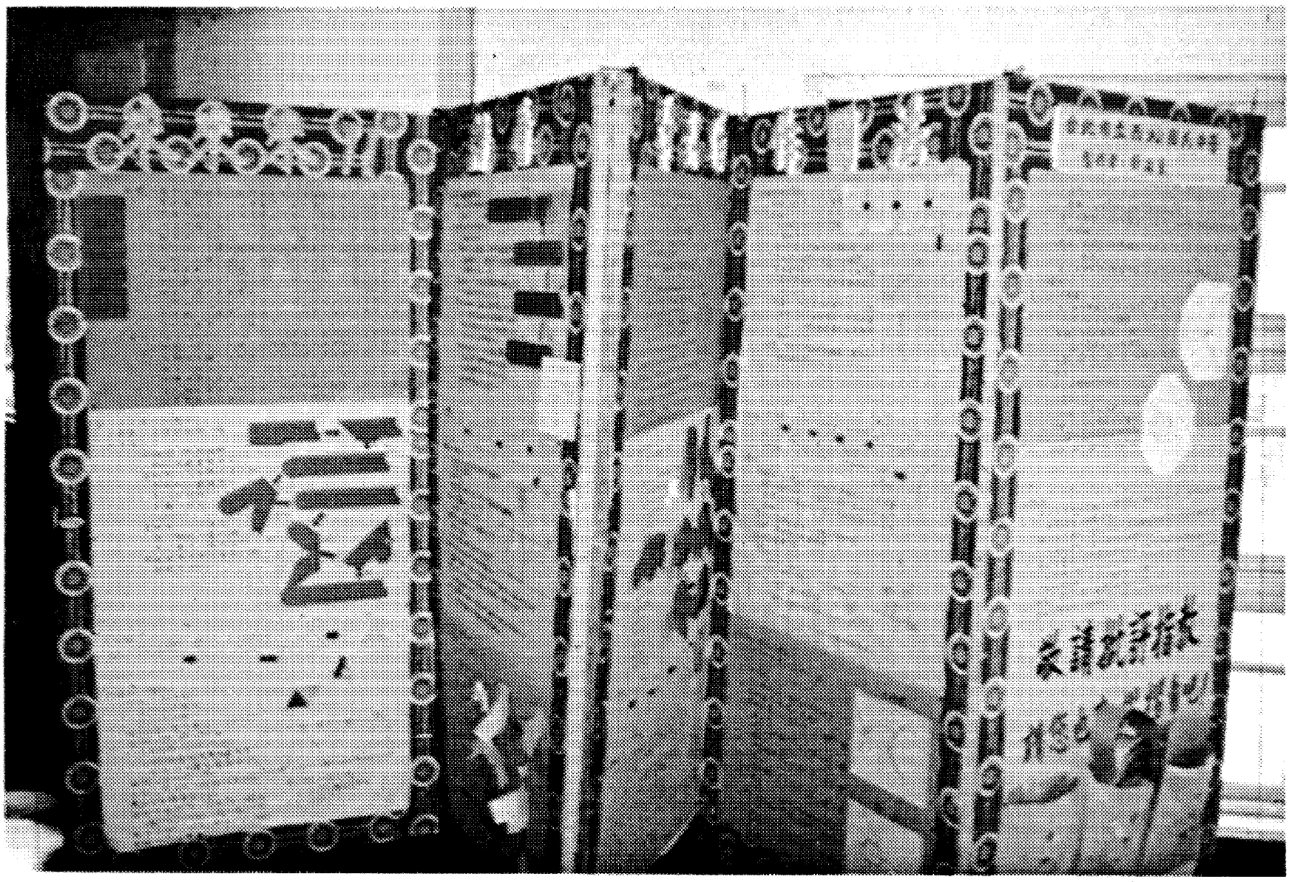
來來來，請看奇異的作圖法

國中教師組第二名

台北市西松國中　　　　製作：簡　毓　眞



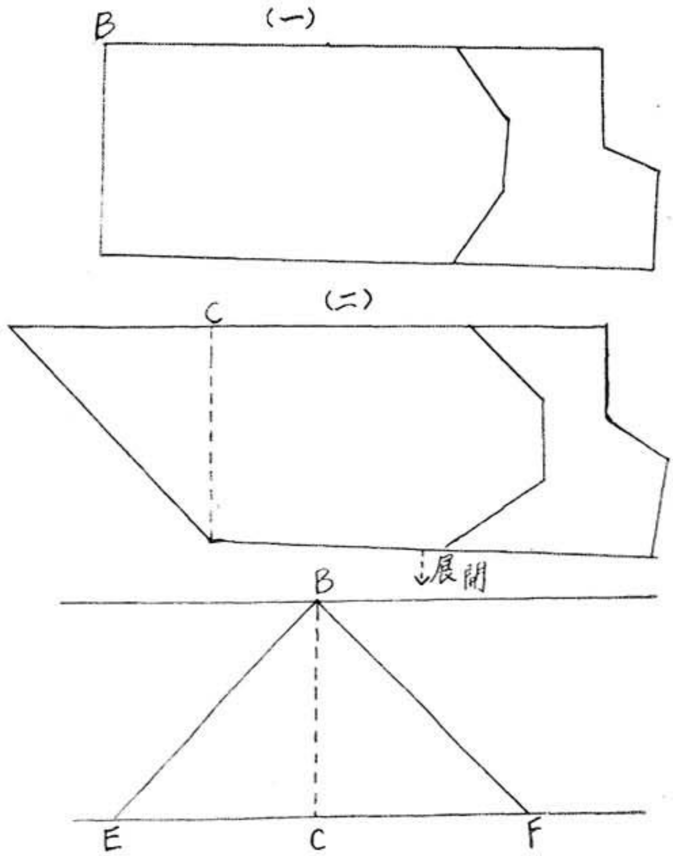
一、緒論：

㈠動機：國中二年級數學教材中有幾何作圖題。有次上課時，一學生發問「老師！我畢業後不再升學，只要學算術加減乘除會了就可以做生意爲何學幾何、代數」當時全班大部份同學附議，我心想難怪他們數學學不好，便告訴他們，數學並不限於書本上的演算、證明，在日常生活中到處可以找到，隨時都要利用到數學數，只要我們細心觀察、耐心求證，我們所接觸到的環境中都有幾何圖形，隨後我就撕一等寬紙條打一「單結」告訴他們這是正五邊形，他們都覺詫異，我們就一起證明，在這求證過程中，發現每位學生興趣濃厚，因此我聯想到他們小學的勞作課——摺紙工，將正在上的童子軍課，只要提起他們學幾何作圖的興趣就不難收到教學上的預期效果。

㈡目的：

①利用摺紙的方法，可以使學生上數學猶如上勞作課的輕鬆，更可以把書上的理論應用到實際「做」上，不僅學起來愉快有趣，且能幫助學生理解，培養其思考、抽象、創造的能力。

②輔導學生從實際生活中去發現數學，使他們知道數學並不限於書本上的理論，培養其細心觀察、耐心求證的科學態度及求眞求善求美的科學精神。



㈢圖示：紙邊線（—），正摺（……），反摺（—○—○—）

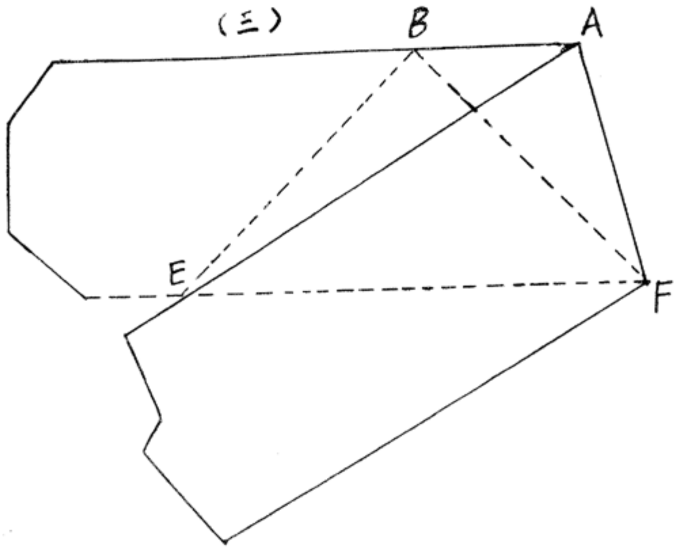
二、正三角形的摺法：

㈠材料：等寬的紙條一張。

㈡方法：

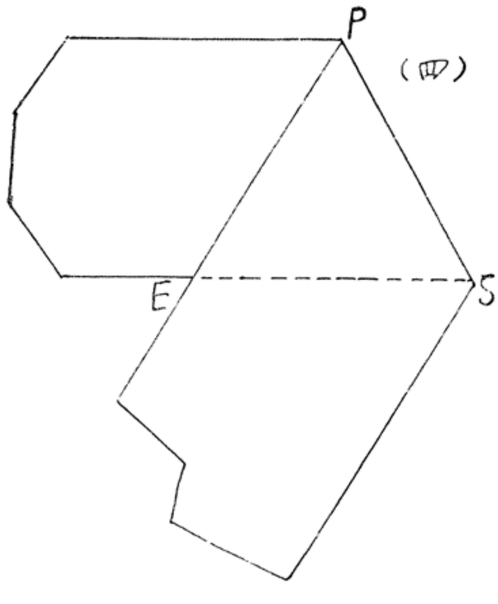
①如圖㈠，$\overline{BC}$ 爲摺痕，紙兩邊緣重合

②如圖(二)，B點為定點，BC與上邊緣重合，即得一等腰△BEF。



③如圖(三)，以F為定點，紙的左邊緣線L與E重合一摺即得$\overline{AF}$。

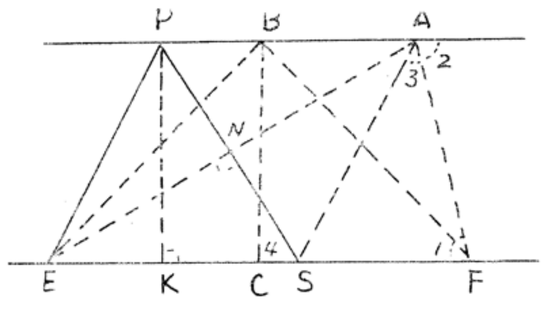
④如圖(四)A與E重合，一摺即得正△PES。



(三)圖解：從略。

(四)證明：

①∠2＝∠3（作圖）∴∠1＝∠3



∠1＝∠2（內錯角）

故△AEF為等腰△∴$\overline{EA}=\overline{EF}$

②$\overline{AS}=\overline{SE}$，$\overline{AP}=\overline{PE}$且△APS≌△ESP（作圖）

∴▱ASEP為菱形（相鄰兩邊相等的平行四邊形必為菱形）

故$\overline{AS}=\overline{SE}=\overline{EP}=\overline{PA}$

且$\overline{AE}\perp\overline{PS}$，$2\overline{EN}=\overline{AE}$（菱形對角線垂直平分）

即$2\overline{EN}=\overline{EF}$

③自P點作$\overline{PK}\perp\overline{EF}$則$\overline{PK}=\overline{BC}$且$2\overline{BC}=\overline{EF}$

∴$\overline{EN}=\overline{BC}=\overline{PK}$

④$\angle 4 = \angle 4$ ∴ $\triangle PKS \cong \triangle ENS$（AAS）故$\overline{PS} = \overline{ES}$（對應邊）

⑤∴ $\overline{PS} = \overline{ES} = \overline{PE}$ ∴ $\triangle PES$ 爲正三角形

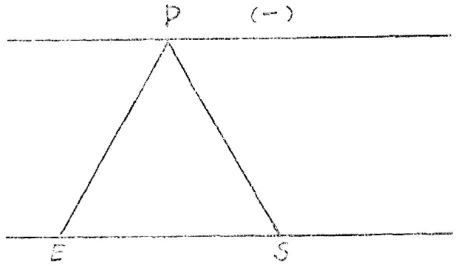
三、正六邊形的摺法：

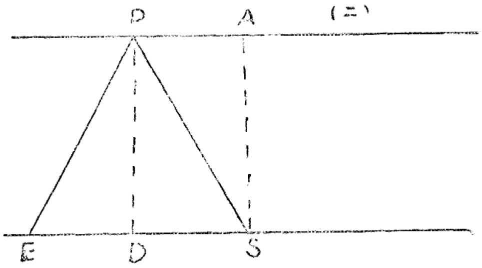
㈠材料：等寬的紙條一張

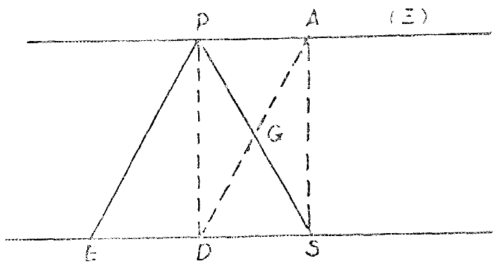
㈡方法：

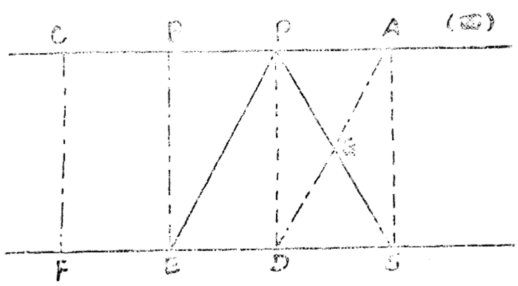
①如圖㈠依二、的方法摺一正△PES

②如圖㈡以S爲定點，使紙上邊緣與下邊緣重合，一摺，









即得$\overline{AS} \perp \overleftrightarrow{ES}$

③如圖㈢A，D爲定點反摺，即得矩形ASDP對角線$\overline{AD}$與$\overline{PS}$交於G。

④如圖㈣以E爲定點，依圖㈡的方法摺即得矩形PDEB，再把上面的紙在$\overline{PD}$重合處反摺，即得一矩形BEFC，大小與PDBE同。

⑤如圖㈤以B，F爲定點反摺，C，E爲定點反摺即得矩形BEFC，兩對角線$\overline{BF}$與$\overline{CE}$交於H即得PGDEHB爲正六邊形。

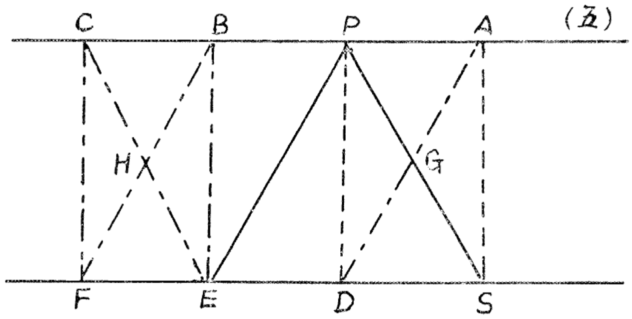
㈢圖解：略。

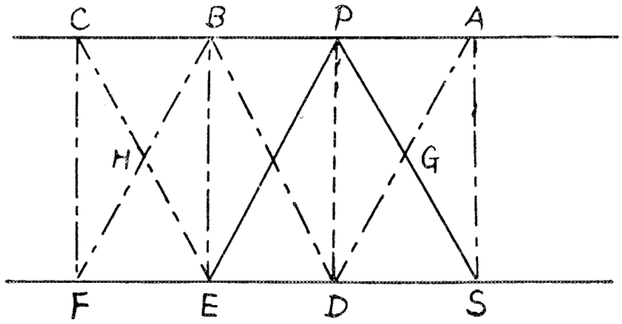
㈣證明：

①□ASDP，□PDEB，□BEFC皆爲矩形且全等（作圖）∴ $\overline{BP} = \overline{ED}$

且$\overline{AD} = \overline{PS} = \overline{BF} = \overline{EC} = \overline{PE} = \overline{BD}$（矩形對角線相等）

(五)





②$\triangle PSE$為正△ $\therefore \overline{ES} = \overline{PS}$

且$\overline{ED} = \frac{1}{2}\overline{ES} = \frac{1}{2}\overline{PS}$

③$\overline{PG} = \frac{1}{2}\overline{PS}$，$\overline{DG} = \frac{1}{2}\overline{AD}$，$\overline{HE} = \frac{1}{2}\overline{CE}$，$\overline{BH} = \frac{1}{2}\overline{BF}$

$\therefore \overline{PG} = \overline{DG} = \overline{ED} = \overline{EH} = \overline{HB} = \overline{BP}$（代換）

④$PES \cong \triangle BDF \cong \triangle ECP$且為正△

$\therefore \angle BPG = \angle GDE = \angle DEH = \angle HBP = 120^\circ$（兩個正O的兩內角和）

⑤$\angle 1 = \angle 2 = 30^\circ$（正△的高平分頂角）

$\therefore \angle BHE = 120^\circ$，同理$\angle PGD = 120^\circ$

⑥$\angle BPG = \angle GDE = \angle DEH = \angle HBP = \angle BHE = \angle PGD = 120^\circ$

⑦⬡PGDEHB為正六邊形（由③⑤得知）

四、正五邊形的摺法：

㈠材料：等寬的紙條一張

㈡方法：

①請看這不是童子軍的結繩嗎？（單結）

②用等寬的紙條代替繩子結單結如圖（將此單結用力一壓即成正五邊形）

③詳細步驟如圖㈠圖㈡圖㈢

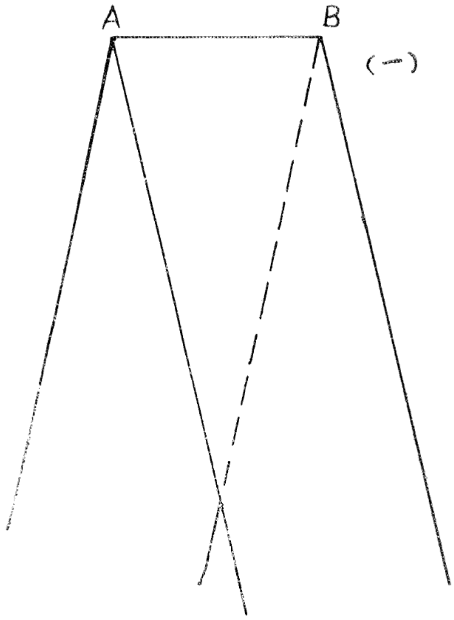
㈢圖解：略

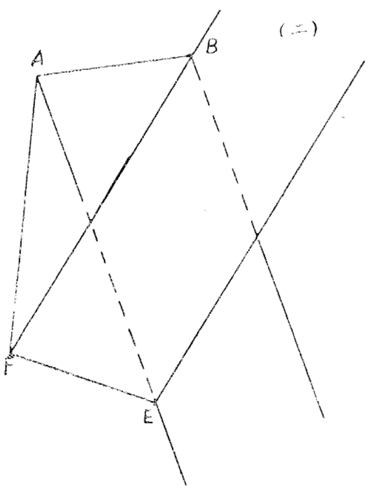
㈣證明：

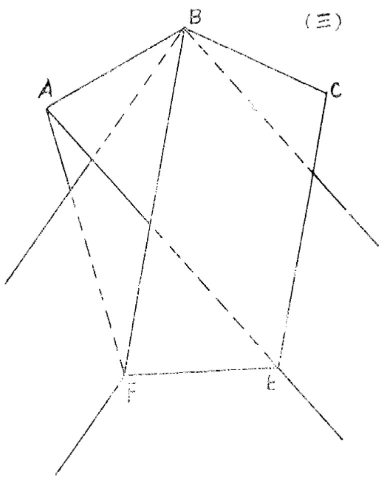
①自B點作$\overline{BF}\perp\overleftrightarrow{EA}$〔如圖㈠〕作$\overline{BG}\perp\overleftrightarrow{EA}$（作圖）

$\therefore BF=BG$，$\angle AFB=\angle AGB=90^\circ$

②$\angle 1=\angle 2$，$\angle 2=\angle 3$（內錯角）







$\therefore \angle 1=\angle 3$

且$\angle 4=\angle 5$（直角△一銳角必相等）

故$\triangle AFB \cong \triangle AGB$（ASA）

$\therefore \overline{AB}=\overline{AB}$（對應邊）

故▱ABAE為菱形（兩鄰邊相等的平行四邊形為菱形）

③同理可證：

AEDE，ABCB，BCDC，CDED為菱形。

則$\overline{AB}=\overline{BC}$，$\overline{BC}=\overline{CD}$，$\overline{ED}=\overline{CD}$，$\overline{AE}=\overline{ED}$

$\therefore \overline{AB}=\overline{AE}=\overline{ED}=\overline{DC}=\overline{CB}$（代換。）

④自A點作 $\overline{ap}\perp\overleftrightarrow{BC}$，作 $\overline{DS}\perp\overleftrightarrow{BC}$（圖㈡）

則∠APS＝＜DSC＝90°

$\therefore \overline{AP}=\overline{DS}$

⑤△APB $\cong$ △DSC（斜股性質）

∠6＝∠7（對應角）

⑥∠APS＋∠6＝∠DSC＋∠7（等量公理）

⑦∠ABC＝∠APB＋∠6

∠DCB＝∠DSC＋∠7

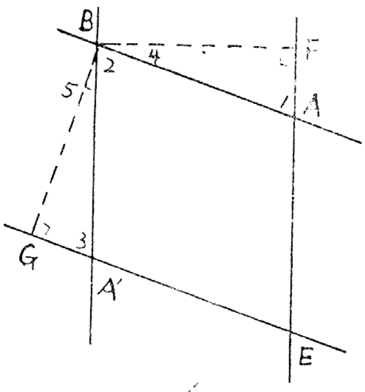
∴∠ABC＝∠DCB（代換）

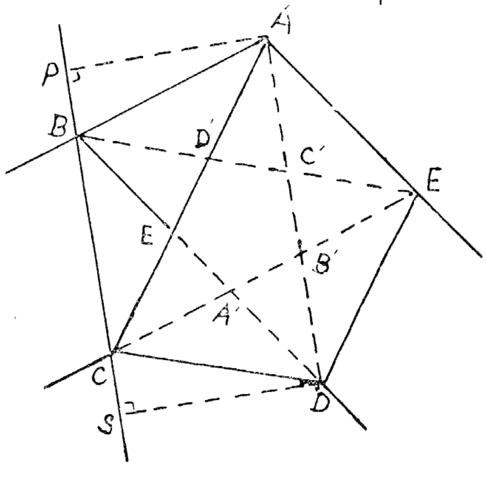
⑧同理可證：∠BCD＝∠EDC，∠EDC＝∠AED，

∠AED＝∠EAB

∴∠ABC＝∠BCD＝∠CDE＝∠DEA＝∠EAB

⑨ABCDE爲正五邊形（由③⑧得知）



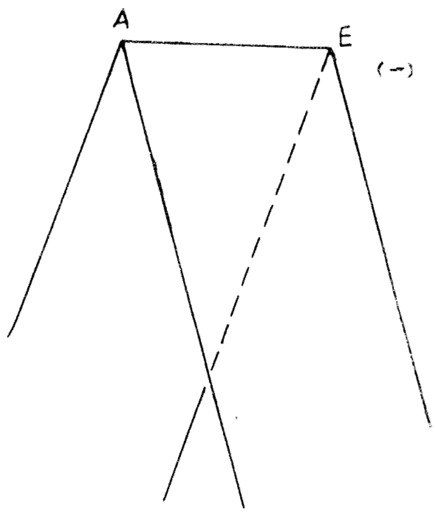


五、正七邊形的摺法：

㈠材料：等寬的紙條一張

㈡方法：

①這不是一個花結嗎？



②利用「花結」的方法以等寬的紙條來結個「花結」

「將此花結用力一壓即成正七邊形）

③詳細步驟如圖(一)、圖(二)、圖(三)、圖(四)、圖(五)

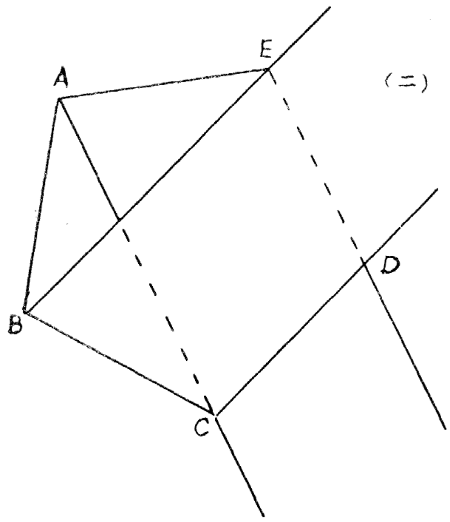
(三)圖解：略

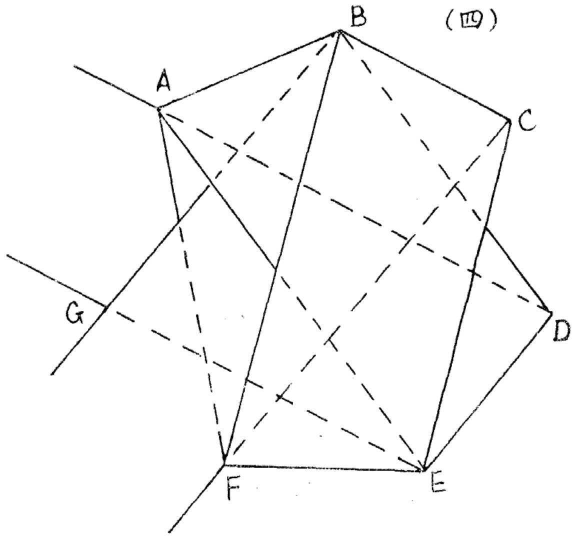
(四)證明：

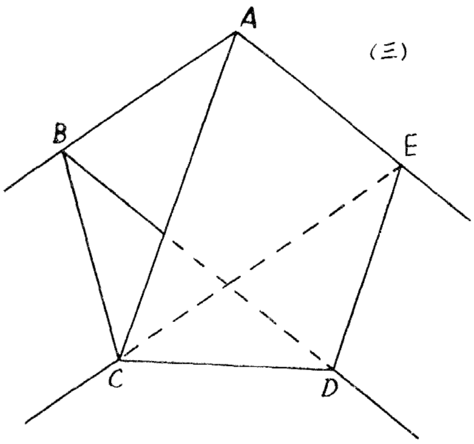
①依四、之方法證BKEH為菱形則$\angle 1=\angle 2$

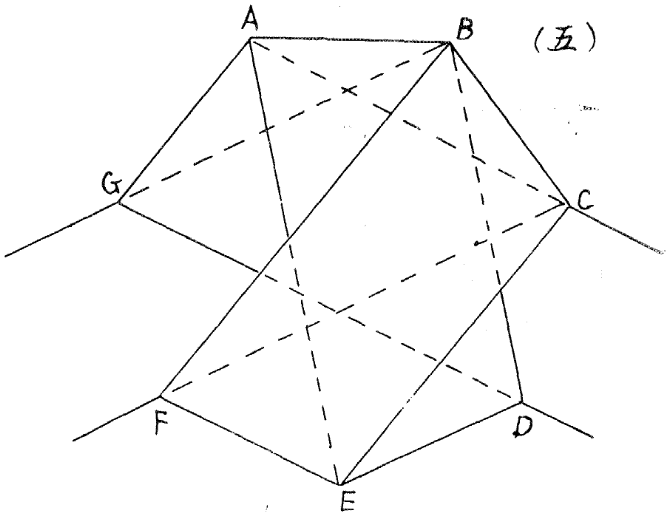
②自A點，F點各作$\overline{AP}\perp\overline{BE}$

$\overline{FN}\perp\overline{BE}$，則$\overline{AP}=\overline{FN}$，









$\angle APE=\angle FNB=90^\circ$

$\therefore \angle 3=\angle 4$（直角△有一銳角相等角相等另一銳角必等）

③$\triangle APE \cong \triangle FNB$（ASA）

$\therefore \overline{AE}=\overline{BF}$（對應邊）

④$\triangle ABE \cong \triangle FEB$（SAS）

∴ $\overline{AB}=\overline{EF}$（對應邊）

⑤同理可證：

$\overline{BC}=\overline{EF}$　　$\overline{AB}=\overline{ED}$

$\overline{ED}=\overline{AG}$　　$\overline{AG}=\overline{CD}$

$\overline{GF}=\overline{BC}$

∴ $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{FG}=\overline{GA}$（由④⑤得知）

⑥ $\overline{AE}=\overline{BF}$，$\overline{AB}=\overline{EF}$，且 $\overline{AF}=\overline{AF}$

∴△ABF≅△FEA（SSS）

故∠BAF＝∠EFA（對應角）

⑦ AG＝FG∴△AGF為等腰△故∠5＝∠6

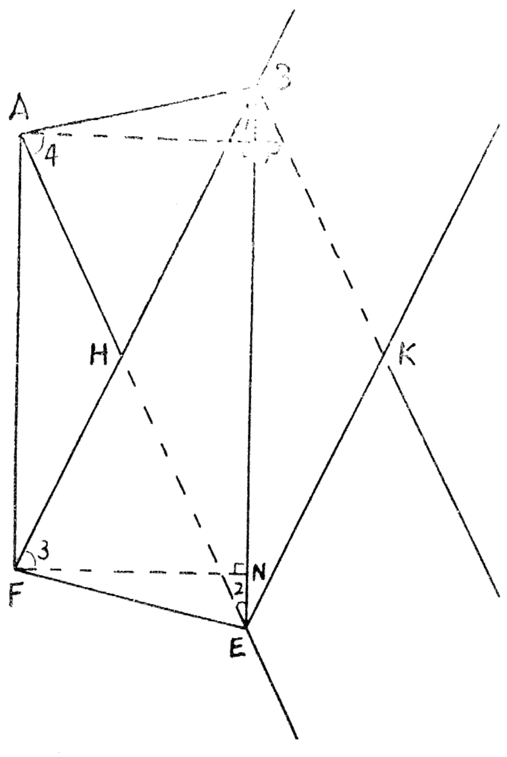
⑧∠BAF＋<5＝∠EFA＋∠6（等量公理）即∠A＝∠F

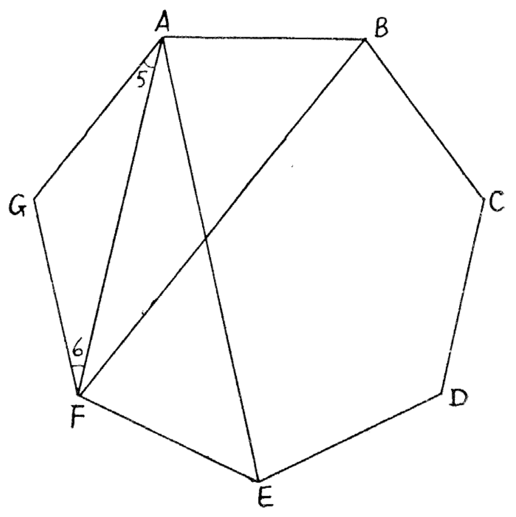
⑨同理可證：∠C＝∠E，∠B＝∠D

∠E＝∠G，∠C＝∠A，∠B＝∠G

∴∠A＝∠B＝∠C＝∠D＝∠E＝F＝∠G（代換）

⑩由⑤⑨得知ABCDEFG為正七邊形。





六、拋物線的摺法：

(一)材料：矩形或正方形紙一張

㈡方法：

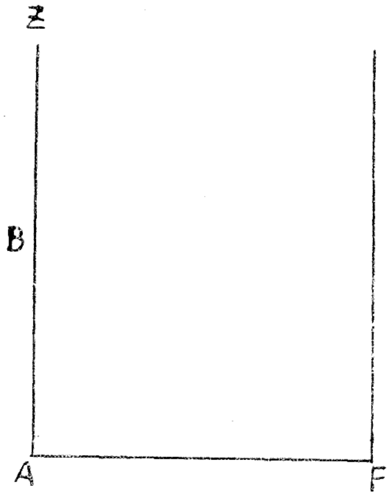
①先確定焦點F與準線$\overleftrightarrow{AZ}$如圖㈠

②以F爲定點如圖㈡$\overline{AB}$長短不拘。

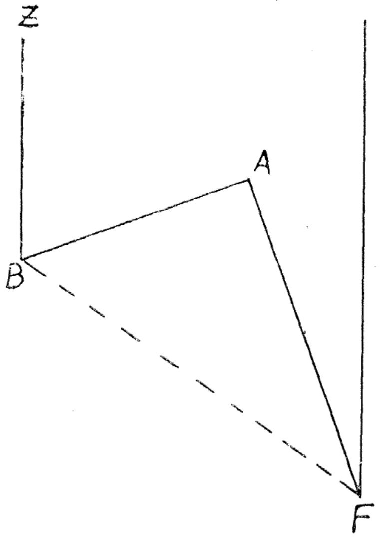
③如圖㈢摺$\overline{BF}$的垂直平分線$\overleftrightarrow{CD}$

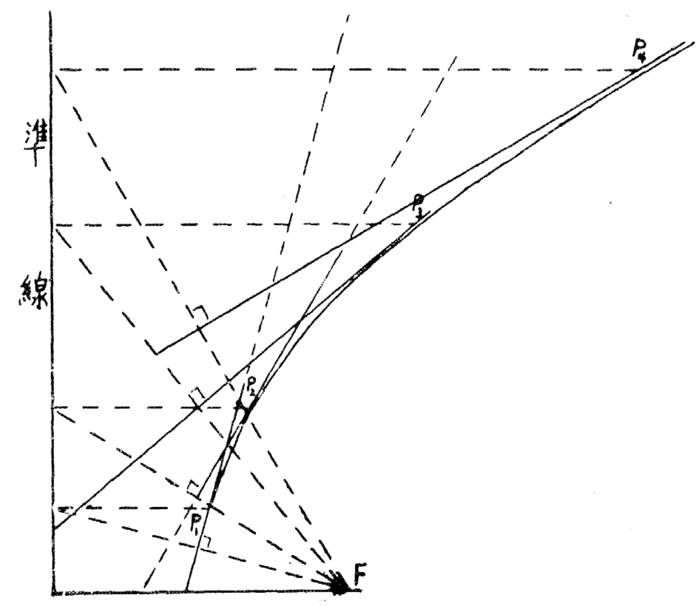
④如圖㈣過B點作$\overline{AF}$的平行線$\overleftrightarrow{BS}$則$\overleftrightarrow{BS}$與$\overleftrightarrow{CD}$交於P，此點卽爲拋物線上的一點。

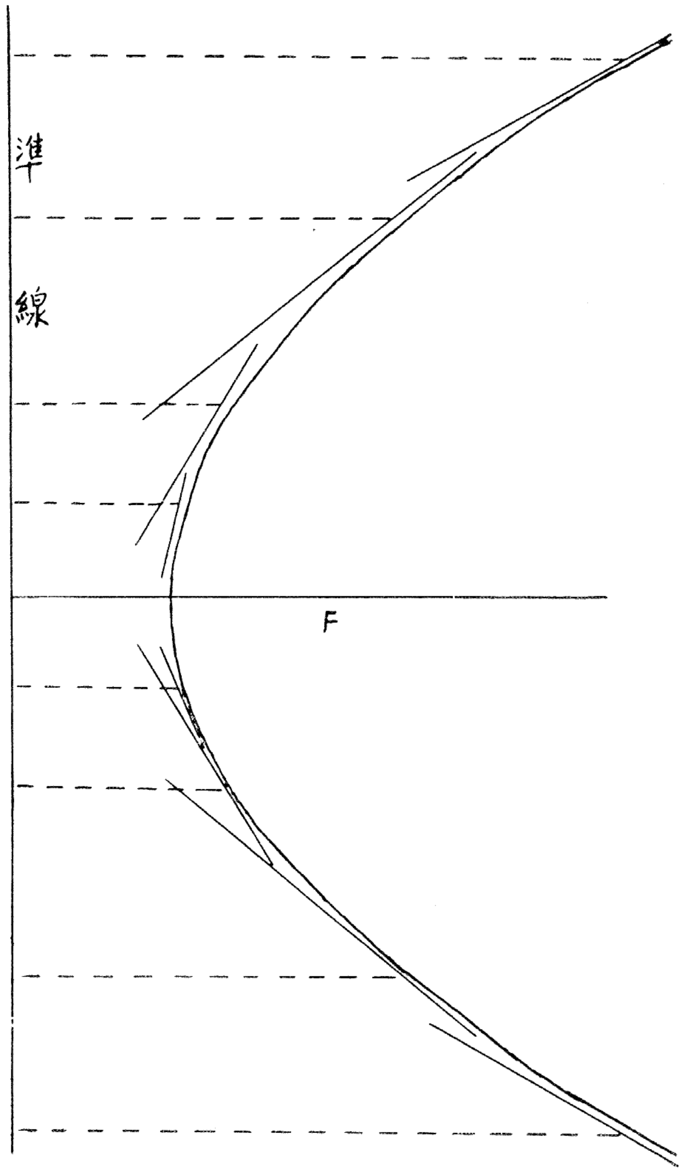
(一)



(二)

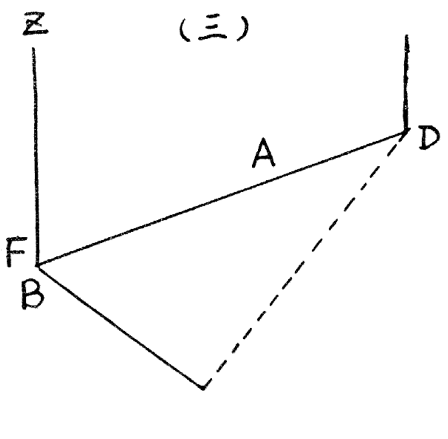


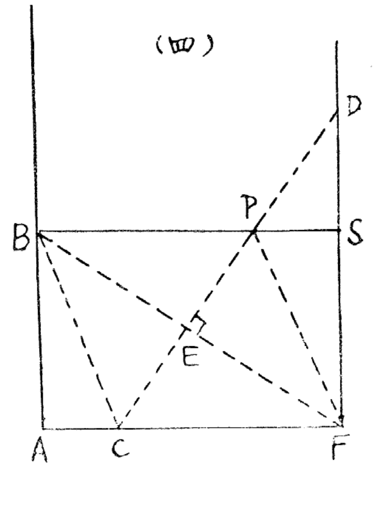




⑤再以F爲定點依②③④的方法找出第二點，以此類推可以找出無數點，再以平滑曲線連接即成爲拋物線如完成圖。

注意：焦點與準線的距離越小，摺出的拋物線越顯明。



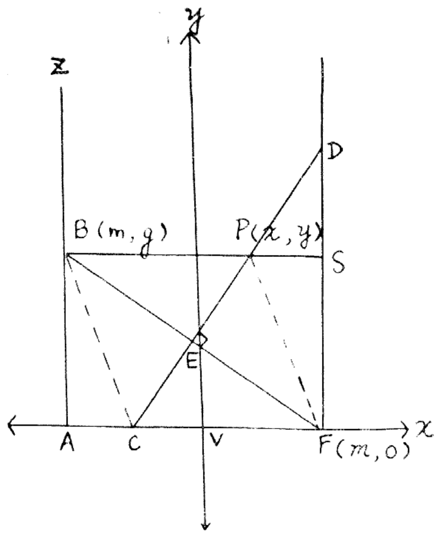


㈢證明：

①如圖㈡之摺法，一次只能與準線交於一點B，再過B點作AF的平行線BS與CD只能交於一點P，故摺一次只能摺出一點，不可能有第二、三點出現。

②P點在$\overline{BF}$的垂直平分線上（作圖）

③$\overline{BP}=\overline{PF}$（垂直平分線性質）



④由③知$\overline{BP}=\overline{PF}$

即 $[x-(-m)]^2+(y-g)^2=(x-m)^2+(y-o)^2$

$(x+m)^2=(x-m)^2+y^2(\because y=g)$

$x^2+2mx+m^2=x^2-2mx+m^2+y^2$

$y^2=4mx$…此即爲拋物線方程式

七、雙曲線、橢圓的摺法：

㈠材料：矩形或正方形紙

㈡方法：

①雙曲線：

(1)以圓規畫一圓O_1半徑爲2a

(2)在圓O_1外任定一定點A

(3)將A置於圓O_1上任一點S_1得一摺痕L_1

將A置於圓O_1上任一點S_2得一摺痕L_2

將A置於圓O_1上任一點S_3得一摺痕L_3

將A置於圓O_1上任一點S_4得一摺痕L_4

則L_1L，$_2$，L_3，L_4 均爲雙曲線的切線

(4)連接O_1S_1則$\overrightarrow{O_1S_1}$與L_1交於P_1，即得切點P_1

連接O_1S_2則$\overrightarrow{O_2S_2}$與L_2交於P_2，即得切點P_2

連接O_1S_3則$\overrightarrow{O_3S_3}$與L_3交於P_3，即得切點P_3

連接O_1S_4則$\overrightarrow{O_4S_4}$與L_4交於P_4，即得切點P_4

以此類推可摺出無數點 P_1, P_2, P_3, P_4……再用圓滑曲線連接即爲雙曲線。

②橢圓：皆與雙曲線同，只有將圓 O_1 外一點 A，移至圓 O_1 內部即可。

故已知雙曲線或橢圓方程式就可摺出此雙曲線或橢圓。

㈢證明：

①雙曲線：

(1)已知雙曲線之方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

(2)N線爲 $\overline{AS_4}$ 的垂直平分線

$\therefore \overline{P_4A}=\overline{P_4S_4}$（垂直平分線性質）

(3) $\overline{P_4A}-\overline{P_4O_1}$

$=\overline{P_4S_4}-\overline{P_4O_1}$

$=\overline{O_1S_4}$

$=2a$（圓 O_1 的半徑）

②橢圓：

(1)已知橢圓之方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

且圓 O_1 的半徑爲 $2a$

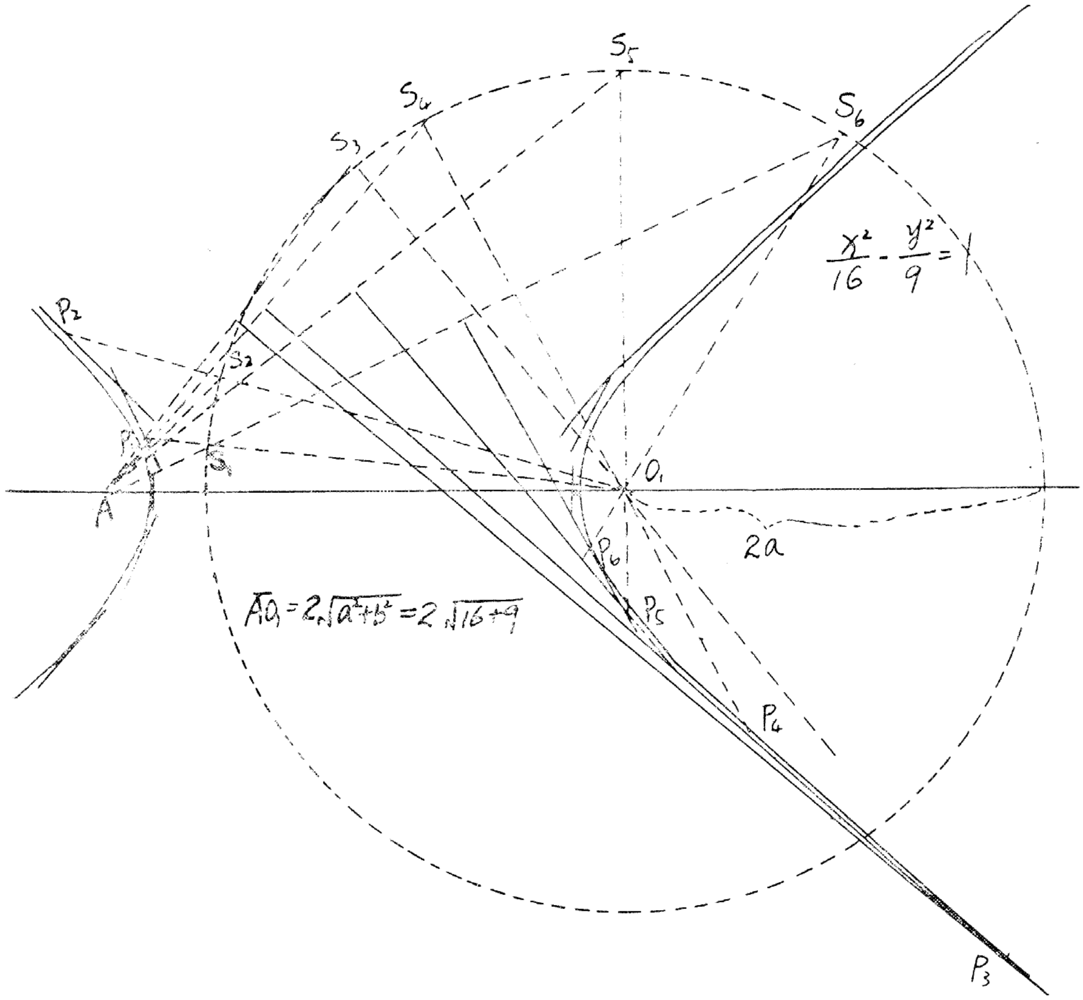
(2) 線N爲 $\overline{AS_4}$ 的垂直平分線

$\therefore \overline{P_4A}=\overline{P_4S_4}$

(3) $\overline{P_4A}+\overline{P_4O_1}=\overline{P_4S_4}+\overline{P_4O_1}$

$=\overline{O_1S_4}$

$=2a$（圓 O_1 的半徑）



八、結論：

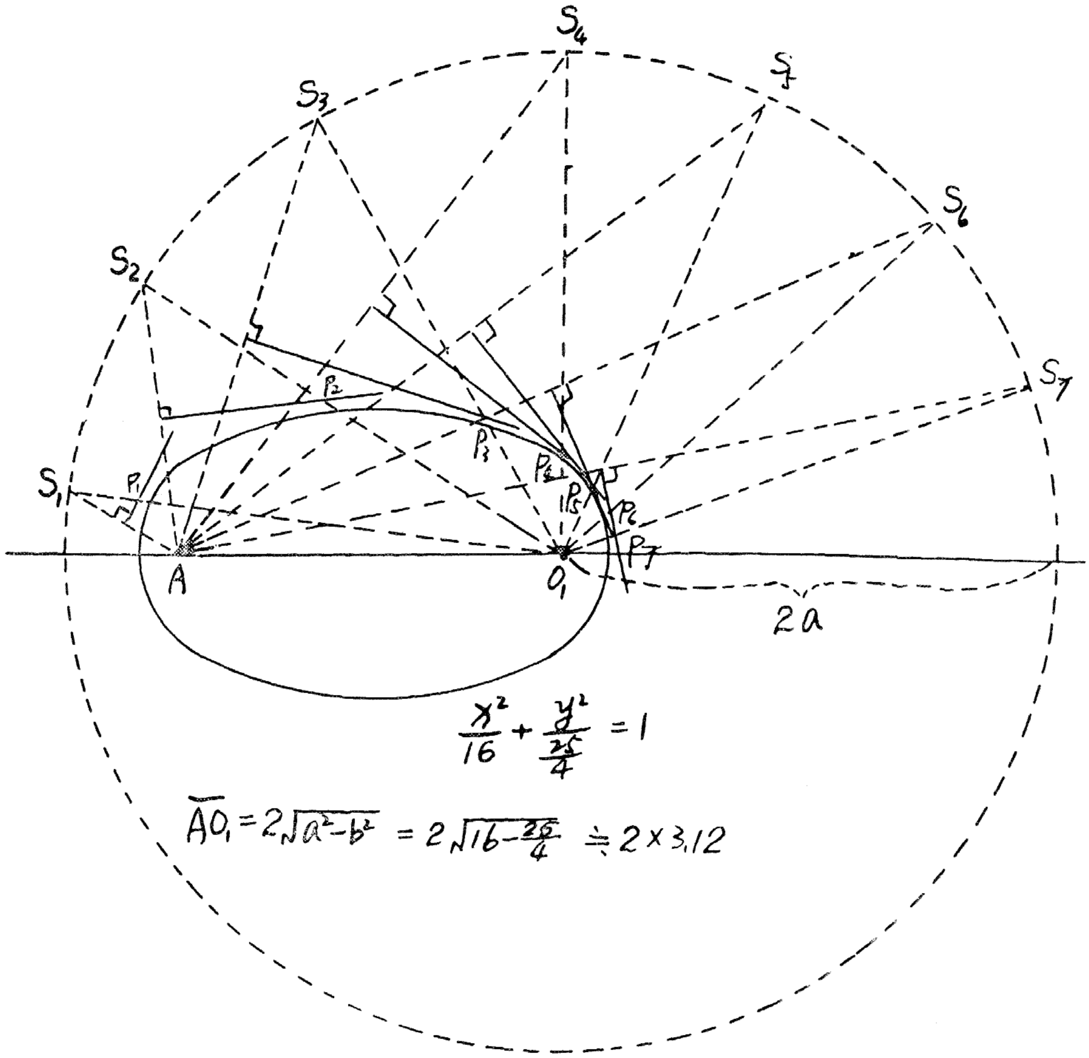
㈠以上奇異的摺紙可以說是幾何圖形「美」的表現，使索然無味的數學變成一種藝術。

㈡上述的摺法與證法在求簡單明瞭能提起學生學習興趣爲原則，因此證明以最簡便的方法證之。

㈢正五邊形、正七邊形的摺法是用紙條打好「單結」「花結」再用力一壓卽得，圖㈠中似乎先決定了角度其實不然，而是先摺好後再加以分析，才易了解打結的步驟。

㈣爲了證明方便、清楚，故增加「圖解」一項。

㈤如此摺紙可以繼續硏究，摺出更多的圖形。



$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{25}{4}}=1$$

$$\overline{AO_1}=2\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{16-\frac{25}{4}}\fallingdotseq 2\times 3.12$$