從韓信點兵到拉格蘭日
插值法的研究

高中組數學

省立新竹女子高級中學　　製作學生：童筱麗　魏秀卿
莊月榮　黃玉雪
指導老師：賴瑞楓

一、前　　言：

「卿部下有多少兵卒？」漢皇帝劉邦問道。

「敬稟陛下兵不知其數，三三數之剩二，五五數之剩三，七七數之剩二。」楚王韓信答道。

從他們這一問一答，引出了我國古聖先賢在近代代數及數論中的輝煌成就，它的光芒照耀了整個世界，令西方人士一致讚美，並且把這個問題的解法命名爲「 中國剩餘定理 」。（ Chinese Remainder Theorem ）

二、動　　機：

㈠由兩個問題談起：

題題一：有一自然數，被 3 除之餘 2，被 5 除之餘 3，被 7 除之餘 2，則滿足條件之最小自然數爲何？

問題二：有一多項函數其次數至多爲 3，而其圖形含有下列四點，（ − 1，2 ），（ 0，0 ），（ 1，− 2 ），（ 2，2 ），則此多項函數爲何？

這兩個問題表面上看來好像完全沒有關係，可是我們學了代數結構以後發現 $\{I；+\cdot\}$ 是一個具有單位元素的交換環，$\{Q(x)；+\cdot\}$ 也是一個具有單位元素的交換環，（ Q(x)表

示有理係數多項式所成的集合）而且老師也告訴我們說：在多項式的運算裏，眞正有關係的只是多項式的係數而已，多項式的理論不過是考察係數序列在適當運算下的結構罷了。

(二)問題一與問題二的關係：

我們先來看看這個命題「函數圖形 $Y = f(x)$ 通過一個已知點 (a, b)」

(1)由函數圖形的定義，我們知道 $Y = f(x)$ 通過 (a, b) 表示當 $x = a$ 時，$Y = f(a) = b$。

(2)由餘式定理我們知道 $f(a)$ 是 $x - a$ 除 $f(x)$ 的餘式。

(3)由以上兩個推論，我們得知「函數圖形 $Y = f(x)$ 通過點 (a, b)」與「以 $x - a$ 除 $f(x)$ 餘 b」具有相同的意義。

因此問題二我們可以改寫如下：

有一個多項式 $f(x)$ 其次數至多為 3，而且滿足下列條件。

(1)以 $X + 1$ 除 $f(x)$ 餘 2。

(2) $f(x)$ 可被 X 整除。

(3)以 $X - 1$ 除 $f(x)$ 餘 -2。

(4)以 $X - 2$ 除 $f(x)$ 餘 2。

那麼問題一與問題二應該是同一形式的問題了。

(三)老師告訴我們說：「問題一是我國先賢在數論中最偉大的貢獻」。第五册課本告訴我們說「問題二的解法以拉格蘭日插值法最簡單。」而我們想如果可以由問題一直接導出問題二來，不是更有意義嗎？

三、本　　文：

定義：若 $a - b$ 能夠被m整除，我們說：「a, b 對模 m 同餘」

定理 1：已知 $a \equiv b \pmod{m}$，$c = d$，$\pmod{m}$，則 $a + c \equiv b + d \pmod{m}$。

以符號 $a \equiv b \pmod{m}$ 表示之。

推論 1：設 $a_i \equiv b_i \pmod{m}$，$i = 1, 2, 3 \cdots\cdots\cdots\cdots t$，

$$則 \sum_{i=1}^{t} a_i = \sum_{i=1}^{t} b_i \pmod{m}$$

定理 2：已知 m_1 m_2 互質，且 $C \in I$，則下列一組同餘式有解。

$$\begin{cases} X \equiv C \pmod{m_1} \\ X \equiv 0 \pmod{m_2} \end{cases}$$

推論 2：已知 $(m_1, m_2) = 1$，$(m_1, m_3) = 1$，……………… $(m_1, m_t) = 1$

則 $\begin{cases} X \equiv C \pmod{m_1} \\ X \equiv 0 \pmod{m_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X \equiv 0 \pmod{m_t} \end{cases}$ 有解

定理 3：已知 m_1 m_2 ………m_t 兩兩互質，並且求出。

a_1 是 $\begin{cases} X \equiv C_1 \pmod{m_1} \\ X \equiv 0 \pmod{m_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X \equiv 0 \pmod{m_t} \end{cases}$ 一個解

a_2 是 $\begin{cases} X \equiv 0 \pmod{m_1} \\ X \equiv C_2 \pmod{m_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X \equiv 0 \pmod{m_t} \end{cases}$ 一個解

………a_t 是 $\begin{cases} X \equiv 0 \pmod{m_1} \\ X \equiv 0 \pmod{m_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X \equiv C_t \pmod{m_t} \end{cases}$ 一個解

則 $a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_t$ 是 $\begin{cases} X \equiv C_1 \pmod{m_1} \\ X \equiv C_2 \pmod{m_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X \equiv C_t \pmod{m_t} \end{cases}$ 一個解

定理 4 已知 m_1，m_2，………m_t 兩兩互質，而且 a 為同餘式。

$\begin{cases} X \equiv C_1 \pmod{m_1} \\ X \equiv C_2 \pmod{m_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X \equiv C_t \pmod{m_t} \end{cases}$ 的一個解

則對於任一整數 d，$a + d m_1 m_2 \cdots\cdots m_t$ 也是這組

同餘式的解。

由上述推論，我們得到一個韓信點兵問題的簡便辦法。

例：試解$\begin{cases} X\equiv 2 \pmod 3 \\ X\equiv 3 \pmod 5 \\ X\equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$

(1)先找一個數是5和7的倍數，但被3除餘2———35。

(2)再找一個數是3和7的倍數，但被5除餘3———63。

(3)再找一個數是3和5的倍數，但被7除餘2———30。

然後將所得三數加起來 $35+63+30=128$，即爲所求一組解，而其一般解可以表爲 $128+105d$，$d\in I$，當 $d=-1$ 時，得到最小自然數解 23。#

上面所談的都是有關整數的問題，如果我們把上面的定義、定理及推論中的整數 x, m, a, b, c …………等，都換成一元多項式 $f(x), m(x), a(x), b(x), c(x)$………等，我們就可以來處理東華本第五册中的拉格蘭日插值法的問題了。

例：求一多項式，其次數至多爲三次，而其圖形含有下列四點：
$(-1,2)$、$(0,0)$、$(1,-2)$ 及 $(2,2)$。

解法：$\begin{cases} f(x)\equiv 2 \pmod{x+1} \\ f(x)\equiv 0 \pmod{x} \\ f(x)\equiv -2 \pmod{x-1} \\ f(x)\equiv 2 \pmod{x-2} \end{cases}$

(1)找一個多項式 $g_1(x)$ 是 $x(x-1)(x-2)$ 的倍式，但被 $x+1$ 除餘2　$g_1(x)=-\frac{1}{3}x(x-1)(x-2)$。

(2)找一個多項式 $g_2(x)$ 是 $(x+1)(x-1)(x-2)$ 的倍式，但被 x 整除　$g_2(x)=0$。

(3)找一個多項式 $g_3(x)$ 是 $x(x+1)(x-2)$ 的倍式，但被 $x-1$ 除餘 -2　$g_3(x)=x(x+1)(x-2)$。

(4)找一個多項式 $g_4(x)$ 是 $x(x+1)(x-1)$ 的倍式，但被 $x-2$ 除餘2　$g_4(x)=\frac{1}{3}x(x+1)(x-1)$。

則 $g_1(x)+g_2(x)+g_3(x)+g_4(x)=x^3-3x$，即爲所求多項式。#