矩陣運算之推廣研究

高中教師組數學

省立台北第一女子高級中學　　　　　　　　　　**製作：**張　深　永

摘要：

一、符號之規定：

(1)$N=\{x \mid x$ 為正整數$\}$，$Z=\{x \mid x$ 為整數$\}$

(2)M_n 表所有整數元之 n 階方陣所成之集合。

(3)設 $A \in M_n$，則 det A 表A所對應之行列式之值。

(4)$I_n \in M_n$，且 $I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 \end{pmatrix}$

二、定義：

(1)設 A、$B \in M_n$，若 $AB=BA=I_n$，則稱A與B互為乘法反元素。

(2)設 $A \in M_n$，若 $\det A=1$ 或 $\det A=-1$，則稱A為單位矩陣。

(3)設 A、$B \in M_n$，若存在 u、$V \in M_n$ 且 u 與 V 均為單位矩陣，使 $A=uBV$，則稱A與B相似，以 $A \sim B$ 表示。

(4)設 A、$B \in M_n$，若 $C \in M_n$ 使 $A=CB$，則稱B為A之右因子，以 $B \mid A$ 表示。

(5)設 $A \in M_n$，$\det A \neq 0$，$\det \neq \pm 1$，若"若 $A=BC$，B、$C \in M_n$，則必有B或C為單位矩陣"，則稱A為質矩陣；否則稱A為合成矩陣。

(6)設 A、$B \in M_n$，A與B均非零矩陣，若D為A與B之右因子，且A與B之任一右公因子均為D之右因子，則稱D為A與B之最大右公因子，以 $D=(A,B)$ 表示。

(7)設 A、$B \in M_n$，A與B均非零矩陣，若A與B均為M之右因子，M不為零矩陣，且M為A與B之任意倍積之右因子，則稱

M為A與B之最小左倍積。

三、定理：

(1)設$A\in M_n$，$\det\neq o$，若$A=[aij]_{n\times n}$，則$A^{-1}=[bij]_{n\times n}$，

其中$bij=(-1)^{i+j}\frac{\det A_{ij}}{\det A}$，$A_{ij}$為將A之第 i 列第 j 行去掉後其他各元之位置均不變所成之 n − 1 階方陣。

(2)設A、B、$C\in M_n$，則恆有(i)A∼A；(ii)若A∼B，則B∼A；(iii)若A∼B，B∼C，則A∼C。

(3)設$A\in M_n$，若$B\in M_n$且$B=\begin{pmatrix} d_1 & o & o\cdots\cdots\cdots o \\ o & d_1d_2 & o\cdots\cdots\cdots o \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ o & o & o\cdots d_1d_2\cdots d_n \end{pmatrix}$，

其中$d_i\in NV\{o\}$，則A∼B。

(4)設A、B、$C\in M_n$，若$A\mid B$，$B\mid C$，則$A\mid C$。

(5)設A、B、$C\in M_n$，若$A\mid B$，$A\mid C$，則對任意x、$Y\in M_n$恆有$A\mid(xB+YC)$，$A\mid(xB-YC)$

(6)設$A\in M_n$，則"A於質矩陣"之充要條件為"$\mid\det A\mid$為質數"。

(7)任一合成矩陣A均可表為S個質矩陣之積，其中S為$\mid\det A\mid$之質因數之個數。

(8)設A、$B\in M_n$，A與B均非零矩陣，則必有$D\in M_n$使$D=(A,B)$，且必有$PQ\in M_n$使$PA+QB=D$。

(9)設A、$B\in M_n$，$D=(A,B)$，A與B均非零矩陣，則A與B之任一個最大右公因子必為uD，其中u為單位矩陣。

(10)設A、$B\in M_n$，$\det A\neq o$，$\det B\neq o$，則A與B必有一個最小左倍積M，且M滿足$\det M\neq o$，其任一個最小左倍積必為uM，其中u為單位矩陣。

(11)設$A\in M_n$，$m\in Z-\{o\}$，則必有Q、RM_n使$A=mQ+R$，其中$o\leqq\mid\det R\mid<\mid m\mid^n$。

(12)設A、$B\in M_n$，$\det B\neq o$，則必有Q、RM_n使$A=QB+R$，其中$o\leqq\mid\det R\mid<\mid\det B\mid$。