線性計劃之理論推廣

高中組教師數學

省立高雄中學　　　　製作：林　文　東

一、前　言：

線性計劃在數學中是一支新起的部門，它主要的基礎是受1930年J.von Neumann與W.Leentief之經濟理論影響，而於1940年爲F.L.Hitihcoch與L.Kantorovitch等人所建立，而今日在工程學上與經濟學上都廣泛的應用。所謂線性計劃乃在求定義於有界多面凸集合之線性函數：

$$f(x_i)C_1X_1+C_2X_2+\cdots\cdots+C_nX_n+d$$

之極大值與極小值的問題。本文主要將高中數學程度所提及之二維空間中線性計劃的理論推廣到n維空間。

二、多面凸集合：

在研討線性計劃的理論之前，須先定義凸集合與多面凸集合的意義，因爲在二維空間中，有下列之一個常用定理：若兩位置向量$\overrightarrow{A}$，$\overrightarrow{B}$與任一位置向量$\overrightarrow{P}$，且$P\in\overline{AB}$，則$\overrightarrow{P}=t\overleftarrow{A}+(1-t)\overrightarrow{B}$，$0\leqq t\leqq 1$。所以我們可定義凸集合如下：

㈠定義：設n維空間$V_n(R)$中，有一點集合S，若S中之任意兩點A，B，而連接A與B所得之線段AB恆包含於S，則稱S爲凸集合（Convex Set），而一點及空集合均視爲凸集合。換言之：若A，B∈S且$\overrightarrow{P}=t\overrightarrow{A}+(1-t)\overrightarrow{B}$，$t\in R$，$0\leqq t\leqq 1$，恆有P∈S，則稱爲凸集合。由此定義，我們可以證明下列之定理：

(二)定理：有限個凸集合的交點爲凸集合。

證明：(1)令 u 與 v 爲二個凸集合，且$W = u \cap v$。

若W爲空集合或僅含一點，則視爲凸集合，而無須證明。若W至少含有相異兩點，命爲A，B，則$A, B \in u$且$A, B \in v$，但u與v均爲凸集合，故$\overline{AB} \subset u$且$\overline{AB} \subset v$，故$\overline{AB} \subset u \cap v$。即$\forall A, B \in W \Rightarrow \overline{AB} \subset W$故W爲凸集合。

(2)設有K個凸集合之交集W爲凸集合，而今另一個凸集合爲T，則由(1)已證得$W \cap T$爲凸集合，即$K+1$個凸集合之交集也是凸集合。依數學歸納法知任意n個凸集合之交集爲凸集合。

(三)定義：設n維空間$V_n(R)$中，對於n元一次實係數方程式

$A_1X_1 + A_2X_2 + \cdots\cdots + A_nX_n = C$，即$\vec{A} \cdot \vec{X} = C$但$C \in R$，$\vec{A} = [a^1, a^2, \cdots\cdots, a_n]$，$\vec{X} = [x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n]$。

若滿足此方程之所有點$X = (x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)$所成之集合，稱爲n維空間的一個超越平面（Hyper plane）；若滿足下列不等式：

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots\cdots + a_nx_n < c$（或$> c$），即

$\vec{A} \cdot \vec{X} < C$或$\vec{A} \cdot \vec{X} > C$

之所有點的集合，則稱爲n維空間中之開半空間（Open Half —Space）；若滿足下列不等式：

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_nx_n \leqq C$〔或$\geqq C$〕，即

$\vec{A} \cdot \vec{X} \leqq C$或$\vec{A} \cdot \vec{X} \geqq C$

之所有點的集合，則稱爲 n 維空間中之閉半空間。（Closed Half—Space）

㈣定理：半空間爲凸集合。

設 n 維空間 v_n（R）中之一半空間 $S = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots \cdots\cdots + a_nx_n \leqq C$ 即 $\vec{A}\cdot\vec{X} \leqq C$，$C \in R$，對於 S 中之任二點 P 與 Q，即 $\vec{A}\cdot\vec{P} \leqq C$，$\vec{A}\cdot\vec{Q} \leqq C$，令 $\overline{PQ}$ 上任一點 Σ，即 $\vec{\Sigma} = t\vec{P} + (1-t)\vec{Q}$，$0 \leqq t \leqq 1$，則 $\vec{A}\cdot\vec{\Sigma} = t\vec{A}\cdot\vec{P} + (1-t)\vec{A}\cdot\vec{Q} \leqq tc + (1-t)c = C$，故 $\Sigma \in S$，即證明 S 爲凸集合，同理可證明，其他之半空間：

$\vec{A}\cdot\vec{X} \geqq C$，$\vec{A}\cdot\vec{X} < C$，或 $\vec{A}\cdot\vec{X} > C$ 均爲凸集合，根據以上之二定理，可推得下面之結論：有限個半空間之交集爲一凸集合。

㈤定義：在 n 維空間 v_n（R）中，有 m 個半空間：

$\vec{A}\cdot\vec{X} \leqq C_1$，$\vec{A}_2\cdot\vec{X} \leqq C_2$，………，$\vec{A}_m\cdot\vec{X} \leqq C_m$

之交集稱爲多面凸集合（Polyhedral convex set）若 $m > n$ 而此多面凸集合不能包含任一射線，則稱此多面凸集合爲有界（Bonnded），否則稱爲無界（unbonnded）。

㈥定義：設 n 維空間 v_n（R）中，一多面凸集合W，

若(i)一點 $T \in W$，且(ii)T 爲W之 n 個超越界平面(Bonnding hyperplane) 之交集之點（n 爲此空間之維數），則稱 T 爲W之一極點（Extrem point）。

一個多面凸集合W之極點，一般言，可由其超越界平面之方程式組解得其點坐標。

三、線性計劃之理論：

以上已經說明了多面凸集合及其極點的意義，現在進而探討定義於有界多面凸集合之線性函數的極大與極小的位置問題。

(一)定義：設n維空間$v_n(R)$中，令$A_1, A_2, \cdots\cdots, A_m \in v_n(R)$，若有m個非負數實數：

$$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_m \text{使} \vec{\Sigma} = a_1\vec{A_1} + a_2\vec{A_2} + \cdots\cdots + a_m\vec{A_m}\text{，且} a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_m = 1$$

則稱$\vec{\Sigma}$為$\vec{A_1}, \vec{A_2}, \cdots\cdots, \vec{A_m}$之凸性組合（Comvex combination）

(二)定理：設n維空間$v_n(R)$中，有一個有界多面凸集合W，係由不等式組$\vec{A_i} \cdot \vec{X} \leqq C_i$所定義，$i = 1, 2\cdots\cdots m$而W之所有極點是$T_1, T_2, \cdots\cdots, T_m$，則有下面的性質：

(i)若一點Σ且$\vec{\Sigma} = a_1\vec{T_1} + a_2\vec{T_2} + \cdots\cdots + a_m\vec{T_m}$（即極點之凸性組合）則$\Sigma \in W$

(i i)W中之每一點必可寫成極點之凸性組合。

證明：(i)因$T_1, T_2 \cdots\cdots T_m$為W之極點，故滿足$\vec{A_i} \cdot \vec{T_i} \leqq C_i$其中$i = 1, 2, \cdots\cdots\cdots, m$，令$\vec{\Sigma} = a_1\vec{T_1} + a_2\vec{T_2} + \cdots\cdots + a_m T_m$其中一切$a_i$是非負實數且$a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_m = 1$，故$\vec{A_i} \cdot \vec{\Sigma} = a_1\vec{A_i} \cdot \vec{T_1} + a_2\vec{A_i} \cdot \vec{T_2} + \cdots\cdots + a_m\vec{A_i} \cdot T_n \leqq a_1 c_i + a_2 c_i + \cdots\cdots a_m c_i = (a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_m) c_i = c_i$，故之$\in W$

(ii) 要證明這個性質，吾人須先說明一個定義與一個預備定理如下：

〔定義〕：設n維空間$v_n(R)$中，一個有界多面凸集合W_0，具有n＋1個極點，$T_1, T_2 \cdots\cdots\cdots\cdots T_{n+1}$，若

$$\left\{\overrightarrow{T_1T_2}, \overrightarrow{T_1T_3} \cdots\cdots \overrightarrow{T_1T_{n+1}}\right\}\text{是線性獨立，則}$$

W_0稱為n維簡化體（n—Simplex），換言之，W_0之n＋1個極點，都不在同一超越平面上者。例如：

在一維空間的簡化體是線段，二維空間的簡化體是三角形區域，三維空間的簡化體是四面體（即三角錐體）。

〔定理〕：設n維空間 $v_n(R)$ 中，一個n維簡化體W_0，其$n+1$個極點是T_1, T_2，………，T_{n+1}，則W_0中任一點X_1恆使$\vec{X}$表成$\vec{T_1}$ • $\vec{T_2}$，………，$\vec{T}_{n+1}$之凸性組合，並且表示法唯一

〔證明〕：因W_0爲n維簡化體，故n個向量$\left\{\overrightarrow{T_1T_2}, \overrightarrow{T_1T_3}, \cdots\cdots, \overrightarrow{T_1T_{n+1}}\right\}$是線性獨立，所以此n個向量構成$v_n(R)$之一基底。令$W_0$中之任一點X 而$X=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$，則$\overrightarrow{T_1X} < W_0$，故恰有n個非負實數$\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_n$，且$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$使得$\overrightarrow{T_1X} = \lambda\overrightarrow{T_1T_2} + \lambda_2\overrightarrow{T_1T_3} + \cdots\cdots + \lambda_n\overrightarrow{T_1T_{n+1}}$。令$T_i = (t_1^{(i)}, t_2^{(i)}, \cdots\cdots, t_n^{(i)})$，$i=1, 2, 3, \cdots\cdots n+1$，則$\overrightarrow{T_1X} = [x_1 - t_1^{(1)}, x_2 - t_2^{(1)}, \cdots\cdots, x_n - t_n^{(1)}]$且$\overrightarrow{T_1T_k} = [t_1^{(k)} - t_1^{(1)}, t_2^{(k)} - t_2^{(1)}, \cdots\cdots, t_n^{(k)} - t_n^{(1)}]$，$k=2, 3\cdots\cdots, n+1$，故$[x_1 - t_1^{(1)}, x_2 - t_2^{(1)}, \cdots\cdots, x_n - t_n^{(1)}] = \sum_{n=2}^{n+1} \lambda_k [A_1^{(k)} - t_1^{(1)}, t_2^{(k)} - t_2^{(1)}, \cdots\cdots, t_n^{(k)} - t_n^{(1)}] = [\sum_{k=2}^{n+1} \lambda_k (t_1^{(k)} - t_1^{(1)}), \sum_{k=2}^{n+1} \lambda_k (t_2^{(k)} - t_2^{(1)}), \cdots$

$\cdots\cdots, \sum_{k=2}^{n+1} \lambda_k (t_n^{(k)} - t_n^{(1)})]$ 依向量相等定義，知道：

$x_i - t_i^{(1)} = \sum_{k=2}^{n+1} \lambda_k (t_i^{(k)} - t_i^{(1)})$，$i=1$，$2$，$3$，$\cdots\cdots$，$n$，故 $X_i = \sum_{k=2}^{n+1} \lambda_k t_i^{(k)} + t_i (1 - \sum_{k=2}^{n+1} \lambda_k)$，令 $\lambda_1 = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k$，則 $x_i = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k t_i^{(k)}$ $i=1$，2，3，$\cdots\cdots$，n，且 $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$，即 $\vec{X} = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \vec{T}_k$ 且一切 $\lambda_k \geq 0$（$k=1$，2，3，$\cdots\cdots$，$n+1$），$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$，亦即 $\vec{X}$ 表成 $\vec{T_1}$，$\vec{T_2}$，，$\cdots\cdots$，$\overrightarrow{T_{n+1}}$ 之凸性組合且表示法唯一。

今由上述預備定理證明(ii)：

設 n 維空間 $v_n(R)$ 中，有界多面凸集合W，且W具有 m 個極點，命爲 T_1，T_2，T_3，$\cdots\cdots T_n$，$\cdots\cdots T_m$，($m>n$)，則W可分割爲有限個 n 維簡化體，因在二維空間 $v_2(R)$ 中，一個凸多邊形區域可分割爲有限個三角形區域，在三維空間 $v_3(R)$ 中，一個凸多邊形亦可分割爲有限個四面體，設依歸納法知，在 n 維空間 $v_n(R)$ 中，一個有界多面凸集合W，可分割爲有限個 n 維簡化體。設W中任一點 x 則 x 必在一個 n 維簡化體 W_0 中，令 W_0 之極點爲 T_1，T_2，T_{n+1}，故依上述之預備定理知 x 可表成 $\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{T_k}$ 且一切 $\lambda_k \geq 0$，$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$

。令$\lambda_{n+2}=\lambda_{n+3}=\cdots\cdots=\lambda_m=0$，則$\vec{X}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i T_i$且

$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$。因此W中之每一點必可寫成極點$T_1$，$T_2$，$T_3$，

$\cdots\cdots T_n$，$\cdots\cdots$，T_m之凸性組合。

定理：設n維空間$v_n(R)$中，有一個有界多面凸集合w，其係由不等式組$A_i x\leqq C_i$所定義（$i=1, 2, \cdots\cdots, m$）$F=(c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n)$，$X=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)\in W$，若定義於W之一線性函數，$f=\vec{F}\cdot\vec{X}=c_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_nx_n$，則有二個性質：

(i)W有集一極點，其函數是f之極大值或極小值。

(ii)f之極大值或極小值必在W之某些極點之凸性組合內。

證明：今就f之極大值討論（而極小值可平行討論之）。

(i)依本節之(二)的定理知道W中之任一點x可寫成$\vec{x}=a_1\overrightarrow{T_1}+a_2\overrightarrow{T_2}+\cdots\cdots+a_m\overrightarrow{T_m}$，其中$T_1$，$T_2$，$\cdots\cdots$，$T_m$為W之所有極點，而$a_1$，$a_2$，$\cdots\cdots$ a_m均為非負之實數，且$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_m=1$，令在極點$T_k$之函數值$\vec{F}\cdot\overrightarrow{T_k}=M$，不比其極點$T_i=$（$i=1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots\cdots, m$）之函數值小，則$\vec{F}\cdot\vec{X}=\vec{F}\cdot(a_1\overrightarrow{T_1}+a_2\overrightarrow{T_2}+\cdots\cdots+a_m\overrightarrow{T_m})=a_1\vec{F}\cdot\overrightarrow{T_1}+a_2\vec{F}、\overrightarrow{T_2}+\cdots\cdots+a_mF\cdot\overrightarrow{T_m}=a_1M+a_2M+\cdots\cdots+a_mM=(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_m)M=M$，在極點$T_k$之函數值M，此線性函數值$\vec{F}\cdot\vec{X}\leqq M$，所以，W有一極點其函數值是F之極大值。

(ii)令F之極大值M取自於W之某些極點T_1，T_2，T_3，T_j，其中$j\leqq m$，則$\vec{F}\cdot\overrightarrow{T_1}=M$，$\vec{F}\cdot\overrightarrow{T_2}=M$，

$\cdots\cdots$，$\vec{F}\cdot\overrightarrow{T_J}=M$ 且 $\vec{F}\cdot\overrightarrow{T_{J+1}}<M$，$\cdots\cdots$，$\vec{F}\cdot\overrightarrow{T_m}<M$ 若W之某一點 x，而 $\vec{x}=a_1\overrightarrow{T_1}+a_2\overrightarrow{T_2}+\cdots\cdots+a_J\overrightarrow{T_J}$ 且 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_J=1$。則 $\vec{F}\cdot\vec{X}=\vec{F}(a_1\overrightarrow{T_1}+a_2\overrightarrow{T_2}+\cdots\cdots+a_J\overrightarrow{T_J})=a_1M+a_2M+a_3M+\cdots\cdots+a_JM=(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_J)M=M$。另一方面上，若W之某一點不是上面的形式，令X可寫成 $\vec{X}\ a_1T_1+a_2T_2+\cdots\cdots+a_J\ \overrightarrow{T_J}+a_{J+1}\cdot\ \overrightarrow{T_{J+1}}+\cdots\cdots+a_m\overrightarrow{T_m})=a_1\ \vec{T}\cdot\vec{F}+\cdots\cdots+a_J\vec{F}\cdot\overrightarrow{T_J}+a_{J+1}\ \vec{F}\cdot\overrightarrow{T_{J+1}}+\cdots\cdots+a_m\vec{F}\cdot\overrightarrow{T_m})$。
$<a_1M+a_2M+\cdots\cdots+a_JM+a_{J+1}M+\cdots\cdots+a_mM=M$。因此 $\vec{F}\cdot\vec{X}=M$ 之充要條件是 $\vec{X}$ 爲 $\overrightarrow{T_1}\cdot\overrightarrow{T_2}$，$\cdots\cdots$，$\overrightarrow{T_J}$，之凸性組合。由上面定理，吾人可推得下面之結論：設定義於一有界多面凸集合之W之線性函數：

$f(xi)-C_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_nx_n+d$，其中 c_1，c_2，$\cdots\cdots$，c_n，及d爲固定之實數，則 f 的極大值或極小值，也可取自於W之極點。

四、結論：

一般言，線性計劃，在求某些個非負值之變數，在定義於某一個有界之多面凸集合W內之線性函數 f 的極大值或極小值，可取自於W的極點。假若W是無界，則函數 f 可能沒有極大值或極小值；假若W有兩個極點的函數值，是 f 的極大值或極小值，則此兩極點所成的線段上的每一點的函數值，都是 f 的極大值或極小值。