Dancing School Problems 的探討與解答

關鍵詞：Permanent、遞迴、組合學

編號：010022

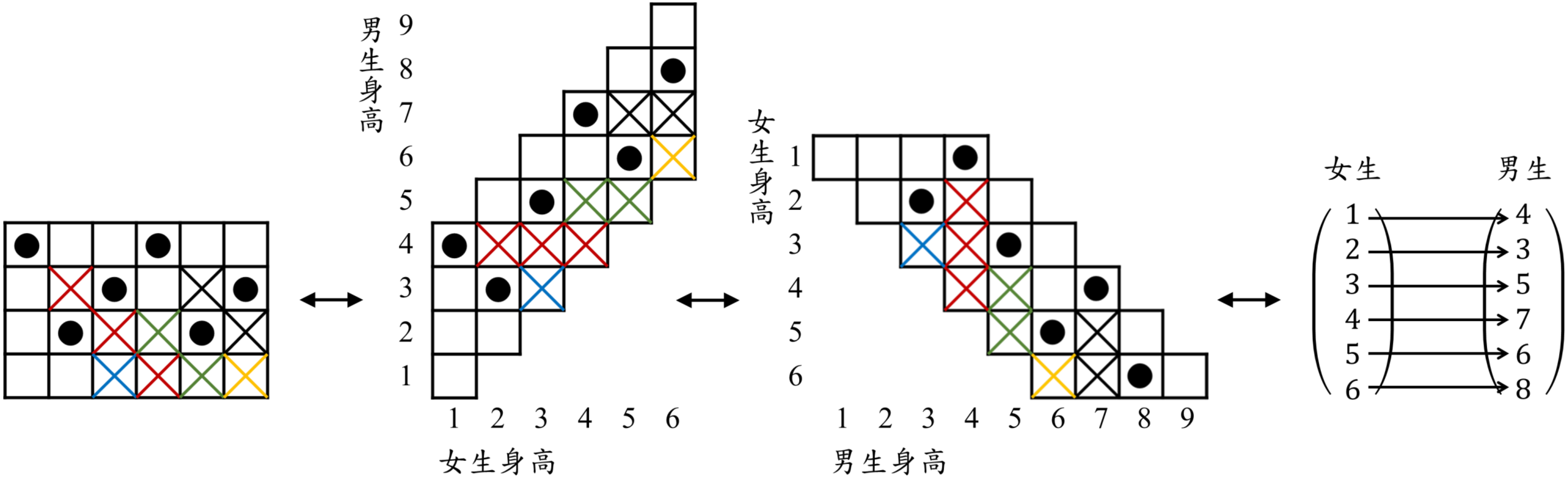
1.問題與目標

有身高 1 到 n 的 n 名女性，與身高 1到 $n+k$ 的 $n+k$ 名男性，在 $n+k$ 名男性中選出 n 名，此時 n 名女性與 n 名男性進行舞伴配對，且規定對於所有身高 p 的女性只能與身高為 p 到 $p+k$ 的男性配對。

●研究目標：

n 名女性與 $n+1$、$n+2$、$n+3$、$n+4$、 ... 名男性的選舞伴組合數 $f(n,1)$、$f(n,2)$、$f(n,3)$、$f(n,4)$、…

2.研究方法：問題轉換



3.研究方法：0-1 矩陣與舞蹈學校問題對射

給定 $n \times m$ 矩陣 $B = (b_{ij})$，其中 $n \leq m$，定義

$$\mathrm{Perm}(B) = \sum_{\sigma \in \mathrm{P}(n,m)} b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} b_{3\sigma(3)} \dots b_{n\sigma(n)}$$

2 女 3 男
$f(2,1)$

$$\longleftrightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\updownarrow$$

$\mathrm{Perm}(B)$
$= b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21} + b_{11}b_{23} + b_{13}b_{21} + b_{12}b_{23} + b_{13}b_{22}$
$= b_{11}b_{22} + b_{11}b_{23} + b_{12}b_{23}$
$= 1 + 1 + 1$
$\Rightarrow f(2,1) = 3$

3.研究方法：Laplace展開

若 $B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$，則

$$\mathrm{Perm}(B)$$

$$= b_{11}\times\begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} + b_{12}\times\begin{pmatrix} b_{21} & b_{23} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n3} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} + \cdots +$$

$$b_{1m}\times\begin{pmatrix} b_{21} & \cdots & b_{2(m-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{n(m-1)} \end{pmatrix}$$

4. 目前結果：$f(n,1)$（一階遞迴）

$$\operatorname{Perm}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Perm}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \operatorname{Perm}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(n,1) = f(n-1,1) + 1$$

又 $f(1,1) = 2$，所以依據遞迴關係（等差）累加可得

$$\boldsymbol{f(n,1) = n + 1}$$

4.目前結果：$f(n,2)$（二階遞迴）

$$\operatorname{Perm}\begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&\cdots&0\\ 0&1&1&1&0&0&\cdots&0\\ 0&0&1&1&1&0&\cdots&0\\ 0&0&0&1&1&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&0&1&1&1 \end{pmatrix}$$

$$=\operatorname{Perm}\begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&\cdots&0\\ 0&1&1&1&0&0&\cdots&0\\ 0&0&1&1&1&0&\cdots&0\\ 0&0&0&1&1&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&0&1&1&1 \end{pmatrix}+\operatorname{Perm}\begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&\cdots&0\\ 0&1&1&1&0&0&\cdots&0\\ 0&0&1&1&1&0&\cdots&0\\ 0&0&0&1&1&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&0&1&1&1 \end{pmatrix}+\operatorname{Perm}\begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&\cdots&0\\ 0&1&1&1&0&0&\cdots&0\\ 0&0&1&1&1&0&\cdots&0\\ 0&0&0&1&1&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&0&1&1&1 \end{pmatrix}$$

$$f(n,2)$$
$$= f(n-1,2) + \big(f(n-1,2) - f(n-2,2)\big) + \Big(\big(f(n-2,2) - f(n-3,2)\big) + 1\Big)$$

4.目前結果：$f(n,2)$（二階遞迴）

$$f(n-1,2)+\big(f(n-1,2)-f(n-2,2)\big)+\Big(\big(f(n-2,2)-f(n-3,2)\big)+1\Big).$$

$$=2f(n-1,2)-f(n-3,3)+1$$

即

$$f(n,2)-f(n-1,2)=f(n-1,2)-f(n-3,2)+1$$

又 $f(1,2)=3$、$f(2,2)=7$、$f(3,2)=14$，累加消去可得

$$\boldsymbol{f(n,2)=f(n-1,2)+f(n-2,2)+n+1}$$

4.目前結果：$f(n,3)$（三階遞迴）

1. 1 女 4 男選舞伴 $f(1,3)=4$
2. 2 女 5 男選舞伴 $f(2,3)=f(1,3)+3f(1,2)=13$
3. 3 女 6 男選舞伴 $f(3,3)=2f(2,3)-f(1,3)+2f(2,2)=36$
4. 4 女 7 男選舞伴 $f(4,3)=2f(3,3)-f(2,3)+31=90$

4. 目前結果：$f(n,3)$（三階遞迴）

$f(5,3)$

$$= 2 \times f(4,3) - f(3,3) + \text{Perm}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \text{Perm}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$f(6,3)$

$$= 2 \times f(5,3) - f(4,3) + \text{Perm}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \text{Perm}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. 目前結果：$f(n,3)$（三階遞迴）

定義 $f(n,3)$ 中的 b_{13} 餘子矩陣為 $D_{n,3}$ 矩陣

$$D_{5,3}=\begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0\\ 0&1&1&1&1&0\\ 0&0&1&1&1&1 \end{pmatrix}、D_{6,3}=\begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&0\\ 0&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&1&1&1&1 \end{pmatrix}、D_{7,3}=\begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&1&1&1 \end{pmatrix}、\ldots\ldots$$

4. 目前結果：$f(n,3)$（三階遞迴）

定義 $f(n,3)$ 中的 b_{14} 餘子矩陣為 $E_{n,3}$ 矩陣

$$E_{5,3}=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&1&1&1&0\\0&0&1&1&1&1\end{pmatrix}、E_{6,3}=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0&0\\0&1&1&1&0&0&0\\0&0&1&1&1&0&0\\0&0&1&1&1&1&0\\0&0&0&1&1&1&1\end{pmatrix}、E_{7,3}=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0&0&0\\0&1&1&1&0&0&0&0\\0&0&1&1&1&0&0&0\\0&0&1&1&1&1&0&0\\0&0&0&1&1&1&1&0\\0&0&0&0&1&1&1&1\end{pmatrix}、\ldots\ldots$$

4.目前結果：$f(n,3)$（三階遞迴）

$\mathrm{Perm}(D_{n,3})$ 和 $\mathrm{Perm}(E_{n,3})$ 是三階遞迴，化簡得出

$$\mathrm{Perm}(D_{n,3}) + \mathrm{Perm}(E_{n,3}) = f(n-2,3) - f(n-4,3) + t_n - 2$$

其中，$\begin{cases} t_5 = 38, t_6 = 69, t_7 = 126 \\ t_n = t_{n-1} + t_{n-2} + t_{n-3} \end{cases}$

因此，

$$\boldsymbol{f(n,3) = 2 \times f(n-1,3) - f(n-4,3) + t_n - 2}$$

其中，$f(1,3) = 4$、$f(2,3) = 13$、$f(3,3) = 36$、$f(4,3) = 90$

5.研究進度跟預期結果

1.期中：

(1) 完成 n 名女生及 $n+4$ 名男生的組合數 $f(n,4)$ 遞迴式。

(2) 探討 $f(n,2)$ 到 $f(n,3)$ 到 $f(n,4)$ 是否有規律樣式？

2.期末：

(1) 完成 n 名女生及 $n+5$ 名男生的組合數 $f(n,5)$ 遞迴式。

(2) 證明 $f(n,k)$ 為 k 階遞迴。

6.預期困難度

$$f(n,1)、f(n,2)、f(n,3)、f(n,4)、\ \ldots$$

隨著增量增加，矩陣行與列同時增加，變得更為複雜，餘子矩陣數量增加，愈來愈不易表示，且要討論到更後面，才能不受到退化的影響。

Jaap Spies 的研究	**本研究**
男女人數差異的增量 k 為變數	女性人數作為變數 n
$f(3,k)、f(4,k)、\ldots、f(10,k)$	$f(n,1)、f(n,2)、f(n,3)$

$f(3,1)=\mathrm{Perm}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$、$f(3,2)=\mathrm{Perm}\begin{pmatrix}1&1&1&0&0\\0&1&1&1&0\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}$

$f(1,3)=\mathrm{Perm}(1\ 1\ 1\ 1)$、$f(2,3)=\mathrm{Perm}\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&1&1&1\end{pmatrix}$

$$f(7,4) = \begin{pmatrix}
1&1&1&1&1&&&&&& \\
&1&1&1&1&1&&&&& \\
&&1&1&1&1&1&&&& \\
&&&1&1&1&1&1&&& \\
&&&&1&1&1&1&1&& \\
&&&&&1&1&1&1&1& \\
&&&&&&1&1&1&1&1
\end{pmatrix}$$

$b_{11} = f(6,4)$ $\quad b_{12} : f(6,4) - f(5,4)$

b_{13}

$$F(7,4) \quad \begin{pmatrix}
1&1&1&1&&&&& \\
&1&1&1&1&&&& \\
&1&1&1&1&1&&& \\
&&1&1&1&1&1&& \\
&&&1&1&1&1&1& \\
&&&&1&1&1&1&1
\end{pmatrix}$$

F ① $f(5,4) - f(4,4)$

F ② $F(6,4) - f(4,4) + f(3,4)$

F ③ $G(6,4) - F(5,4)$

F ④ $H(6,4) - G(5,4)$

b_{14}

$$G(7,4) \quad \begin{pmatrix}
1&1&1&1&&&&& \\
&1&1&1&1&&&& \\
&&1&1&1&1&&& \\
&&1&1&1&1&1&& \\
&&&1&1&1&1&1& \\
&&&&1&1&1&1&1
\end{pmatrix}$$

G ① $F(6,4)$

G ② $F(6,4) - f(4,4) + f(3,4)$

G ③

$$\begin{pmatrix}
1&1&1&&&& \\
&1&1&1&&& \\
&1&1&1&1&& \\
&1&1&1&1&1& \\
&1&1&1&1&1&1
\end{pmatrix}$$

G ④

$$\begin{pmatrix}
1&1&1&&&& \\
&1&1&1&&& \\
&1&1&1&1&& \\
&1&1&1&1&1& \\
&&1&1&1&1&1
\end{pmatrix}$$

b_{15}

$$H(7,4) \quad \begin{pmatrix}
1&1&1&1&&&&& \\
&1&1&1&1&&&& \\
&&1&1&1&1&&& \\
&&&1&1&1&1&& \\
&&&1&1&1&1&1& \\
&&&&1&1&1&1&1
\end{pmatrix}$$

H ① $G(6,4)$

H ② $G(6,4) - F(5,4)$

H ③

$$\begin{pmatrix}
1&1&1&&&& \\
&1&1&1&&& \\
&1&1&1&1&& \\
&1&1&1&1&1& \\
&&1&1&1&1&1
\end{pmatrix}$$

H ④

$$\begin{pmatrix}
1&1&1&&&& \\
&1&1&1&&& \\
&&1&1&1&& \\
&&1&1&1&1& \\
&&1&1&1&1&1
\end{pmatrix}$$

7.可能解決辦法

1. 使用程式進行降階，代替人工，觀察餘子矩陣是否有規律。
2. 全部降階至增量為 1 的 $f(n,1)$，觀察係數規律。
3. 搜尋特殊「0-1 矩陣」的 Permanent 計算方法的文獻。

7.可能解決辦法：程式降階

```cpp
#include <iostream>

using namespace std;

int main()
{
    int matrix[100][100];
    int n, m;
    cin >> n >> m;
    for(int i = 0; i < n; i += 1){
        for(int j = 0; j < m; j += 1){
            cin >> matrix[i][j];
        }
    }

    for(int i = 0; i < m; i ++){

        if(matrix[0][i] == 0)continue;
        cout<<matrix[0][i]<<":" <<endl;

        for(int j = 1 ; j < n ; j++){
            for(int k = 0 ; k < m ; k++){
                if(i==k)continue;
                cout<< matrix[j][k]<<" ";
            }
            cout<<endl;
        }
    }


    return 0;
}
```

8.目前結論與貢獻

1. 給出$f(n,1)$、$f(n,2)$的遞迴

2. 給出$f(n,3)$的遞迴
A079922 數列是 Jaap Spies 利用 $f(3,k)$、$f(4,k)$、…、$f(10,k)$

令 $k=3$ 得出數列前十項，後續幾項則是用程式計算矩陣的 Permanent，並不是直接研究 $f(n,3)$。

THE ON-LINE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES®

founded in 1964 by N. J. A. Sloane

4,13,36,90,212,478,1044,2227 Search Hints

(Greetings from The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences!)

Search: **seq:4,13,36,90,212,478,1044,2227**

Displaying 1-1 of 1 result found. page 1

Sort: relevance | references | number | modified | created Format: long | short | data

A079922 Solution to the Dancing School Problem with n girls and n+3 boys: f(n,3). +20 1

4, 13, 36, 90, 212, 478, 1044, 2227, 4664, 9627, 19640, 39684, 79544, 158364, 313464, 617365, 1210588, 2364713, 4603388, 8934142, 17291756, 33385018, 64311660, 123634471, 237233712, 454429239, 869095472, 1659708488 (list; graph; refs; listen; history; text; internal format)

OFFSET	1,1
COMMENTS	f(g,h) = per(B), the permanent of the (0,1)-matrix B of size g X g+h with b(i,j)=1 if and only if i <= j <= i+h. See A079908 for more information.
LINKS	Table of n, a(n) for n=1..28. Jaap Spies, Dancing School Problems, Permanent solutions of Problem 29, Nieuw Archief voor Wiskunde 5/7 nr. 4, Dec 2006, pp. 283-285.
FORMULA	Empirical g.f.: -x*(x^7-4*x^4+2*x^3+3*x-4) / ((x-1)^2*(x^3+x^2+x-1)^2). - Colin Barker, Jan 04 2015
CROSSREFS	Cf. A079908-A079928.
KEYWORD	nonn
AUTHOR	Jaap Spies, Jan 28 2003
EXTENSIONS	More terms Dec 15 2006
STATUS	approved