對於無理數應如何表示

國中教師組數學

台北市新民國民中學　　　　製作：陳　清　邦

前言：我們從國中數學課本中知道，一個有理數能夠以分數表示，但對於一個無理數，是否能以分數表示，我們已經知道不能，但又應如何表示呢？

本文：

定義1.

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots\cdots}}}$$

叫做無限連分數（Infinite continued fraction）

符號：$S_0=[a_0]=a_0=\dfrac{a_0}{1}$

$$S_1=[a_0,a_1]=a_0+\frac{1}{a_1}=\frac{a_0a_1+1}{a_1}$$

$$S_2=[a_0,a_1,a_2]=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2}}=\frac{a_0a_1a_2+a_2+a_0}{a_1a_2+1}$$

$\vdots$

$$S_n=[a_0,a_1,a_2,\cdots\cdots a_{n-2},a_{n-1},a_n]=[a_0,a_1,a_2,\cdots\cdots a_{n-2},a_{n-1}+\frac{1}{a_n}]=[a_0,[a_1,a_2,\cdots\cdots a_n]]$$

$o\leqq n\leqq N$

定理1. $[a_0,a_1,a_2,\cdots\cdots a_n]$ 是一個連分數　p_n，q_n 定義如下

(A) $p_0=a_0$，　$p_1=a_0a_1+1,\cdots\cdots p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2}$

$\partial\leqq n\leqq N$

$(B)\ q_0=1 \qquad q_1=a_1, \cdots\cdots\cdots\cdots q_n=a_n q_{n-1}+q_{n-2}$

$\partial \leqq n \leqq N$

則 $S_n=[a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots a_n]=\dfrac{p_n}{q_n}\ (o \leqq n \leqq N)$

〔證明〕當 $n=o \quad S_0=[a_0]=a_0=\dfrac{a_0}{1}=\dfrac{p_0}{q_0}$

當 $n=1 \quad S_1=[a_0, a_1]=a_0+\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{a_0 a_1+1}{a_1}=\dfrac{p_1}{q_1}$

設 $n \leqq m \quad n<N$ 本定理成立

即：$[a_0, a_1, \cdots\cdots a_{m-1}, a_m]=\dfrac{p_m}{q_m}=\dfrac{a_m p_{m-1}+p_{m-2}}{a_m q_{m-1}+q_{m-2}}$

$[a_0, a_1, \cdots a_m, a_{m+1}]=[a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots a_m+\dfrac{1}{a_{m+1}}]$

$$=\frac{(a_m+\dfrac{1}{a_{m+1}})P_{m-1}+P_{m-2}}{(a_m+\dfrac{1}{a_{m+1}})q_{m-1}+q_{m2}}$$

$$=\frac{(a_m a_{m+1}+1)\ p_{m-1}+a_{m+1} p_{m-2}}{(a_m a_{m+1}+1)\ q_{m-1}+a_{m+1} q_{m-2}}$$

$$=\frac{a_m a_{m+1} p_{m-1}+p_{m-1}+a_{m+1} p_{m-2}}{a_m a_{m+1} q_{m-1}+q_{m-1}+a_{m+1} q_{m-2}}$$

$$=\frac{a_{m+1}(a_m p_{m-1}+p_{m-2})+p_{m-1}}{a_{m+1}(a_m q_{m-1}+q_{m-2})+q_{m-1}}=\frac{a_{m+1} p_m+p_{m-1}}{a_{m+1} q_m+q_{m-1}}$$

$$=\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$$

$\therefore \quad S_n=[a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots a_n]=\dfrac{p_n}{q_n}\ (o \leqq n \leqq N)$

因此我們發現任何有理數都可用有限的連分數表示

定理2.若 p_n, q_n 定義如定理1。

則(A) $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$

(B) $\dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$

(C) $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n$

(D) $\dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \dfrac{(-1)^n a_n}{q_n q_{n-2}}$

〔證明〕(A) $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}$

$= (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-1} - (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) p_{n-1}$

$= a_n p_{n-1} q_{n-1} + p_{n-2} q_{n-1} - a_n p_{n-1} q_{n-1} - p_{n-1} q_{n-2}$

$= p_{n-2} q_{n-1} - p_{n-1} q_{n-2}$

$= (-1)(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1})$

$= (-1)^{n-1}(p_1 q_0 - p_0 q_1)$

$= (-1)^{n-1}(a_0 a_1 + 1 - a_0 a_1)$

$= (-1)^{n-1}$

(B)由(A) $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$

$$\frac{p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n}{q_n q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$$

$(\because q_n q_{n-1} \neq 0)$

$$\therefore \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$$

(C) $p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2}$

$= (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) p_{n-2}$

$= a_n p_{n-1} q_{n-2} + p_{n-2} q_{n-2} - a_n q_{n-1} p_{n-2} - q_{n-2} p_{n-2}$

$= a_n (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1})$

$= a_n (-1)^{n-2}$

$= (-1)^n a_n$

(D)由(C) $\because p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = (-1)^n a_n$

$$\frac{p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2}}{q_{n-2} q_n} = \frac{(-1)^n a_n}{q_{n-2} q_n}$$

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{(-1)^n a_n}{q_{n-2} q_n}$$

定義2.

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots+\cfrac{1}{a_n}}}}$$ 叫做Simple continued fraction

若 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ 是自然數而 a_0 是整數

定理3.

若 $[a_0, a_1, \cdots\cdots a_n]$ 是一個Simple continued fraction

且 $S_n=[a_0, a_1, \cdots\cdots a_n]$

則(A) $S_0<S_2<S_4<\cdots\cdots \quad <S_7<S_5<S_3<S_1$

(B) $S_{2n}<S_{2n-1} \quad n>1$

(C)若 S_n 是Infinte Simple continued fraction則 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在

〔證明〕$S_n-S_{n-1}=\dfrac{p_n}{q_n}-\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\dfrac{p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n}{q_nq_{n-1}}$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{q_nq_{n-1}}$$

$$S_n-S_{n-2}=\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}=\frac{p_nq_{n-2}-p_{n-2}q_n}{q_nq_{n-2}}$$

$$=\frac{(-1)^n a_n}{q_nq_{n-2}}$$

$\because q_0=1$, $q_1=a_1>o$, $q_2=a_2q_1+q_0>o\cdots q_n>o$

$\forall n$, $q\,n>o$

且 $a_n>o$ 若 $n\geqq 1$

若 $n=2k$

$$S_n-S_{n-2}=\frac{(-1)^n a_n}{q_nq_{n-2}}>o$$

$S_{2k}-S_{2k-2}>o \qquad \therefore S_{2k}>S_{2k-2}$

若 $n=2k+1$

$$S_{2k+1}-S_{2k-1}=\frac{(-1)^{2k+1}a_{2k+1}}{q_{2k+1}q_{2k-1}}<0$$

$\therefore S_{2k+1}<S_{2k-1}$

$\therefore$(A)和(B)都成立

設兩數列$\{S_{2k}\}$和$\{S_{2k-1}\}$則$\{S_{2k}\}$有上界S_1且$\{S_{2k-1}\}$有下界S_0則$\exists\, \ell_1$和$\ell_2 \ni \ell_1=\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k}$

$\ell_2=\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k-1}$，我們欲證$\ell_1=\ell_2$

$$\left|S_{2k}-S_{2k-1}\right|=\left|\frac{p_{2k}}{q_{2k}}-\frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}}\right|=\left|\frac{P_{2k}q_{2k-1}-P_{2k-1}q_{2k}}{q_{2k}q_{2k-1}}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{q_{2k}q_{2k-1}}\right|$$

$\forall n \quad q_n$愈大當$n\to\infty$

$q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}>a_nq_{n-1}+1>n$

因此$|S_{2k}-S_{2k-1}|\to 0$　當$k\to\infty$

$\therefore \quad \ell_1=\ell_2$

定理4. $[a_0, a_1, \cdots\cdots a_n]$是一個 finite simple continued fraction 且 q_n 定義如定理1規定

則(A) $q_n>q_{n-1}$　若$n\geqq 2$　$q_1\geqq g_0$

(B) $q_n\geqq n$　$\forall n$　$q_n>n$　若$n>3$

(C) Simple Continued fraction 收斂於它們的最低項

〔證明〕:

(A)非常明顯的$q_1\geqq q_0$

$q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}\geqq a_nq_{n-1}+1>a_nq_{n-1}\geqq q_{n-1}$

$\therefore q_n\geqq q_{n-1}$　（$\because a_n$是自然數）

(B) $q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}>a_nq_{n-1}+1>a_n(a_{n-1}q_{n-2}+q_{n-3})+1\geqq n$

$\Rightarrow q_n\geqq n$

同理　$q_n>n$　若$n>3$

(C)設其收斂於$\frac{p_n}{q_n}$，欲證$(p_n, q_n)=1 \quad \forall n$

設$(p_n, q_n)=d>1 \Rightarrow d \mid p_n$且$d \mid q_n \ \forall_n$

$\therefore p_n q_{n-1}-q_n p_{n-1}=(-1)^{n-1} \Rightarrow \alpha \mid (-1)^n \Rightarrow \alpha \quad =1$與假設矛盾

定義3.

一個自然數無限數列$a_0, a_1, \cdots\cdots$(也許a_0除外)定義一個 infinte simple continued fraction $[a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots]$

則$[a_0, a_1, \cdots\cdots]$的值

定義如$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$，$S_n=[a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots a_n]$且我們亦可寫

$$\lim_{n\to\infty} S_n=[a_0, a_1, \cdots\cdots]$$

定理5.$[a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots]$是一個 infinite simple continued frction

則$[a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots]$的值表示一個無理數.

〔證明〕設$\alpha=[a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots]$，依定理3可知$\alpha$介於$S_n$和$S_{n+1}$之間

$$\left|\alpha-S_n\right|<\left|S_n-S_{n+1}\right| \quad \text{但} S_n=\frac{p_n}{q_n} \quad S_{n+1}=\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$$

$$\Rightarrow\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\frac{p_n q_{n+1}-q_n p_{n+1}}{q_n q_{n+1}}\right|$$

依定理2(A) $\left|\alpha-\frac{r_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n q_{n+1}}$

但 $\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|>o \quad \because \alpha \neq S_n$

$$\Rightarrow o<\left|q_n \alpha-p_n\right|<\frac{1}{q_{n+1}}$$

若$\alpha=\frac{a}{b} \quad (a, b)=1 \quad b>o$

$$\Rightarrow o \left| q_n \cdot \frac{a}{b}-p_n \right|<\frac{1}{q_{n+1}}$$

$$\Rightarrow o<\left|q_n a-p_n b\right|<\frac{b}{q_{n+1}}$$

且由於q_n漸增當$n\to\infty$ 因此當n相當大時，

$$\ni b<q_{n+1}\Rightarrow\frac{b}{q_{n+1}}<\Bigg|$$

因此 $0<|q_na-p_nb|<|$ 且$\because q_n,a,p_n,b$都是整數

$\Rightarrow$ q_na-p_nb是整數與假設$(a,b)=1$矛盾

$\therefore\alpha$是無理數

亦就是$[a_0,a_1,a_2,\cdots\cdots]$是無理數

定理6。若$[a_0,a_1,\cdots\cdots a_j]=[b_0,b_1,\cdots\cdots b_n]$ 是二個 finite simple continued fraction 且 $a_j>1$, $b_n>1$ 則 $j=n$ 且 $a_i=b_j$ $\forall i=0,1,2,\cdots\cdots n$

〔證明〕設$y_i=[b_i,b_{i+1},\cdots\cdots b_n]$ 則$y_0=[b_0,b_1,\cdots\cdots b_n]$

$$y_i=[b_i,b_{i+1},\cdots\cdots b_n]=b_i+\frac{1}{[b_{i+1},\cdots\cdots b_n]}$$

$$=b_i+\frac{1}{y_{i+1}}$$

$b_i>1$ $\forall i=1,2\cdots\cdots n-1$

$$\Rightarrow\begin{cases}y_i>b_i & \forall i=1,2,\cdots\cdots n-1\\ y_n=b_n\end{cases}$$

但 $y_i=b_i+\dfrac{1}{y_{i+1}}<b_i+1\Rightarrow[y_i]=b_i$

$\forall i=1,2,\cdots\cdots n$

同理$z_i=[a_i,a_{i+1},\cdots\cdots,a_j]$

$[z_i]=a_i$ $\forall i=1,2,\cdots\cdots j$

$\because[a_0,a_1,\cdots\cdots,a_j]=b_0,b_1,\cdots\cdots,b_n]$ $\Rightarrow y_0=z_0$.

且$y_0=b_0+\dfrac{1}{y_1}$ $\Rightarrow[y_0]=b_0$

$\because y_0=z_0$ $\Rightarrow[y_0]=[z_0]\Rightarrow a_0=b_0$

$$\frac{1}{y_1}=y_0-b_0=z_0-a_0=\frac{1}{z_1}\Rightarrow y_1=z_1$$

$\Rightarrow[y_1]=[z_1]\Rightarrow b_1=a_1$

利用數學歸納法

設 $y_i = z_i$ 且 $a_i = b_i$ 證明 $y_{i+1} = z_{i+1}$ 且 $a_{i+1} = b_{i+1}$

$$\frac{1}{z_{i+1}} = z_i - a_i = y_i - b_i = \frac{1}{y_{i+1}} \Rightarrow y_{i+1} = z_{i+1}$$

$\Rightarrow [z_{i+1}] = [y_{i+1}] \Rightarrow b_{i+1} = a_{i+1}$

因此 $j = n$ 否則我們可設 $j < n$ $z_j = y_j$ $a_j = b_j$

但 $y_j = a_j$ 且 $y_i > b_j \Rightarrow y_j = a_j > b_j$ 與 $a_j = b_j$ 矛盾

同理 $j > n$ 時亦矛盾

因此本定理成立

定理7.設 x 是正實數則 $[a_0, a_1, \cdots\cdots, a_{n-1}x] = \dfrac{x p_{n-1} + p_{n-2}}{x q_{n-1} + q_{n-2}}$

$\{p_n\}$ 和 $\{q_n\}$ 定義如定理1

〔證明〕:

設 $n = 2$

$$[a_0, a_1, x] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x}} = a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{x a_1 + 1}{x}}$$

$$= a_0 + \frac{x}{x a_1 + 1} = \frac{x a_0 a_1 + a_0 + x}{x a_1 + 1}$$

$$= \frac{x(a_0 a_1 + 1) + a_0}{x a_1 + 1} = \frac{x p_1 + p_0}{x q_1 + q_0}$$

設 $n = m$ 時原式成立

$$[a_0, a_1, \cdots\cdots a_{m-1} x] = \frac{x p_{m-1} + p_{m-2}}{x q_{m-1} + q_{m-2}}$$

$$[a_0, a_1, \cdots\cdots, a_m, x] = [a_0, a_1, \cdots\cdots a_m + \frac{1}{x}]$$

$$= \frac{(a_m + \frac{1}{x}) p_{m-1} + p_{m-2}}{(a_m + \frac{1}{x}) q_{m-1} + q_{m-2}} = \frac{x a_m p_{m-1} + p_{m-1} + x p_{m-2}}{x a_m q_{m-1} + q_{m-1} + x q_{m-2}}$$

$$= \frac{x(a_m p_{m-1} + p_{m-2}) + p_{m-1}}{x(a_m q_{m-1} + q_{m-2}) + q_{m-1}} = \frac{x p_m + p_{m-1}}{x q_m + q_{m-1}}$$

$\therefore$ 根據數學歸納法原理，所以本定理成立。

定理8. 設 $\theta = [a_0, a_1, \cdots\cdots]$ 是一個 infinite simple continued fraction

若 $\theta_1 = [a_1, a_2, \cdots\cdots]$ 則 $\theta = a_0 + \dfrac{1}{\theta_1}$

〔證明〕:

由定理 3 知 $S_0 < \theta < S_1$

$$a_0 < \theta < a_0 + \frac{1}{a_1} \leqq a_0 + 1$$

$\therefore [\theta] = a_0$

其餘的部分由定理 6 可確知必成立

定理9. 設 $[a_0, a_1, \cdots\cdots]$ 和 $[b_0, b_1, \cdots\cdots]$ 是二個不同的 infinte simple continued fraction 設 α 和 β 分別表示其值則 $\alpha \neq \beta$

〔證明〕:

設 $[a_0, a_1, \cdots\cdots] = [b_0, b_1, \cdots\cdots]$ 亦就是 $\alpha = \beta$ 由定理 8 知

$a_0 = [\alpha] = [\beta] = b_0 \Rightarrow a_0 = b_0$

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, \cdots\cdots]} \qquad \beta = b_0 + \frac{1}{[b_0, b_1, \cdots\cdots]}$$

但 $\alpha = \beta$ 且 $a_0 = b_0$ 因此 $[a_1, a_2, \cdots] = [b_1, b_2, \cdots]$

反覆利用定理 8

因此 $a_1 = b_1,\ \ a_2 = b_2, \cdots\cdots$

所以本定理成立

定理10: 設 α 是一個實數則存在唯一 simple continued fraction 而其值爲 α，且若 α 是有理數則連分數是 finite simple continued fraction，若 α 是無理數則連分數是 infinite simple continued fraction（註唯一性須 finite simple continued fraction 才成立）

〔證明〕:

根據定理 7 與定理 9 可證得唯一性

設α不是整數 $[\alpha]=a_0$

則(1) $\alpha=a_0+\dfrac{1}{r_1} \Rightarrow \dfrac{1}{r_1}=\alpha-a_0$

由定義知 $o<\dfrac{1}{r_1}<1 \Rightarrow r_1>1$

若r_1是整數則成立
若r_1不是整數，繼續上述作法
若r_n是整數，則成立
$[a_0, r_1, r_2, \cdots\cdots r_n]$ 若r_n不是整數 設$a_n=[r_n]$

定義(2) $r_n=a_n+\dfrac{1}{r_{n+1}}$

由(1) $\alpha=[a_0, r_1]$ 由(2) $\alpha=[a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n, r_{n+1}]$
因此對於任何的n都成立

若α是有理數則所有r_n都是有理數 設$r_n=\dfrac{a}{b}$

$\Rightarrow r_n-a_n=\dfrac{a}{b}-a_n=\dfrac{a-a_nb}{b}=\dfrac{c}{b}$

設$a-a_nb=c$

由(2) $o<r_n-a_n=\dfrac{1}{r_{n+1}}<1 \Rightarrow o<\dfrac{c}{b}<1 \Rightarrow c<b$

但$\dfrac{1}{r_{n+1}}=\dfrac{c}{b} \Rightarrow r_{n+1}=\dfrac{b}{c}$ 因此r_n, $r_{n+1}\cdots\cdots$

就可表示如$\dfrac{a}{b}$，$\dfrac{b}{c}$，$\cdots\cdots\dfrac{\ell}{i}\cdots\cdots$

對於數列 $\dfrac{a}{b}$，$\dfrac{b}{c}$，$\dfrac{c}{d}\cdots$分母b，c，b，…都是正整數

且漸增，因此(1)可表示所討論數列中，分母中的一個元素
因此在這步驟就結束 且$\alpha=[a_0, a_1, \cdots\cdots a_n]$

若 α 是無理數則所有 r_n 都是無理數

設 $[a_0, a_1, \cdots\cdots a_n] = \dfrac{p_n}{q_n}$　$\alpha = [a_0, \cdots\cdots, a_{n-1}, r_n]$

$$= \frac{p_{n-1} r_n + p_{n-2}}{q_{n-1} r_n + q_{n-2}} \text{（由定理 8 知）}$$

但 $\dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}}$（由定理 1 知）

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{r_n p_{n-1} + p_{n-2}}{r_n q_{n-1} + q_{n-2}} - \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}}\right|$$

$$= \left|\frac{(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1})(r_n - a_n)}{(r_n q_{n-1} + q_{n-2})(a_n q_{n-1} + q_{n-2})}\right| < \frac{1}{|(r_n q_{n-1} + q_{n-2})(a_n q_{n-1} + q_{n-2})|}$$

$$= \frac{1}{q_n \bullet q_n} = \frac{1}{q_n^2}$$

$$\therefore \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$$

若　$n \longrightarrow \infty$　$q_n \longrightarrow \infty$　$\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{p_n}{q_n}$

$\therefore \alpha$ 是 infinite simple continued fraction 的值。

現以幾個常見的無理數　爲例子

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)} = 1 + \frac{1}{2 + \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots\cdots}}}$$

$$\sqrt{3}=1+(\sqrt{3}-1)$$

$$=1+\frac{2}{\sqrt{3}+1}=1+\frac{2}{2+(\sqrt{3}-1)}=1+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{\sqrt{3}+1}}$$

$$=1+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+(\sqrt{3}-1)}}=1+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{\sqrt{3}+1}}}$$

$$=1+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cdots\cdots}}}$$

$$\sqrt{5}=2+(\sqrt{5}-2)$$

$$=2+\frac{1}{\sqrt{5}+2}=2+\frac{1}{4+(\sqrt{5}-2)}$$

$$=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\sqrt{5}-2}}=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+(\sqrt{5}-2)}}$$

$$=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cdots\cdots\cdots}}}}$$

$$\sqrt{7}=2+(\sqrt{7}-2)=2+\frac{3}{\sqrt{7}+2}$$

$$=2+\frac{3}{4+(\sqrt{7}-2)}=2+\cfrac{3}{4+\cfrac{3}{\sqrt{7}+2}}$$

$$=2+\cfrac{3}{4+\cfrac{3}{4+\cfrac{3}{4+\cdots\cdots\cdots}}}$$

$$\sqrt[3]{2}=1+(\sqrt[3]{2}-1)$$

$$=1+\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$$

$$=1+\frac{1}{\frac{3}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}+3}$$

我們可利用　$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

必可以一個無限連分數表示 ， 至於其他 4 次方根以上可利用

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

，不過由於過分麻煩本文不予詳細討論。

結論：總之對於任一實數都可以連分數表示

至於有理數可以有限連分數表示

無理數可以無限連分數表示

不過若不限制於 Simple continued fration 表示的方法並非唯一。

例如：

$$\sqrt{2}=(\sqrt{2}+1)-1=-1+\frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$=-1+\frac{1}{(\sqrt{2}+1)-2}=-1+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}-2}$$

$$=-1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}-2}=-1+\cfrac{1}{-2+\cfrac{1}{-2+\cfrac{1}{-2+\cdots\cdots}}}$$

$$\sqrt{3}=(\sqrt{3}+1)-1=-1+\frac{2}{\sqrt{3}-1}$$

$$=-1+\frac{2}{\sqrt{3}+1)-2}=-1+\cfrac{2}{-2+\cfrac{2}{-2+\cfrac{2}{-2+\cdots\cdots}}}$$

$$\sqrt{5}=-2+(\sqrt{5}+2)=-2+\frac{1}{\sqrt{5}-2}$$

$$=-2+\cfrac{1}{-4+\cfrac{1}{\sqrt{5}-2}}=-2+\cfrac{1}{-4+\cfrac{1}{-4+\cfrac{1}{-4+\cdots\cdots}}}$$

$$\sqrt{7}=-2+(\sqrt{7}+2)=-2+\frac{3}{\sqrt{7}-2}$$

$$=-2+\cfrac{3}{-4+\cfrac{3}{\sqrt{7}-2}}=-2+\cfrac{3}{-4+\cfrac{3}{-4+\cfrac{3}{-4+\cdots\cdots}}}$$