

環形軌道的能量

高中組物理

省立虎尾女子高級中學

製作學生：劉芬菁 吳秀差

指導老師：王 水 聰

一、動機：

當我們上物理課時，討論到伽利略的慣性定律，有段「小球在斜面上運動時，無論斜面斜度如何，小球均有上升到原來高度的趨勢」，經由實驗小球始終無法達到原有高度，而且其高度又因斜面而不同，因此激發起我們研究此問題的興趣，究竟這個原因是摩擦？或是其他因素？這樣消耗能量又多大？這個問題對日常生活又有什麼影響？爲了尋求這些有趣的答案，我們在老師指導下設計三個環形軌道，並推出一些公式來解決。

二、原理：

(一)如圖 I：一個圓球由環形軌道右側高 H_1 滾下，因摩擦力的存在，只能滾到左側 H_2 的高度，則其消耗的能量 $\Delta E = mgH_1 - mgH_2$ ，其中 m 爲球的質量， g 爲重力加速度。

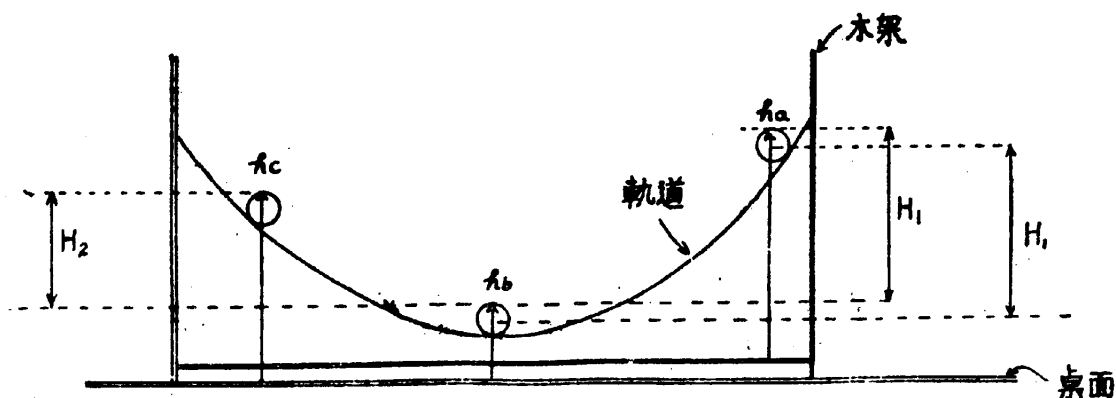


圖 一

$$(1) \text{亦即球在這軌道滾動之效率 } e = \frac{mgH_2}{mgH_1} = \frac{H_2}{H_1} \text{ 或 } H_2 =$$

e H₁。由此可預測小球在一環形軌道滾動之恢復高度。

(二)如圖 II：若希球在圓環 I 做圓周運動，就是達頂點而不掉離軌道，則球施放的最低點應在右側軌道何處始能勝任？為防止球

掉離原頂點軌道，必須使離心力 $\frac{mV_1^2}{r_1}$ 大於或等於重力 mg

(V₁ 為球在圓環 I 頂點之速度， r₁ 為圓環 I 之半徑)。

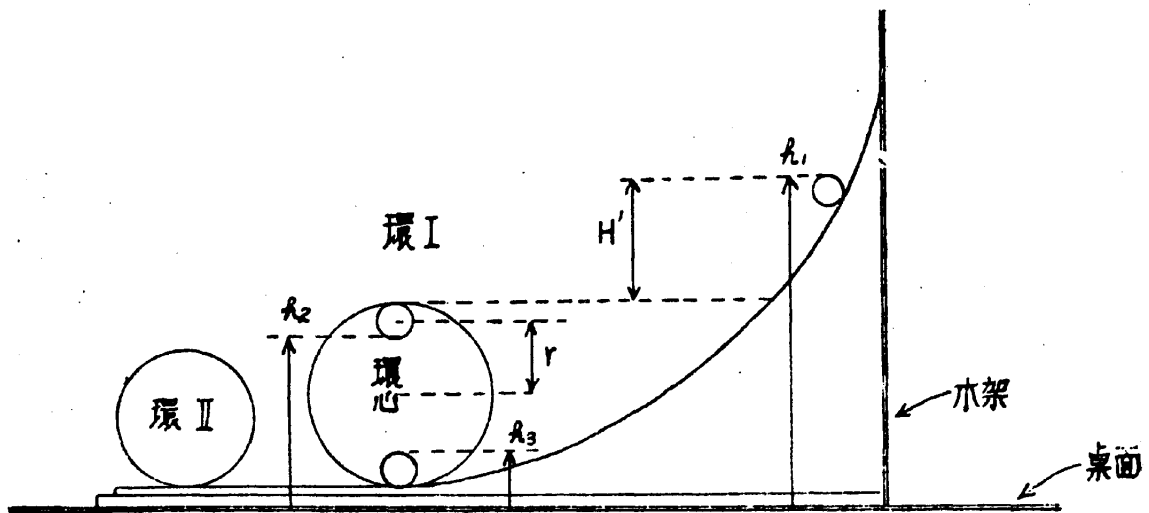


圖 二

(2) 即 $\frac{mV_1^2}{r_1} = mg$ 或 $v_1^2 = r_1 g$ 。

若無摩擦力之存在，球滾下因位能減小而轉變為動能且二者應相等。

(3) 則 $mgH - mg(2r_1) = \frac{1}{2}mv_1^2$ 或 $gH - 2gr_1 = \frac{1}{2}gr_1$ 得 $H = \frac{5}{2}r_1$ 。

(4) 但因摩擦力之存在所以須在 $H' = \frac{H}{e} = \frac{5r_1}{2e}$ 施放始可達到目的。

(三)如圖 II：在上述運動中，若欲使小球又在第二個環做圓周運動，則第二個圓環的半徑 r₂ 最大為多少？ 小球由第一個圓環頂

滾向第二個圓環頂其能量因摩擦剩餘 $\frac{1}{2}mv_1^2 + mg(2r_1)e$

這些能量將等於球在第二圓環頂的能量 $\frac{1}{2}mv_2^2 + mg(2r_2)$ ，即

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mg(2r_1)e = \frac{1}{2}mv_2^2 + 2r_2g$$

$$(5) \text{ 或 } \frac{1}{2}v_1^2 + 2r_1ge = \frac{1}{2}v_2^2 + 2r_2g$$

(6) 又因離心力需等於重力，則 $\frac{mv_2^2}{r_2} = mg$ 或 $v_2^2 = r_2g$ 。

$$(7) \text{ 代(2)(6)式入(5)得 } \frac{1}{2}gr_1 + 2gr_1e = \frac{1}{2}gr_2 + 2gr_2$$

$$\text{或 } r_2 = \frac{1+4e}{5}r_1$$

(四) 如圖 III：球若在 H 高處施放，在 B 點可飛躍 X 水平距離多遠？
(H 為 A, B 點高度差)。

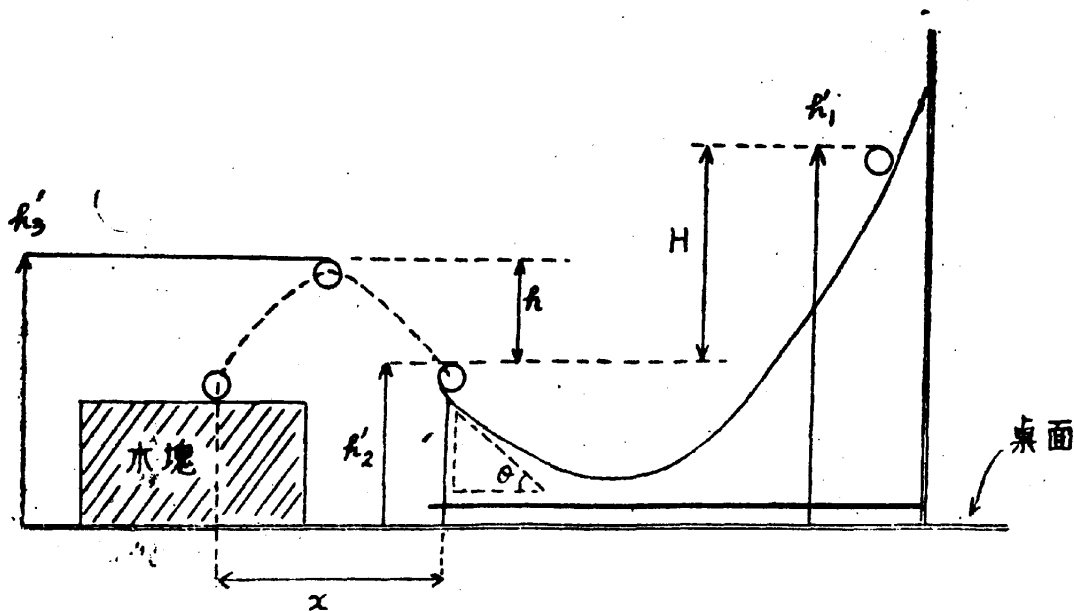


圖 三

$$(8) \text{ 由 } mgHe = \frac{1}{2}mv^2 \text{ 即 } v^2 = 2gHe \text{ (} v \text{ 為球在 B 點)}$$

之瞬時速度)。

(9)將 v 分析出水平速度 $v_x = v \cos \theta$

(10)及鉛直速度 $v_y = v \sin \theta$

(11)則 $x = v_x t$ (t 為球跳躍停留空中之時間)

(12)且 $t = 2 t' = 2 \frac{v_y}{g}$ (由運動第一公式求得 t')

(13)由(9)(10)(11)(12)得 $x = \frac{2 v^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$

(14)再代(8)入(13)得 $x = 4 H e \sin \theta \cos \theta$

* 甚至可以預測球在 B 點可跳起之最高度 h ?

(15)由運動第三公式 $h = \frac{v_y^2}{2g}$

(16)再由(8)(10)及(15)得 $h = \frac{(v \sin \theta)^2}{2g} = H e \sin^2 \theta$

三、結論和討論：

(一)效率與球之種類及軌道之光滑程度有關，與球質量大小無關。

(參閱表一)

(二)本實驗可做為物理學中之能量、質量中心、離心力、拋物運動的輔助教材。

(三)所用原理，方程式之導出，僅是高中物理的應用，容易使一般同學瞭解，效果宏大。

(四)所得各項數據誤差很小(木球例外)，足證所推得之各條公式其價值很高。

(五)所試用的球有網球、銅球、玻璃球、木球、塑膠球、橡皮球，可適用者為前者三種，另外木球，塑膠球因密度太小，橡皮球彈性強大多不適用。

(六)金屬球在軌道上滾動數回後，即有顯著的溫度升高，這正說明了「圓球與軌道間因摩擦存在而消耗位能，故圓球無法達到原有高度」。

(七)表四中，木球之飛躍最高度，實驗值比理論值大；而表三之水

- 平距離且偏小。其原因可能是木球密度小在軌道中已飛躍而起，因其 $\sin \theta$ 值比預測的為大，而 $\cos \theta$ 值較小所致。
- (八)說明書上所採用之實驗數據，選自多次實驗中，出現次數最多者。
- (九)水平距離之測定，為求拋射點與落點在同一高度，對大小不同球體，必須略微調整記錄板之高度，這樣才能減小誤差。
- (十)球在很低點施放，其效率顯得偏高（參閱表一(1)(2)(3)(4)(5)）這可能是低段軌道較光滑，中段因為彎曲不均，致效率減低。
- (十一)跳躍最高點的測定，最難客觀，由表四誤差的不規則性便可顯出，為求正確，務必用明顯的背景，並使背景儘量靠近球道，同時，測定者的眼光更需放水平。
- (十二)圓環Ⅱ半徑之設計較預計為小，故凡可順利滾圓環Ⅰ的，都可順利滾過圓環Ⅱ（球的太大者例外）。
- (十三)木球之效率雖較高，但其出現之 H_2 值，差距很大（參閱原始記錄），這是因為木球密度小，易受外界氣流或軌道不平滑的影響，故木球的數據僅可供參考比較用。
- (十四)數據之換算都用手提電子計算機，節省不少工作時間，每欲算完一次，尚需費去五個鐘頭，若改用筆算，可令人却步。
- (十五)每三人欲完成這些實驗操做，對熟練者而言，約需連續工作六個鐘頭，足見體力對科學研究者是多麼重要。
- (十六)第一次的軌道模型由指導教師及作者親自鉚製，因技術不佳，常脫節，第二次的模型（即現有者）照原有規格送請鐵工廠代製，但發現普通鐵線表面因鍍有一層鋅，電鉚不易勝任，最後以電鑽挖洞始致成功。