中華民國第57屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030424

八隻青蛙與停車場的邂逅

學校名稱：新北市立江翠國民中學

作者：	指導老師：
國一 陳姿妤	呂宛誠 顏榮皇

關鍵詞：空白數列、巴斯卡三角形、對射

摘要

本作品從解決科學研習月刊中的一道題目著手:《八隻青蛙》,給出了「有幾片荷葉有青蛙」與落點的一般式。而且我更延伸原題,定義出新的「停車場問題」,不但找到 *Cycle* 的一般式和落點的快速演算法,還發現了原題與新題分別欲求的解答,兩者之間存在數種對射。最重要是發現了停車場問題 *Cycle* 和巴斯卡三角形的關係!

壹、前言

一、題目敘述

◎青蛙問題 *Frog problem*

請觀察 2016 年 12 月份科學研習月刊一道題目[1]。

題目 1.1.1 正 8 邊形池塘上的頂點上各有一片荷葉,每片荷葉上有一隻青蛙,將青蛙逆時針編號為 0、1、2、3、4、5、6、7 ,每隻青蛙要在此八片荷葉上逆時針移動 20 次。
每隻青蛙第一次的移動是原地跳,此後每一次移動跳的距離就是牠的編號。因此,0 號青蛙事實上會原地跳 20 次,3 號青蛙的前三步會落在編號 3、6、1 的荷葉上,而 1 號青蛙最後會移動到一開始 4 號青蛙的荷葉上。

請問所有青蛙移動完後,有幾片荷葉上有青蛙?

所有青蛙移動一次為例:

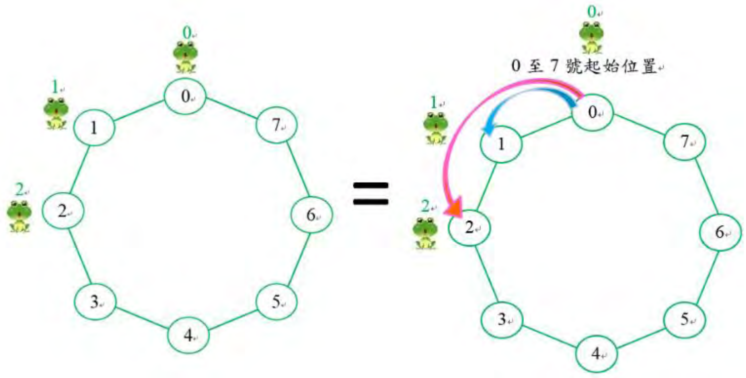


圖 1.1.2

發現,「所有青蛙從自己編號的荷葉出發,第一次原地跳」,和「所有青蛙從原點出發,第一次正常跳自己編號的格數」是一樣的。

發現

事實 1.1.3　題目 1.1.1，所有青蛙移動 20 次後，有 1、2、4、8 片荷葉有青蛙，4 種答案。

其中，答案是，1 片荷葉有青蛙，屬於 $k = 8r$　，$r \in N$。

2 片荷葉有青蛙，屬於 $k = 8r + 4$，$r \in N$。

4 片荷葉有青蛙，屬於 $k = 4r + 2$，$r \in N$。

8 片荷葉有青蛙，屬於 $k = 2r + 1$，$r \in N$。

如此，題目 1.1.1 的題目要求，已在事實 1.1.3 解決。

根據我們的觀察，會有多隻青蛙對一荷葉之情況，稱「重疊問題」。

◎停車場問題 *Parking problem*

Parking problem 從我們的 *Frog problem* 延伸，進階為「非重疊問題」，一車僅能對一車位，不可重疊。題目如下:

題目 1.1.4　正 8 邊形停車場，各頂點有一車位，逆時針標 0 至 7 號，有 0 至 7 號車從 0 號車位出發，每次移動自己編號的格數，過程中須繞過已被停的車位，直到所有車停完為止。

Parking problem 比 *Frog problem* 多一條規則，車子移動中需繞過已被停走的車位。

舉例，正 8 邊形，移動 1 次，如圖 1.1.5。

0 號車移動 0 格:仍在 0 號車位。1 號車移動 1 格:在 1 號車位。2 號車須移動 2 格:第一格跨越 1 號車，移動到 2 號車位；第 2 格直接移動到 3 號車位。依序類推。

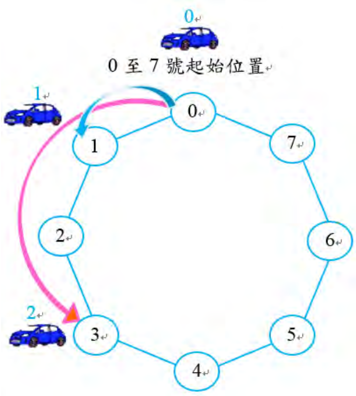


圖 1.1.5

如此，得到正 8 邊形，0 至 7 號車的起、終點，如表 1.1.6。

表 1.1.6

車編號	0	1	2	3	4	5	6	7
起點	0							
移動 1 次落點	0	1	3	5	7	4	6	2

二、定義

◎基本條件

定義 1.2.1 池塘或停車場都是正 n 邊形，編號 i 的青蛙或車，移動 k 次。
$n \geq 3, n \in N$ ； $0 \leq i < n, i \in N$ ； $k \in N$ 。

◎*Frog problem*

定義 1.2.2 $F_N(n,i,k)$ 為正 n 邊形，0 至 $n-1$ 號青蛙「每次移動格數」依序呈自然數數列時，i 號青蛙移動 k 次後的落點。$n \geq 3, n \in N$ ； $0 \leq i < n, i \in N$ ； $k \in N$ 。

定義 1.2.3 $f_N(n,k)$ 為正 n 邊形，0 至 $n-1$ 號青蛙「每次移動格數」依序呈自然數數列時，移動 k 次時，有青蛙的荷葉數。$n \geq 3, n \in N$ ； $k \in N$ 。

◎*Parking problem*

定義 1.2.4 $J(n,i,k)$ 為正 n 邊形，0 至 $n-1$ 號車「每次移動格數」依序呈自然數數列時，i 號車準備移動 k 次時，還剩餘的空車位數列。又稱，空白數列。$n \geq 3, n \in N$ ； $0 \leq i < n, i \in N$ ； $k \in N$ 。

空白數列將在第參章，本作品第 6 頁，做詳細討論。

定義 1.2.5 $R_N(n,i,k)$ 為正 n 邊形，0 至 $n-1$ 號車「每次移動格數」依序呈自然數數列時，i 號車移動 k 次，在空白數列中的位置。$n \geq 3, n \in N$ ； $0 \leq i < n, i \in N$ ； $k \in N$ 。
$1 \leq R_N(n,i,k) \leq n-i$ 。

定義 1.2.6 $Park_N(n,i,k)$ 為正 n 邊形，0 至 $n-1$ 號車「每次移動格數」依序呈自然數數列時，i 號車移動 k 次後的落點。$n \geq 3, n \in N$ ； $0 \leq i < n, i \in N$ ； $k \in N$ 。

定義 1.2.7 $Cycle_N(n,i)$ 為正 n 邊形，0 至 $n-1$ 號車「每次移動格數」依序呈自然數數列時，i 號車再回到空白數列中原位，需經的最少次數。$n \geq 3, n \in N$ ； $0 \leq i < n, i \in N$ 。

定義 1.2.8 $Cycle_F(n,i)$ 為正 n 邊形，0 至 $n-1$ 號車「每次移動格數」依序呈費氏數列時，i 號車再回到空白數列中原位，需經的最少次數。$n\ge 3, n\in N$；$0\le i<n, i\in N$。

定義 1.2.9 $Cycle_P(n,i)$ 為正 n 邊形，0 至 $n-1$ 號車「每次移動格數」依序呈巴斯卡三角形第 $n-2$ 列數字時，i 號車再回到空白數列中原位，需經的最少次數。$n\ge 3, n\in N$；$0\le i<n, i\in N$。

定義 1.2.10 $Cycle_N(n)$ 為正 n 邊形，0 至 $n-1$ 號車「每次移動格數」依序呈自然數數列時，所有車同時回到原位，需經的最少次數。$n\ge 3, n\in N$。

定義 1.2.11 $Cycle_F(n)$ 為正 n 邊形，0 至 $n-1$ 號車「每次移動格數」依序呈費氏數列時，所有車同時回到原位，需經的最少次數。$n\ge 3, n\in N$。

定義 1.2.12 $Cycle_P(n)$ 為正 n 邊形，0 至 $n-1$ 號車「每次移動格數」依序呈巴斯卡三角形第 $n-2$ 列數字時，所有車同時回到原位，需經的最少次數。$n\ge 3, n\in N$。

我們稱

費氏數列為，$F_0=0$，$F_1=1$，$F_2=1$，$F_3=2$，$F_i=F_{i-1}+F_{i-2}$，$\forall i\ge 2$。

巴斯卡三角形第 $n-2$ 列的數字為，C_0^{n-2}、C_1^{n-2}、…、C_{n-2}^{n-2}，$\forall n\ge 3$。

其中，$C_i^{n-2}=\dfrac{(n-2)\,!}{i\,!(n-i-2)\,!}$，$0\le i\le n-2$，$\forall n\ge 3$。

三、研究目的

(一) *Frog problem*「落點」與「有青蛙的荷葉數」的一般式。

(二) *Parking problem*「落點」演算法與「循環數」的一般式。

(三) *Parking problem*「循環數」與巴斯卡三角形的關係。

(四) *Frog problem*「有青蛙的荷葉數」和 *Parking problem*「循環數」的數種對射。

四、文獻探討

本研究 *Parking problem*，與「停車就是彈硬幣」*Parking functions* 有異。

「停車就是彈硬幣」的*Parking functions* 如此描述。
「在一條單行道上有n個車位，編號從1到n。現在有n個司機排成一排要進入停車。但是每個司機都有怪癖，各自有最想要停的位子。他們依序將車子開進單行道，如果想要停的位子是空的，當然停在這個位子。但是如果不巧那個位子已經被停了，不得已只好找下一個空位，姑且停之。但是如果往下找都沒有空位，由於是單行道，司機就只好開走不停了。」

與「停車就是彈硬幣」比較，如表 1.4.1。

表 1.4.1

	八隻青蛙與停車場的邂逅	停車就是彈硬幣
車子停入規則	給定移動格數	給定初始位置(司機想停的位置)
停車場模式	一直繞圈直到找到車位	都無空位就不停了
	環狀	單行道，直線
解題技巧	空白數列	標號樹

五、本研究特色

本研究針對 *Frog problem* 與 *Parking problem* 邂逅─做自然數對射、費氏數列對射、巴斯卡三角形對射。

貳、青蛙

一、落點

性質 2.1.1 $F_N(n,i,k) \equiv ik \pmod{n}$，$n \ge 3, n \in N$；$0 \le i < n, i \in N$；$k \in N$。

[證明]

發現，i 號青蛙的初始落點為 i，第一次原地跳，往後 $k-1$ 次，每次移動 i 格，最終落點:$i+i(k-1)$ 。

$F_N(8,i,k) \equiv i+i(k-1) \equiv ik \pmod 8$ 。

將 i 號青蛙在一直線跳躍，n 格為一段，則題目 1.1.1 的青蛙落點可推廣到正 n 邊形，

$$F_N(n,i,k) \equiv ik \pmod n$$

□

二、有青蛙的荷葉數

性質 2.2.1 $f_N(n,k)=\dfrac{lcm(n,k)}{k}$，當 $n \ge 3, n \in N$，$k \in N$。

[證明]

給定 n 及 k。經 $f_N(n,k)$ 後，i 號、$i+f_N(n,k)$ 號青蛙的落點會相同。

$$ik \equiv k(i+f_N(n,k)) \pmod n$$

$$k(i+f_N(n,k))-ik = f_N(n,k)\times k = lcm(n,k)$$

$$f_N(n,k)=\frac{lcm(n,k)}{k}$$

□

參、停車場

本章我們將只先討論，「0 至 $n-1$ 號車『每次移動格數』依序呈自然數數列」的情況。

一、空白數列

事實 3.1.1 例如，正 8 邊形，0 至 7 號車各移動 1 次的空白數列。

$J_N(8,0,1)=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ 。

$J_N(8,1,1)=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ 。

$J_N(8,2,1)=\{2,3,4,5,6,7\}$ 。

$J_N(8,3,1)=\{2,4,5,6,7\}$ 。

$J_N(8,4,1)=\{2,4,6,7\}$ 。

$J_N(8,5,1)=\{2,4,6\}$ 。

$J_N(8,6,1)=\{2,6\}$ 。

$J_N(8,7,1)=\{2\}$ 。

正 3 邊形為例，各車依序停入的位置。其中，藍色框線為 $J_N(3,i,k)$，$0 \le i \le 2$，$1 \le k \le 2$。如圖 3.1.2。

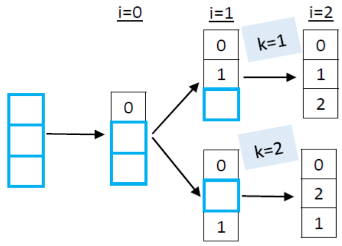


圖 3.1.2

讓我們討論車子在空白數列中的位置。

事實 3.1.3 例如，正 8 邊形，0 至 7 號車各移動 1 次，在空白數列中的位置。

$$J_N(8,0,1)=\{0,1,2,3,4,5,6,7\} \text{。} \quad R_N(8,0,1)=0 \text{。}$$
$$J_N(8,1,1)=\{1,2,3,4,5,6,7\} \text{。} \quad R_N(8,1,1)=1 \text{。}$$
$$J_N(8,2,1)=\{2,3,4,5,6,7\} \text{。} \quad R_N(8,2,1)=2 \text{。}$$
$$J_N(8,3,1)=\{2,4,5,6,7\} \text{。} \quad R_N(8,3,1)=3 \text{。}$$
$$J_N(8,4,1)=\{2,4,6,7\} \text{。} \quad R_N(8,4,1)=4 \text{。}$$
$$J_N(8,5,1)=\{2,4,6\} \text{。} \quad R_N(8,5,1)=2 \text{。}$$
$$J_N(8,6,1)=\{2,6\} \text{。} \quad R_N(8,6,1)=2 \text{。}$$
$$J_N(8,7,1)=\{2\} \text{。} \quad R_N(8,7,1)=1 \text{。}$$

性質 3.1.4 若 $(n-i)|ik$ 不成立，則 $R_N(n,i,k) \equiv ik \pmod{n-i}$；
若 $(n-i)|ik$ 成立， 則 $R_N(n,i,k)=n-i$。
$n \ge 3, n \in N$；$0 \le i < n, i \in N$；$k \in N$。

[證明]

1.若 $(n-i)|ik$ 不成立:

正 n 邊形，i 號車移動 ik 格。因在 $n-i$ 個空車位循環移動，故 $R_N(n,i,k) \equiv ik \pmod{n-i}$。

2.若 $(n-i)|ik$ 成立:

$(n-i)|ik$，即 $0 \equiv ik \pmod{n-i}$，i 號車的落點在 $n-i$ 個空車位的末項，$R_N(n,i,k)=n-i$。

□

二、 $Park_N(n,i,k)$ 的順序法

順序法的原理。

先預設完全不繞過車位時的 $R_N(n,i,k)$；往後逐一檢查目前的位置之前有沒有要繞過的車位，並下移；直到目前位置之前都沒有要繞過的車位為止。

定義 3.2.1 $H_N(n,i,k)=\{H_1,H_2,...,H_v\}$ 為正 n 邊形，對 i 號車而言，已被停的車位的數列。$1\le v\le i, v\in N$。

舉例，正 8 邊形，0 至 7 號車各移動 1 次。

$$H_N(8,0,1)=\{\ \}。$$
$$H_N(8,1,1)=\{0\}。$$
$$H_N(8,2,1)=\{0,1\}。$$
$$H_N(8,3,1)=\{0,1,3\}。$$
$$H_N(8,4,1)=\{0,1,3,5\}。$$
$$H_N(8,5,1)=\{0,1,3,5,7\}。$$
$$H_N(8,6,1)=\{0,1,3,4,5,7\}。$$
$$H_N(8,7,1)=\{0,1,3,4,5,6,7\}。$$

例如，$H_N(8,6,1)=\{0,1,3,4,5,7\}$，如圖 3.2.2，解釋對應方法。

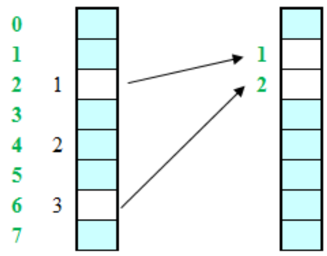


圖 3.2.2

定義 3.2.3 $\alpha_N(n,i,k,j)$ 為正 n 邊形，移動 k 次，第 j 次下移時，i 號車的目前位置。

定義 3.2.4 $\beta_N(n,i,k,j)$ 為正 n 邊形，移動 k 次，第 j 次下移時，在該區間中，i 號車要繞過的車位數。

分為三種:

$\beta_N(n,i,k,j)$ 代表 $H_N(n,i,k)$ 中，

$j=1$，符合 $1\le H_v \le R_N(n,i,k)$ 的個數。

$j=2$，符合 $R_N(n,i,k)\le H_v \le \alpha_N(n,i,k,1)$ 的個數。

$j>2$，符合 $\alpha_N(n,i,k,j-2)\le H_v \le \alpha_N(n,i,k,j-1)$ 的個數。 **(3.2.5)**

演算方法 3.2.6

$j=1$，$\alpha_N(n,i,k,1)=R_N(n,i,k)+\beta_N(n,i,k,1)$。

$j\ge 2$，$\alpha_N(n,i,k,j)=\alpha_N(n,i,k,j-1)+\beta_N(n,i,k,j-1)$。

若 $H_N(n,i,k)$ 中無符合式子 3.2.6 的 H_v，就停止；反之，若有，則繼續下一次的下移。

$$\alpha_N(n,i,k,j)=R_N(n,i,k)+\sum_{s=1}^{j}\beta_N(n,i,k,s)$$

$$\because\ \alpha_N(n,i,k,j)=Park_N(n,i,k)$$

$$\therefore\ Park_N(n,i,k)=R_N(n,i,k)+\sum_{s=1}^{j}\beta_N(n,i,k,s)$$

演算方法 3.2.6 結束。

三、 $Park_N(n,i,k)$ 的逆序法

逆序法的原理，更加快速。

先預設完全不繞過車位時的 $R_N(n,i,k)$；往後逐一逆序插入 i 號前面的車於其空白數列中的位置，此時，i 號車目前位置可能不動或下移 1 格；直到 i 號前面的車都插入為止。

定義 3.3.1 I 號車插入後，此時，i 號車位置，稱為「目前位置」。

定義 3.3.2 I 號車插入後，讓 i 號車目前位置下移 $\varphi_N(n,i,k,I)$ 格，至 $\tau_N(n,i,k,I)$。
$1\le I\le i$。

此時，i 號車目前位置的變化:

1.不動: 若 $\tau_N(n,i,k,I+1)<R_N(n,I,k)$，則 $\tau_N(n,i,k,I)=\tau_N(n,i,k,I+1)$。

2.下移 1 格: 若 $\tau_N(n,i,k,I+1)\ge R_N(n,I,k)$，$\tau_N(n,i,k,I)=\tau_N(n,i,k,I+1)+1$。

也就是，$\varphi_N(n,i,k,I)=0$ 或 1。

演算方法 3.3.3

$I=i$ ，$\tau_N(n,i,k,i)=R_N(n,i,k)$ 。

$1\le I\le i-1$ ，$\tau_N(n,i,k,I)=\tau_N(n,i,k,I+1)+\varphi_N(n,i,k,I)$ 。

直到 i 號前面的車都插入完後，

$$\tau_N(n,i,k,1)=R_N(n,i,k)+\sum_{I=1}^{i}\varphi_N(n,i,k,I)$$

$$\because\ \tau_N(n,i,k,1)=Park_N(n,i,k)$$

$$\therefore\ Park_N(n,i,k)=R_N(n,i,k)+\sum_{I=1}^{i}\varphi_N(n,i,k,I)$$

演算方法 3.3.3 結束。

事實 3.3.4　$n=8$，$i=7$，$k=1$。如圖 3.3.5。

$\varphi_N(n,i,k,7)=\varphi_N(n,i,k,6)=\varphi_N(n,i,k,5)=\varphi_N(n,i,k,4)=\varphi_N(n,i,k,3)=\varphi_N(n,i,k,2)=0$ ，

$\varphi_N(n,i,k,1)=1$ ；

$Park_N(8,7,1)=R_N(8,7,1)+1=\mathrm{mod}(7\times 1,8-7)+1=2$ 。

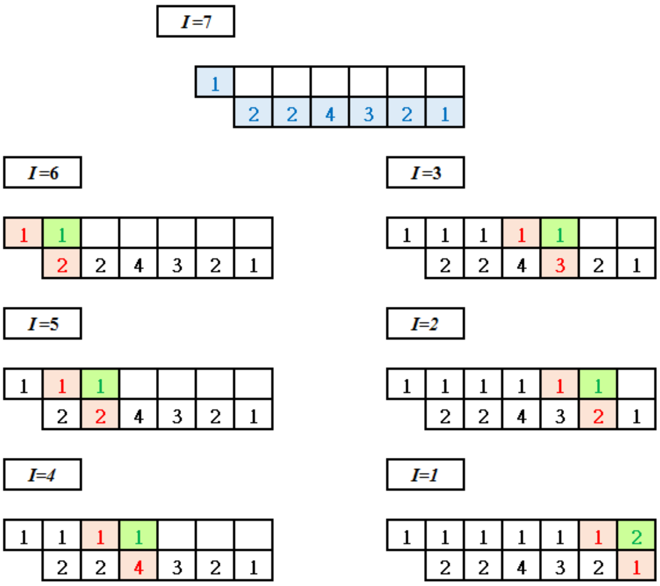


圖 3.3.5

如此一來，我們就能更快速的求出 $Park_N(n,i,k)$ 。

四、青蛙與車子落點

青蛙落點，由性質 2.1.1， $F_N(n,i,k)\equiv ik \pmod{n}$ 。

車子落點，由演算方法 3.3.3， $Park_N(n,i,k)=R_N(n,i,k)+\sum_{I=1}^{i}\varphi_N(n,i,k,I)$ 。

將 $Park_N(n,i,k)$ 分解。舉例， $n=8$ ， $i=5$ ， $k=1$ ，如圖 3.4.1。

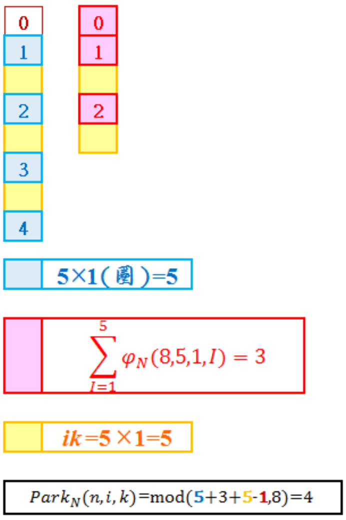


圖 3.4.1

推論

事實 3.4.2 $Park_N(n,i,k)=\mathrm{mod}(i\times\left\lfloor\frac{ik}{n-i}\right\rfloor+\sum_{I=1}^{i}\varphi_N(n,i,k,I)+ik-1,n)$ 。 $n\geq 3, n\in N$ ；

$0\leq i<n, i\in N$ ； $k\in N$ 。

性質 3.4.3 $Park_N(n,i,k)=\mathrm{mod}\left[F_N(n,i,k)+\mathrm{mod}(i\times\left\lfloor\frac{ik}{n-i}\right\rfloor+\sum_{I=1}^{i}\varphi_N(n,i,k,I)-1,n),n\right]$

[證明]

$$F_N(n,i,k)\equiv ik \pmod{n}$$

$$Park_N(n,i,k)=\mathrm{mod}(i\times\left\lfloor\frac{ik}{n-i}\right\rfloor+\sum_{I=1}^{i}\varphi_N(n,i,k,I)+ik-1,n)$$

$$Park_N(n,i,k)=\mathrm{mod}\left[F_N(n,i,k)+\mathrm{mod}(i\times\left\lfloor\frac{ik}{n-i}\right\rfloor+\sum_{I=1}^{i}\varphi_N(n,i,k,I)-1,n),n\right]$$

□

肆、*Cycle*

在本章，依據命題 1.1.4，將討論車要回到原來的車位，須經的循環次數。

一、$Cycle_N(n,i)$

如圖 4.1.1，為 $3 \le n \le 14$ ，$0 \le i \le 13$ ，$Cycle_N(n,i)$ 變化。

i \ n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	1	1	3	2	5	3	7	4	9	5	11	6
3		1	2	1	4	5	2	7	8	3	10	11
4			1	1	3	1	5	3	7	2	9	5
5				1	2	3	4	1	6	7	8	9
6					1	1	1	2	5	1	7	4
7						1	1	3	4	5	6	1
8							1	1	3	1	5	3
9								1	2	1	4	5
10									1	1	3	2
11										1	2	3
12											1	1
13												1

圖 4.1.1

性質 4.1.2　若 $i=0$ ，則 $Cycle_N(n,0)=1$ 。$n \ge 3, n \in N$ 。

若 $0 \le i < n, i \in N$ ，則 $Cycle_N(n,i)=\dfrac{lcm(n-i,i)}{i}$ 。$n \ge 3, n \in N$ 。

[證明]

當 $i=0$ ，$n \ge 3, n \in N$:

0 號車原地跳，$Cycle_N(n,0)=1$ 。

當 $0 \le i < n, i \in N$ ，$n \ge 3, n \in N$:

i 號車每次移動 i 格，且在 $n-i$ 項的 $J_N(n,i,k)$ 中移動。所以，i 號車移動 $lcm(n-i,i)$ 格，會歸回空白數列中的原位。

$lcm(n-i,i)$ 格等於 $\dfrac{lcm(n-i,i)}{i}$ 次，也就是，

$$Cycle_N(n,i)=\frac{lcm(n-i,i)}{i}$$

□

二、$Cycle_N(n)$

定義 4.2.1 依定義 1.2.10，正 n 邊形，所有車落點，每經 $Cycle_N(n)$ 次循環，會歸回原位。

舉例: $n=8$ ，如圖 4.2.2。

	$Cycle_N(8)=105$							
i	0	1	2	3	4	5	6	7
$Cycle_N(8,i)$	1	7	3	5	1	3	1	1

圖 4.2.2

性質 4.2.3 $Cycle_N(n)=lcm(Cycle_N(n,0),Cycle_N(n,1),Cycle_N(n,2),...,Cycle_N(n,n-1))$

[證明]

i 號車，經 $Cycle_N(n,i)$ 次後，會歸回空白數列中的原位。其中，$0\le i\le n-1$ 。

所以，取最小公倍數，所有車皆會歸回原位。

$$Cycle_N(n)=lcm(Cycle_N(n,0),Cycle_N(n,1),Cycle_N(n,2),...,Cycle_N(n,n-1))$$

□

在此，我們發現了另一個 $Cycle_N(n)$ 的簡化公式。

性質 4.2.4 若 $n=a^b,a\in P,b\in N$ ，$Cycle_N(n)=\dfrac{lcm(1,2,...,n-1)}{a^{b-1}}$ 。

若 $n\ne a^b,a\in P,b\in N$ ，$Cycle_N(n)=\dfrac{lcm(1,2,...,n-1)}{n}$ 。

[證明]

若理想情況，$n-i$ 和 $Cycle_N(n,i)$ 彼此互質，則，

i 號車的循環數，$n-i$ ；所有車的循環數，$lcm(1,2,...,n-1)$ 。

若 $n=a^b,a\in P,b\in N$ ，P 為質數。

只要考慮，當 $i=a^s$ ，$\gcd(n,i)\ne 1$ ，n,i 能提出共同項，$0\le s\le b-1$ 。

$$
\begin{aligned}
&Cycle_N(a^b,a^s)\\
&=\frac{lcm(a^b-a^s,a^s)}{a^s}\\
&=\frac{lcm(a^s(a^{b-s}-1),a^s)}{a^s}\\
&=\frac{a^s(a^{b-s}-1)}{a^s}\\
&=\frac{n-i}{i}
\end{aligned}
$$

a^s 中，取最小公倍數時，只包含 a 的最高次方 a^{b-1}，故只須除以一次 $i=a^{b-1}$，

$$Cycle_N(n)=\frac{lcm(1,2,...,n-1)}{a^{b-1}}$$

若 $n\neq a^b,a\in P,b\in N$，P 為質數。

設 $n=2^{g_1}\times 3^{g_2}\times ...\times p_d{}^{g_d}$ 。$p_d{}^{g_d}\le n-1$，$p_d\in P$，$g_d\ge 0$，$d\in N$，P 為質數。

只要考慮 $i=p_d{}^{s_d}$，$\gcd(n,i)\neq 1$，n,i 能提共同項，s_d 是符合 $p_d{}^{s_d}\le n-1$ 的最大值。

$$
\begin{aligned}
&Cycle_N(n,i)\\
&=\frac{lcm(n-i,i)}{i}\\
&=\frac{lcm(p_d{}^{g_d}\times(2^{g_1}\times 3^{g_2}\times...\times p_{d-1}{}^{g_{j-1}}-p_d{}^{s_d-g_d}),p_d{}^{s_d})}{p_d{}^{s_d}}\\
&=\frac{lcm(p_d{}^{g_d}\times(2^{g_1}\times 3^{g_2}\times...\times p_{d-1}{}^{g_{j-1}}-p_d{}^{s_d-g_d}),p_d{}^{g_d}\times p_d{}^{s_d-g_d})}{p_d{}^{g_d}\times p_d{}^{s_d-g_d}}\\
&=\frac{p_d{}^{g_d}\times p_d{}^{s_d-g_d}(2^{g_1}\times 3^{g_2}\times...\times p_{d-1}{}^{g_{d-1}}-p_d{}^{s_d-g_d})}{p_d{}^{g_d}\times p_d{}^{s_d-g_d}}\\
&=2^{g_1}\times 3^{g_2}\times...\times p_{d-1}{}^{g_{d-1}}-p_d{}^{s_d-g_d}\\
&=\frac{n-i}{p_d{}^{g_d}}
\end{aligned}
$$

除以 $2^{g_1}\times 3^{g_2}\times...\times p_d{}^{g_d}$，得到，

$$
\begin{aligned}
&Cycle_N(n)\\
&=\frac{lcm(1,2,...,n-1)}{2^{g_1}\times 3^{g_2}\times...\times p_d{}^{g_d}}\\
&=\frac{lcm(1,2,...,n-1)}{n}
\end{aligned}
$$

性質 4.2.4 得證。

□

還可以再更加簡化$Cycle_N(n)$的一般式。

性質 4.2.5 $Cycle_N(n)=\dfrac{lcm(1,2,...,n)}{n}$ 。$n\ge 3, n\in N$ 。

[證明.法 1]

當$n=3$時，

$$Cycle_N(3)=\frac{lcm(1,2)}{a^0}=\frac{lcm(1,2,3)}{3}\text{成立。}$$

假設$n=s$時成立，可得，

$$Cycle_N(s)=\frac{lcm(1,2,...,s)}{s}\text{ 。} \tag{4.2.6}$$

當$n=s+1$時，

若$s+1=a^b, a\in P, b\in N$時，

$$Cycle_N(s+1)=\frac{lcm(1,2,...,s)}{a^{b-1}}$$

$$Cycle_N(s+1)=\frac{a\times lcm(1,2,...,s)}{a^b}$$

1 至s中必包含a^{b-1}，所以，

$$a\times lcm(1,2,...,a^{b-1},...,s)=lcm(1,2,...,a^{b-1},...,s,a^b)=lcm(1,2,...,s+1)\text{ 。}$$

考慮式子 4.2.6，

$$Cycle_N(s)\times\frac{as}{s+1}=\frac{lcm(1,2,...,s)}{s}\times\frac{as}{s+1}$$

$$Cycle_N(s+1)=\frac{lcm(1,2,...,s+1)}{s+1}$$

若$s+1\ne a^b, a\in P, b\in N$時，

$$Cycle_N(s)=\frac{lcm(1,2,...,s)}{s+1}$$

$s+1=x_1^{\ y_1}\times x_2^{\ y_2}\times...\times x_z^{\ y_z}$ 。$x_1,x_2,...,x_z\in P$ ，$y_1,y_2,...,y_z\ge 1$，$z>1$。P為質數。

1 至k中必包含$x_1^{\ y_1}$至$x_z^{\ y_z}$等$k+1$的所有因數，所以，

$$lcm(1,2,...,s)=lcm(1,2,...,s+1)$$

考慮式子 4.2.6，

$$Cycle_N(s)\times\frac{s}{s+1}=\frac{lcm(1,2,...,s)}{s}\times\frac{s}{s+1}$$

$$Cycle_N(s+1)=\frac{lcm(1,2,...,s+1)}{s+1}$$

性質 4.2.5 得證。

□

[證明.法 2]
以下將利用 2 個引理及 1 個命題證明。

引理 4.2.5.1 $lcm(na_1, na_2, na_3, ..., na_m) = n \times lcm(a_1, a_2, a_3, ..., a_m)$

[證明]
以下使用數學歸納法來證明。
$m = 2$ 時，

$$lcm(na_1, na_2) = \frac{na_1 \times na_2}{\gcd(na_1, na_2)} = \frac{na_1 \times na_2}{n \times \gcd(a_1, a_2)} = n \times lcm(a_1, a_2) \text{ 成立。}$$

設 $m = s$ 時成立，

$$lcm(na_1, na_2, na_3, ..., na_s) = n \times lcm(a_1, a_2, a_3, ..., a_s)$$

欲證 $m = s + 1$ 亦成立，

$$\begin{aligned}
& lcm(na_1, na_2, na_3, ..., na_{s+1}) \\
&= lcm(lcm(na_1, na_2, na_3, ..., na_s), na_{s+1}) \\
&= lcm(n \times lcm(a_1, a_2, a_3, .., a_s), na_{s+1}) \\
&= n \times lcm(lcm(a_1, a_2, a_3, ..., a_s), a_{s+1}) \\
&= n \times lcm(a_1, a_2, a_3, ..., a_s, a_{s+1})
\end{aligned}$$

□

引理 4.5.2.2 $lcm(lcm(a_1, a_m), lcm(a_2, a_m), lcm(a_3, a_m), ..., lcm(a_{m-1}, a_m)) = lcm(a_1, a_2, a_3, ..., a_m)$

[證明]
將證明等號的某一側即為另一側的倍數。

Claim A. 等號的左式為右式的倍數，

由 $a_i | lcm(a_i, a_m)$，$1 \le i \le m-1$，可知 Claim A.成立。

Claim B. 等號的右式為左式的倍數，

由於 $lcm(a_1, a_2, a_3, ..., a_m)$ 必是 $lcm(a_i, a_m)$ $(1 \le i \le m-1)$的倍數，故 Claim B.成立。

□

命題 4.2.5.3 $Cycle_N(n, i) = \dfrac{lcm(n-i, n)}{n}$。

[證明]

$$Cycle_N(n, i) = \frac{lcm(n-i, i)}{i} = \frac{n-i}{\gcd(n-i, i)} = \frac{n-i}{\gcd(n-i, n)} = \frac{lcm(n-i, n)}{n}$$

□

下列等式為完成性質 4.2.5 證明的最後一步。

$$
\begin{aligned}
& n \times lcm(Cycle_N(n,0), Cycle_N(n,1), Cycle_N(n,2), \ldots, Cycle_N(n,n-1)) \\
& = lcm(n \times Cycle_N(n,0), n \times Cycle_N(n,1), n \times Cycle_N(n,2), \ldots, n \times Cycle_N(n,n-1)) \\
& = lcm(lcm(n,n), lcm(n,n-1), lcm(n,n-2), \cdots, lcm(n,1)) \\
& = lcm(1,2,3,\cdots,n)
\end{aligned}
$$

$$lcm(Cycle_N(n,0), Cycle_N(n,1), Cycle_N(n,2), \ldots, Cycle_N(n,n-1)) = \frac{lcm(1,2,3,\cdots,n)}{n}$$

$$Cycle_N(n) = \frac{lcm(1,2,3,\cdots,n)}{n}$$

性質 4.2.5 得證。

□

伍、停車場 *Cycle* 與巴斯卡三角形

一、鄰數定理

此定理為第 $n-1$ 列巴斯卡三角形相鄰兩數與 $Cycle_N(n,i)$ 的關係。

舉例 $n=8, i=3$，如圖 5.1.1。

i	0	1	2	3	4	5	6	7
巴斯卡三角形第7列	1	7	21	35	35	21	7	1
$Cycle_N(8,i)$	1	7	3	5	1	3	1	1
$C(7,i)/Cycle_N(8,i)$	1	1	7	7	35	7	7	1

圖 5.1.1　鄰數定理

定理 5.1.2　$\gcd(C_{i-1}^{n-1}, C_i^{n-1}) = \dfrac{C_i^{n-1}}{Cycle_N(n,i)}$。其中，$n \ge 3, n \in N$，$1 \le i \le n, i \in N$。

[證明]

$$
\begin{aligned}
&\gcd(C_{i-1}^{n-1}, C_i^{n-1}) \\
&= \gcd\left(\frac{(n-1)\,!}{(i-1)\,!\,(n-i)!}, \frac{(n-1)\,!}{i\,!\,(n-i-1)\,!}\right) \\
&= \gcd\left(\frac{i\times(n-1)(n-2)\times\ldots\times(n-i+1)}{i\,!}, \frac{(n-1)(n-2)\times\ldots\times(n-i)}{i\,!}\right) \\
&= \frac{\gcd(i\times(n-1)(n-2)\times\ldots\times(n-i+1), (n-1)(n-2)\times\ldots\times(n-i))}{i\,!} \\
&= \frac{(n-1)(n-2)\times\ldots\times(n-i+1)\times\gcd(n-i,i)}{i\,!} \\
&= \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-i)}{i\,!}\times\frac{\gcd(n-i,i)}{n-i} \\
&= \frac{(n-1)\,!}{i\,!\,(n-i-1)\,!}\times\frac{\gcd(n-i,i)}{n-i} \\
&= \frac{C_i^{n-1}}{Cycle_N(n,i)}
\end{aligned}
$$

鄰數定理得證。

□

猜想 5.1.3 $Cycle_N(n) = lcm(C_0^{n-1}, C_1^{n-1}, \ldots, C_{n-1}^{n-1})$ 。

本研究尚未找出猜想 5.1.3 的證明，但根據文獻[2]顯示，已有人提出猜想 5.1.3 的證明。

單列猜想，第 $n-1$ 列巴斯卡三角形與 $Cycle_N(n)$ 的關係。舉例 $n=8$，如圖 5.1.4。

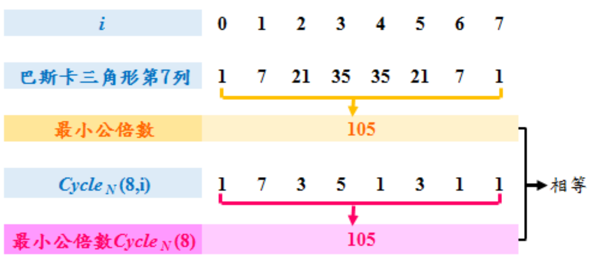


圖 5.1.4 單列猜想

猜想 5.1.5 $Cycle_N(n+1) = lcm\left(\frac{C_0^{n-1}}{Cycle_N(n,0)}, \frac{C_1^{n-1}}{Cycle_N(n,1)}, \ldots, \frac{C_{n-1}^{n-1}}{Cycle_N(n,n-1)}\right)\times n$ 。

雙列猜想，第 $n-1$ 列巴斯卡三角形、$Cycle_N(n,i)$ 與 $Cycle_N(n+1)$ 的關係。

舉例 $n=8$，如圖 5.1.6。

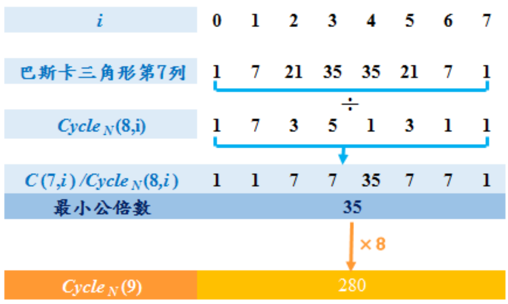


圖 5.1.6　雙列猜想

陸、對射

一、$f_N(n,k)$ 與 $Cycle_N(n,i)$ 對射

性質 6.1.1　$f_N(t-s,s)=Cycle_N(t,s)$，　$t\geq 3, t\in N$，　$1\leq s<t, s\in N$ 。

[證明]

使用數學歸納法來證明。

$t=3$，$1\leq s<3, s\in N$:

$s=1$時，

$$f_N(2,1)=\frac{lcm(2,1)}{1}=\frac{lcm(3-1,1)}{1}=Cycle_N(3,1) \text{ 成立。}$$

$s=2$ 時，

$$f_N(1,2)=\frac{lcm(1,2)}{2}=\frac{lcm(3-2,2)}{2}=Cycle_N(3,2) \text{ 亦成立。}$$

$t=3$，$1\leq s<3, s\in N$ 。 $f_N(3-s,s)=Cycle_N(3,s)$ 成立。

$t=4$，$1\leq s<4, s\in N$:

$s=1$時，

$$f_N(3,1)=\frac{lcm(3,1)}{1}=\frac{lcm(4-1,1)}{1}=Cycle_N(4,1) \text{ 成立。}$$

設 $s=2$ 時成立，

$$f_N(2,2)=Cycle_N(4,2) \tag{6.1.2}$$

$s=3$時，考慮式子 6.1.2，

$$f_N(2,2)+\frac{2\times lcm(1,3)-3\times lcm(2,2)}{6}$$
$$=Cycle_N(4,2)+\frac{2\times lcm(1,3)-3\times lcm(2,2)}{6}$$

$$\frac{lcm(2,2)}{2}+\frac{2\times lcm(1,3)-3\times lcm(2,2)}{6}$$
$$=\frac{lcm(4-2,2)}{2}+\frac{2\times lcm(1,3)-3\times lcm(2,2)}{6}$$

$$\frac{1\times lcm(1,3)}{3}=\frac{1\times lcm(1,3)}{3}$$

$$\frac{1\times lcm(1,3)}{3}=\frac{1\times lcm(4-3,3)}{3}$$

$f_N(1,3)=Cycle_N(4,3)$ 成立。

$t=4$，$1\le s<4, s\in N$。$f_N(4-s,s)=Cycle_N(4,s)$ 成立。

設 $t=a$， $1\le s<a, s\in N$ 時成立:

$s=1$時，

$$f_N(a-1,1)=\frac{lcm(a-1,1)}{1}=Cycle_N(a,1) \text{ 成立。} \tag{6.1.3}$$

$s=2$時，

$$f_N(a-2,2)=\frac{lcm(a-2,2)}{2}=Cycle_N(a,2) \text{ 也成立。} \tag{6.1.4}$$

設 $s=a-2$ 時成立，

$$f_N(2,a-2)=Cycle_N(a,a-2) \tag{6.1.5}$$

當 $s=a-1$ 時，考慮式子 6.1.5，

$$f_N(2,a-2)+\frac{(a-2)\times lcm(1,a-1)+(a-1)\times lcm(2,a-2)}{(a-1)(a-2)}$$
$$=Cycle_N(a,a-2)+\frac{(a-2)\times lcm(1,a-1)+(a-1)\times lcm(2,a-2)}{(a-1)(a-2)}$$

$$\frac{lcm(2,a-2)}{a-2}+\frac{(a-2)\times lcm(1,a-1)+(a-1)\times lcm(2,a-2)}{(a-1)(a-2)}$$
$$=\frac{lcm(a-(a-2),a-2)}{a-2}+\frac{(a-2)\times lcm(1,a-1)+(a-1)\times lcm(a-(a-2),a-2)}{(a-1)(a-2)}$$

$$\frac{lcm(1,a-1)}{a-1}=\frac{lcm(a-(a-1),a-1)}{a-1}$$

$$f_N(1,a-1)=Cycle_N(a,a-1)\text{ 成立。} \tag{6.1.6}$$

$t=a$，$1\le s<a,s\in N$。$f_N(a-s,s)=Cycle_N(a,s)$ 成立。

$t=a+1$，$1\le s<a+1,s\in N$:

$s=1$時，考慮式子 6.1.3，

$$f_N(a-1,1)+(lcm(a,1)-lcm(a-1,1))$$
$$=Cycle_N(a,1)+(lcm(a,1)-lcm(a-1,1))$$
$$lcm(a-1,1)+lcm(a,1)-lcm(a-1,1)$$
$$=lcm(a-1,1)+lcm(a,1)-lcm(a-1,1)$$
$$lcm(a,1)=lcm(a,1)$$
$$lcm(a,1)=lcm((a+1)-1,1)$$

$$f_N(a,1)=Cycle_N(a+1,1)\text{ 成立。}$$

$s=2$時，考慮式子 6.1.4，

$$f_N(a-2,2)+\frac{lcm(a-1,2)-lcm(a-2,2)}{2}$$
$$=Cycle_N(a,2)+\frac{lcm(a-1,2)-lcm(a-2,2)}{2}$$

$$\frac{lcm(a-2,2)}{2}+\frac{lcm(a-1,2)-lcm(a-2,2)}{2}$$
$$=\frac{lcm(a-2,2)}{2}+\frac{lcm(a-1,2)-lcm(a-2,2)}{2}$$
$$\frac{lcm(a-1,2)}{2}=\frac{lcm(a-1,2)}{2}$$
$$\frac{lcm(a-1,2)}{2}=\frac{lcm((a+1)-2,2)}{2}$$

$$f_N(a-1,2)=Cycle_N(a+1,2)\text{ 成立。}$$

$s=a-1$時，考慮式子 6.1.6，

$$f_N(1,a-1)+\frac{lcm(2,a-1)-lcm(1,a-1)}{a-1}$$
$$=Cycle_N(a,a-1)+\frac{lcm(2,a-1)-lcm(1,a-1)}{a-1}$$

$$\frac{lcm(1,a-1)}{a-1}+\frac{lcm(2,a-1)-lcm(1,a-1)}{a-1}$$
$$=\frac{lcm(a-(a-1),a-1)}{a-1}+\frac{lcm(2,a-1)-lcm(1,a-1)}{a-1}$$

$$\frac{lcm(2,a-1)}{a-1}=\frac{lcm(2,a-1)}{a-1}$$

$$\frac{lcm(2,a-1)}{a-1}=\frac{lcm((a+1)-(a-1),a-1)}{a-1}$$

$$f_N(2,a-1)=Cycle_N(a+1,a-1)\text{ 成立。}$$

$s=a$ 時，

$$f_N(a+1-a,a)=\frac{lcm(a+1-a,a)}{a}=Cycle_N(a+1,a)\text{ 成立。}$$

$t=a+1$，$1\le s<a+1,s\in N$。 $f_N(a-s+1,s)=Cycle_N(a+1,s)$ 成立。

可得， $f_N(t-s,s)=Cycle_N(t,s)$ ， $t\ge 3,t\in N$ ， $1\le s<t,s\in N$ 。

性質 6.1.1 證明完畢。

□

二、 $f_N(n,k)$ 與 $Cycle_F(n,i)$ 對射

在本章節，費氏數列為，$F_0=0$ ，$F_1=1$ ，$F_2=1$ ，$F_3=2$ ，$F_i=F_{i-1}+F_{i-2}$ ，$\forall i\ge 2$ 。

性質 5.2.1 若 $i=0$ ，則 $Cycle_F(n,0)=1$ 。 $n\ge 3,n\in N$ 。

若 $0\le i<n,i\in N$ ，則 $Cycle_F(n,i)=\frac{lcm(n-i,F_i)}{F_i}$ 。 $n\ge 3,n\in N$ 。

由性質 4.1.2，同理可證。

性質 6.2.2 $f_N(t-s,F_s)=Cycle_F(t,s)$ ， $t\ge 3,t\in N$ ； $1\le s<t,s\in N$ 。

[證明]

使用數學歸納法證明。

$t=3$ ，$1\le s<3,s\in N$:

$s=1$ 時，

$$f_N(2,F_1)=\frac{lcm(2,F_1)}{F_1}=\frac{lcm(3-1,F_1)}{F_1}=Cycle_F(3,1)\text{ 成立。}$$

$s=2$ 時，

$$f_N(1,F_2)=\frac{lcm(1,F_2)}{F_2}=\frac{lcm(3-2,F_2)}{F_2}=Cycle_F(3,2)\text{ 亦成立。}$$

$t=3$，$1\le s<3, s\in N$。$f_N(3-s,F_s)=Cycle_F(3,s)$ 成立。

$t=4$，$1\le s<4, s\in N$:

$s=1$時，

$$f_N(3,F_1)=\frac{lcm(3,F_1)}{F_1}=\frac{lcm(4-1,F_1)}{F_1}=Cycle_F(4,1) \text{ 成立。}$$

設 $s=2$ 時成立，

$$f_N(2,F_2)=Cycle_F(4,2) \tag{6.2.3}$$

當 $s=3$時，考慮式子 6.2.3，

$$f_N(2,F_2)+\frac{F_2\times lcm(1,F_3)-F_3\times lcm(2,F_2)}{F_2\times F_3}$$

$$=Cycle_F(4,2)+\frac{F_2\times lcm(1,F_3)-F_3\times lcm(2,F_2)}{F_2\times F_3}$$

通分，

$$\frac{lcm(2,F_2)}{F_2}+\frac{F_2\times lcm(1,F_3)-F_3\times lcm(2,F_2)}{F_2\times F_3}$$

$$=\frac{lcm(4-2,F_2)}{F_2}+\frac{F_2\times lcm(1,F_3)-F_3\times lcm(2,F_2)}{F_2\times F_3}$$

$$\frac{1\times lcm(1,F_3)}{F_3}=\frac{1\times lcm(1,F_3)}{F_3}$$

$$\frac{1\times lcm(1,F_3)}{F_3}=\frac{1\times lcm(4-3,F_3)}{F_3}$$

$$f_N(1,F_3)=Cycle_F(4,3) \text{ 成立。}$$

$t=4$，$1\le s<4, s\in N$。$f_N(4-s,F_s)=Cycle_F(4,s)$ 成立。

設 $t=a$，$1\le s<a, s\in N$ 時成立:

$$s=1\text{時，}\ f_N(a-1,F_1)=\frac{lcm(a-1,F_1)}{F_1}=Cycle_F(a,1) \text{ 成立。} \tag{6.2.4}$$

$$s=2\text{時，}\ f_N(a-2,F_2)=\frac{lcm(a-2,F_2)}{F_2}=Cycle_F(a,2) \text{ 也成立。} \tag{6.2.5}$$

$$\text{設 } s=a-2 \text{ 時成立，}\ f_N(2,F_{a-2})=Cycle_F(a,a-2) \tag{6.2.6}$$

當 $s=a-1$ 時，$f_N(2,F_{a-2})=Cycle_F(a,a-2)$

$$f_N(2,F_{a-2})+\frac{F_{a-2}\times lcm(1,F_{a-1})+F_{a-1}\times lcm(2,F_{a-2})}{F_{a-1}\times F_{a-2}}$$

$$=Cycle_F(a,a-2)+\frac{F_{a-2}\times lcm(1,F_{a-1})+F_{a-1}\times lcm(2,F_{a-2})}{F_{a-1}\times F_{a-2}}$$

$$\frac{lcm(2,F_{a-2})}{F_{a-2}}+\frac{F_{a-2}\times lcm(1,F_{a-1})+F_{a-1}\times lcm(2,F_{a-2})}{F_{a-1}\times F_{a-2}}$$

$$=\frac{lcm(a-(a-2),F_{a-2})}{F_{a-2}}+\frac{F_{a-2}\times lcm(1,F_{a-1})+F_{a-1}\times lcm(2,F_{a-2})}{F_{a-1}\times F_{a-2}}$$

$$\frac{lcm(1,F_{a-1})}{F_{a-1}}=\frac{lcm(a-(a-1),F_{a-1})}{F_{a-1}}$$

$f_N(1,F_{a-1})=Cycle_F(a,a-1)$ 成立。 (6.2.7)

$t=a$ ，$1\le s<a,s\in N$ 。 $f_N(a-s,F_s)=Cycle_F(a,s)$ 成立。

$t=a+1$ ，$1\le s<a+1,s\in N$ 時，

$s=1$時，考慮式子 6.2.4，

$$f_N(a-1,F_1)+\frac{lcm(a,F_1)-lcm(a-1,F_1)}{F_1}$$

$$=Cycle_F(a,F_1)+\frac{lcm(a,F_1)-lcm(a-1,F_1)}{F_1}$$

$$\frac{lcm(a-1,F_1)}{F_1}+\frac{lcm(a,F_1)-lcm(a-1,F_1)}{F_1}$$

$$=\frac{lcm(a-1,F_1)}{F_1}+\frac{lcm(a,F_1)-lcm(a-1,F_1)}{F_1}$$

$$\frac{lcm(a,F_1)}{F_1}=\frac{lcm(a,F_1)}{F_1}$$

$f_N(a,F_1)=Cycle_F(a+1,1)$ 成立。

$s=2$ 時，考慮式子 6.2.5，

$$f_N(a-2,F_2)+\frac{lcm(a-1,F_2)-lcm(a-2,F_2)}{F_2}$$

$$=Cycle_F(a,2)+\frac{lcm(a-1,F_2)-lcm(a-2,F_2)}{F_2}$$

$$\frac{lcm(a-2,F_2)}{F_2}+\frac{lcm(a-1,F_2)-lcm(a-2,F_2)}{F_2}$$

$$=\frac{lcm(a-2,F_2)}{F_2}+\frac{lcm(a-1,F_2)-lcm(a-2,F_2)}{F_2}$$

$$\frac{lcm(a-1,F_2)}{2}=\frac{lcm(a-1,F_2)}{2}$$

$$\frac{lcm(a-1,F_2)}{2}=\frac{lcm((a+1)-2,F_2)}{2}$$

$f_N(a-1,2)=Cycle_F(a+1,2)$ 成立。

$s=a-1$時，考慮式子 6.2.6，

$$f_N(1,F_{a-1})+\frac{lcm(2,F_{a-1})-lcm(1,F_{a-1})}{F_{a-1}}$$

$$=Cycle_F(a,a-1)+\frac{lcm(2,F_{a-1})-lcm(1,F_{a-1})}{F_{a-1}}$$

$$\frac{lcm(1,F_{a-1})}{F_{a-1}}+\frac{lcm(2,F_{a-1})-lcm(1,F_{a-1})}{F_{a-1}}$$

$$=\frac{lcm(1,F_{a-1})}{F_{a-1}}+\frac{lcm(2,F_{a-1})-lcm(1,F_{a-1})}{F_{a-1}}$$

$$\frac{lcm(2,F_{a-1})}{F_{a-1}}=\frac{lcm(2,F_{a-1})}{F_{a-1}}$$

$$\frac{lcm(2,F_{a-1})}{F_{a-1}}=\frac{lcm((a+1)-(a-1),F_{a-1})}{F_{a-1}}$$

$$f_N(2,F_{a-1})=Cycle_F(a+1,a-1)$$

$s=a$時，

$f_N(a+1-a,F_a)=\dfrac{lcm(a+1-a,F_a)}{F_a}=Cycle_F(a+1,a)$ 成立。

$t=a+1$，$1\le s<a+1,s\in N$。 $f_N(a-s+1,F_s)=Cycle_F(a+1,s)$ 成立。

可得， $f_N(t-s,F_s)=Cycle_F(t,s)$ ，$t\ge 3,t\in N$ ；$1\le s<t,s\in N$ 。

性質 6.2.2 得證。

□

三、 $f_N(n,k)$與$Cycle_P(n,i)$對射

本章節，巴斯卡三角形第$n-2$列的數字為，C_0^{n-2} 、C_1^{n-2} 、…、C_{n-2}^{n-2} ，$\forall n\ge 3$，其中，

$$C_i^n=\frac{n\,!}{(n-i)\,!\,i\,!}\text{。}$$

性質 6.3.1 若$i=0$ ，則$Cycle_P(n,0)=1$ 。$n\ge 3,n\in N$ 。

若$0\le i<n,i\in N$ ，則$Cycle_P(n,i)=\dfrac{lcm(n-i,C_{i-1}^{n-2})}{C_{i-1}^{n-2}}$ 。$n\ge 3,n\in N$ 。

由性質 4.1.2，同理可證。

性質 6.3.2 $f_N(t-s,C_{s-1}^{t-2})=Cycle_P(t,s)$。$t\geq 3,t\in N$；$1\leq s<t,s\in N$。

[證明]

使用數學歸納法證明。

$t=3$，$1\leq s<3,s\in N$:

$s=1$時，

$$f_N(2,C_0^1)=\frac{lcm(2,C_0^1)}{C_0^1}=\frac{lcm(3-1,C_0^1)}{C_0^1}=Cycle_P(3,1)\text{ 成立。}$$

$s=2$時，

$$f_N(1,C_1^1)=\frac{lcm(1,C_1^1)}{C_1^1}=\frac{lcm(3-2,C_1^1)}{C_1^1}=Cycle_P(3,2)\text{ 亦成立。}$$

$t=3$，$1\leq s<3,s\in N$。$f_N(3-s,C_{s-1}^1)=Cycle_P(3,s)$ 成立。

$t=4$，$1\leq s<4,s\in N$:

$s=1$時，

$$f_N(3,C_0^2)=\frac{lcm(3,C_0^2)}{C_0^2}=\frac{lcm(4-1,C_0^2)}{C_0^2}=Cycle_P(4,1)\text{ 成立。}$$

設$s=2$時成立，

$$f_N(2,C_1^2)=Cycle_P(4,2) \tag{6.3.3}$$

當$s=3$時，考慮式子 6.3.3，

$$\begin{aligned}&f_N(2,C_1^2)+\frac{C_1^2\times lcm(1,C_2^2)-C_2^2\times lcm(2,C_1^2)}{C_1^2\times C_2^2}\\&=Cycle_P(4,2)+\frac{C_1^2\times lcm(1,C_2^2)-C_2^2\times lcm(2,C_1^2)}{C_1^2\times C_2^2}\end{aligned}$$

通分，

$$\begin{aligned}&\frac{lcm(2,C_1^2)}{C_1^2}+\frac{C_1^2\times lcm(1,C_2^2)-C_2^2\times lcm(2,C_1^2)}{C_1^2\times C_2^2}\\&=\frac{lcm(4-2,C_1^2)}{C_1^2}+\frac{C_1^2\times lcm(1,C_2^2)-C_2^2\times lcm(2,C_1^2)}{C_1^2\times C_2^2}\end{aligned}$$

$$\frac{1\times lcm(1,C_2^2)}{C_2^2}=\frac{1\times lcm(1,C_2^2)}{C_2^2}$$

$$\frac{1\times lcm(1,C_2^2)}{C_2^2}=\frac{1\times lcm(4-3,C_2^2)}{C_2^2}$$

$$f_N(1,F_3)=Cycle_P(4,3)\text{ 成立。}$$

$t=4$ ，$1\le s<4, s\in N$ 。 $f_N(4-s, C_{s-1}^{2})=Cycle_P(4,s)$ 成立。

設 $t=a$ ，$1\le s<a, s\in N$ 時成立:

$s=1$時，

$$f_N(a-1, C_0^{a-2})=\frac{lcm(a-1, C_0^{a-2})}{C_0^{a-2}}=Cycle_P(a,1) \text{ 成立。} \tag{6.3.4}$$

$s=2$時，

$$f_N(a-2, C_1^{a-2})=\frac{lcm(a-2, C_1^{a-2})}{C_1^{a-2}}=Cycle_P(a,2) \text{ 也成立。} \tag{6.3.5}$$

設 $s=a-2$ 時成立，

$$f_N(2, C_{a-3}^{a-2})=Cycle_P(a,a-2) \tag{6.3.6}$$

當 $s=a-1$ 時，考慮式子 6.3.6，

$$f_N(2, C_{a-3}^{a-2})+\frac{C_{a-3}^{a-2}\times lcm(1, C_{a-2}^{a-2})+C_{a-2}^{a-2}\times lcm(2, C_{a-3}^{a-2})}{C_{a-2}^{a-2}\times C_{a-3}^{a-2}}$$

$$=Cycle_P(a,a-2)+\frac{C_{a-3}^{a-2}\times lcm(1, C_{a-2}^{a-2})+C_{a-2}^{a-2}\times lcm(2, C_{a-3}^{a-2})}{C_{a-2}^{a-2}\times C_{a-3}^{a-2}}$$

$$\frac{lcm(2, C_{a-3}^{a-2})}{C_{a-3}^{a-2}}+\frac{C_{a-3}^{a-2}\times lcm(1, C_{a-2}^{a-2})+C_{a-2}^{a-2}\times lcm(2, C_{a-3}^{a-2})}{C_{a-2}^{a-2}\times C_{a-3}^{a-2}}$$

$$=\frac{lcm(a-(a-2), F_{a-2})}{C_{a-3}^{a-2}}+\frac{C_{a-3}^{a-2}\times lcm(1, C_{a-2}^{a-2})+C_{a-2}^{a-2}\times lcm(2, C_{a-3}^{a-2})}{C_{a-2}^{a-2}\times C_{a-3}^{a-2}}$$

$$\frac{lcm(1, C_{a-2}^{a-2})}{C_{a-2}^{a-2}}=\frac{lcm(1, C_{a-2}^{a-2})}{C_{a-2}^{a-2}}$$

$$\frac{lcm(1, C_{a-2}^{a-2})}{C_{a-2}^{a-2}}=\frac{lcm(a-(a-1), C_{a-2}^{a-2})}{C_{a-2}^{a-2}}$$

$$f_N(1, C_{a-2}^{a-2})=Cycle_P(a,a-1) \text{ 成立。} \tag{6.3.7}$$

$t=a$ ，$1\le s<a, s\in N$ 。 $f_N(a-s, C_{s-1}^{a-2})=Cycle_P(a,s)$ 成立。

$t=a+1$ ，$1\le s<a+1, s\in N$ 時，

$s=1$時，考慮式子 6.3.4，

$$f_N(a-1, C_0^{a-2})+\frac{C_0^{a-2}\times lcm(a, C_0^{a-1})-C_0^{a-1}\times lcm(a-1, C_0^{a-2})}{C_0^{a-1}\times C_0^{a-2}}$$

$$=Cycle_P(a,1)+\frac{C_0^{a-2}\times lcm(a, C_0^{a-1})-C_0^{a-1}\times lcm(a-1, C_0^{a-2})}{C_0^{a-1}\times C_0^{a-2}}$$

$$\frac{lcm(a-1, C_0^{a-2})}{C_0^{a-2}}+\frac{C_0^{a-2}\times lcm(a, C_0^{a-1})-C_0^{a-1}\times lcm(a-1, C_0^{a-2})}{C_0^{a-1}\times C_0^{a-2}}$$

$$=\frac{lcm(a-1, C_0^{a-2})}{C_0^{a-2}}+\frac{C_0^{a-2}\times lcm(a, C_0^{a-1})-C_0^{a-1}\times lcm(a-1, C_0^{a-2})}{C_0^{a-1}\times C_0^{a-2}}$$

$$\frac{lcm(a,C_0^{a-1})}{C_0^{a-1}}=\frac{lcm(a,C_0^{a-1})}{C_0^{a-1}}$$

$$\frac{lcm(a,C_0^{a-1})}{C_0^{a-1}}=\frac{lcm((a+1)-1,C_0^{a-1})}{C_0^{a-1}}$$

$f_N(a,C_0^{a-1})=Cycle_P(a+1,1)$ 成立。

$s=2$ 時，考慮式子 6.3.5，

$$f_N(a-2,C_1^{a-2})+\frac{C_1^{a-2}\times lcm(a-1,C_1^{a-1})-C_1^{a-1}\times lcm(a-2,C_1^{a-2})}{C_1^{a-1}\times C_1^{a-2}}$$

$$=Cycle_P(a,2)+\frac{C_1^{a-2}\times lcm(a-1,C_1^{a-1})-C_1^{a-1}\times lcm(a-2,C_1^{a-2})}{C_1^{a-1}\times C_1^{a-2}}$$

$$\frac{lcm(a-2,C_1^{a-2})}{C_1^{a-2}}+\frac{C_1^{a-2}\times lcm(a-1,C_1^{a-1})-C_1^{a-1}\times lcm(a-2,C_1^{a-2})}{C_1^{a-1}\times C_1^{a-2}}$$

$$=\frac{lcm(a-2,C_1^{a-2})}{C_1^{a-2}}+\frac{C_1^{a-2}\times lcm(a-1,C_1^{a-1})-C_1^{a-1}\times lcm(a-2,C_1^{a-2})}{C_1^{a-1}\times C_1^{a-2}}$$

$$\frac{lcm(a-1,C_1^{a-1})}{C_1^{a-1}}=\frac{lcm(a-1,C_1^{a-1})}{C_1^{a-1}}$$

$$\frac{lcm(a-1,C_1^{a-1})}{C_1^{a-1}}=\frac{lcm((a+1)-2,C_1^{a-1})}{C_1^{a-1}}$$

$f_N(a-1,C_1^{a-1})=Cycle_P(a+1,2)$ 成立。

$s=a-1$ 時，考慮式子 6.3.7，

$$f_N(1,C_{a-2}^{a-2})+\frac{C_{a-2}^{a-2}\times lcm(2,C_{a-2}^{a-1})-C_{a-2}^{a-1}\times lcm(1,C_{a-2}^{a-2})}{C_{a-2}^{a-1}\times C_{a-2}^{a-2}}$$

$$=Cycle_P(a,a-1)+\frac{C_{a-2}^{a-2}\times lcm(2,C_{a-2}^{a-1})-C_{a-2}^{a-1}\times lcm(1,C_{a-2}^{a-2})}{C_{a-2}^{a-1}\times C_{a-2}^{a-2}}$$

$$\frac{lcm(1,C_{a-2}^{a-2})}{C_{a-2}^{a-2}}+\frac{C_{a-2}^{a-2}\times lcm(2,C_{a-2}^{a-1})-C_{a-2}^{a-1}\times lcm(1,C_{a-2}^{a-2})}{C_{a-2}^{a-1}\times C_{a-2}^{a-2}}$$

$$=\frac{lcm(1,C_{a-2}^{a-2})}{C_{a-2}^{a-2}}+\frac{C_{a-2}^{a-2}\times lcm(2,C_{a-2}^{a-1})-C_{a-2}^{a-1}\times lcm(1,C_{a-2}^{a-2})}{C_{a-2}^{a-1}\times C_{a-2}^{a-2}}$$

$$\frac{lcm(2,C_{a-2}^{a-1})}{C_{a-2}^{a-1}}=\frac{lcm(2,C_{a-2}^{a-1})}{C_{a-2}^{a-1}}$$

$$\frac{lcm(2,C_{a-2}^{a-1})}{C_{a-2}^{a-1}}=\frac{lcm((a+1)-(a-1),C_{a-2}^{a-1})}{C_{a-2}^{a-1}}$$

$f_N(2,C_{a-2}^{a-1})=Cycle_P(a+1,a-1)$ 成立。

$s=a$ 時，

$f_N(a+1-a,C_{a-1}^{a-1})=\dfrac{lcm(a+1-a,C_{a-1}^{a-1})}{C_{a-1}^{a-1}}=Cycle_P(a+1,a)$ 成立。

$t=a+1$，$1\le s<a+1, s\in N$。$f_N(a-s+1, C_{s-1}^{a-1})=Cycle_P(a+1,s)$ 成立。

$f_N(t-s, C_{s-1}^{t-2})=Cycle_P(t,s)$。$t\ge 3, t\in N$；$1\le s<t, s\in N$。

性質 6.3.2 得證。

□

柒、應用

一、通訊碼

有一串 n 項皆無重複的英文字母序列，依照先後順序予以對應編號 i，$0\le i<n$，可利用 *parking problem* 落點重新定義，得一串新的數字序列，此時再對應回英文字母，即完成。每改變一種 *parking problem* 車子移動的次數 k，就構成一種通訊碼系統。

透過逆序法演算落點建構。共有 $Cycle_N(n)=\dfrac{lcm(1,2,3,...,n)}{n}$ 種通訊碼系統。

二、倉儲應用

設有一汽車製造商，今有 n 種款式的汽車，第 0 種至第 $n-1$ 種，分別放置於 n 種倉儲。
規定每種汽車都各自有如 *parking problem* 給定的移動模式儲存。
可藉本研究的模式，知道汽車倉儲的存放結果。如此，本研究的結果，符合人性化的現象。

捌、研究結果

本研究探討八隻青蛙與停車場問題，並將二者間對射做證明，亦提出本研究的應用。
重要發現，有下列數項。

1.鄰數定理 $\gcd(C_{i-1}^{n-1}, C_i^{n-1})=\dfrac{C_i^{n-1}}{Cycle_N(n,i)}$。$n\ge 3, n\in N$， $1\le i\le n, i\in N$。

2.單列猜想 $Cycle_N(n)=lcm(C_0^{n-1}, C_1^{n-1},..., C_{n-1}^{n-1})$，$n\ge 3, n\in N$。

3.雙列猜想 $Cycle_N(n+1)=lcm(\dfrac{C_0^{n-1}}{Cycle_N(n,0)}, \dfrac{C_1^{n-1}}{Cycle_N(n,1)},..., \dfrac{C_{n-1}^{n-1}}{Cycle_N(n,n-1)})\times n$，
$n\ge 3, n\in N$。

玖、未來展望

定義 9.1.1 $f_F(n,k)$ 為正 n 邊形，0 至 $n-1$ 號青蛙「每次移動格數」依序呈費氏數列時，移動 k 次時，有青蛙的荷葉數。$n\geq 3, n\in N$；$k\in N$。

定義 9.1.2 $f_P(n,k)$ 為正 n 邊形，0 至 $n-1$ 號青蛙「每次移動格數」依序呈巴斯卡三角形第 $n-2$ 列數字時，移動 k 次時，有青蛙的荷葉數。$n\geq 3, n\in N$；$k\in N$。

正 n 邊形，青蛙問題移 k 次「有青蛙荷葉數」，停車場問題「i 號車循環數」對射。

目前已完成， $f_N(n,k)$ 和 $Cycle_N(n,k)$ 之間的對射。
$f_N(n,k)$ 和 $Cycle_F(n,k)$ 之間的對射。
$f_N(n,k)$ 和 $Cycle_P(n,k)$ 之間的對射。

未來研究方向，$f_F(n,k)$ 和 $Cycle_N(n,k)$ 之間的對射。
$f_F(n,k)$ 和 $Cycle_F(n,k)$ 之間的對射。
$f_F(n,k)$ 和 $Cycle_P(n,k)$ 之間的對射。
$f_P(n,k)$ 和 $Cycle_N(n,k)$ 之間的對射。
$f_P(n,k)$ 和 $Cycle_F(n,k)$ 之間的對射。
$f_P(n,k)$ 和 $Cycle_P(n,k)$ 之間的對射。

拾、參考文獻

[1]賴俊儒，停車場就是彈硬幣，2005 年台灣國際科學展覽，科學教育館網站。

[2]Bakir FARHI，An identity involving the least common multiple of binomial coefficients and its application，(20170605 引用)，引用自 arxiv.org/pdf/0906.2295v2.pdf。

[3]Richard P. Stanley，PARKING FUNCTIONS，Department of Mathematics ,M.I.T. 2-375, Cambridge, MA 02139，Massachusetts Institute of Technology。

【評語】030424

從科學研習月刊中青蛙問題延伸成停車場問題。探討車子依特定的移動規則，在移動若干步後，每輛車所在的位置。針對移動多少步回歸原位，以及改變移方式對結果的影響作了討論，並試圖討論與青蛙問題的關連。有必要把兩問題差異性與關連說明更清晰，結論敘述可更清楚，且一些關鍵步驟的說明過於簡略，如果能針對這些部分做適當的修正應該會更好。文中所得的對射是一個等式，而非組合數學意義下的對射，使用名詞宜精確。本文的想法有創意的，也得到了一些結果。但是作品報告引進大量的符號，陳述方式有刻意複雜化與數學化傾向，使得報告非常難以閱讀。藉由符號的輔助來簡化問題是不錯的想法，但符號過多就變成累贅了。

作品海報

前言

研究主題

題目 1. 青蛙問題[1]:取自科學月刊 2016 年 12 月 P61.，在正 n 邊形池塘，0 至 $n-1$ 號青蛙都從原點出發，每次移動自己的編號。重疊問題，可能會多隻青蛙對應一片荷葉。如圖 3。

題目 2. 停車場問題:在正 n 邊形停車場，0 至 $n-1$ 號車都從原點出發，每次移動自己的編號。非重疊問題，只會一輛車對應一個車位。如圖 4。

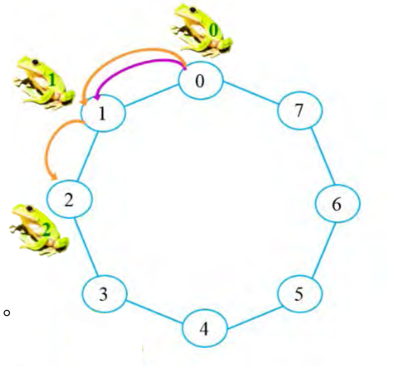


圖 3.

文獻探討

本研究停車場問題相當停車就是彈硬幣[2]的變種型。兩者比較，如表 5。

表 5.

作品名稱	八隻青蛙與停車場的邂逅	停車就是彈硬幣
車子停入規則	給定移動格數	給定司機想停的(初始)位置
停車場模式	一直繞圈直到找到車位	都無空位就不停了
	環狀	單行道，直線
解題技巧	空白數列	標號樹

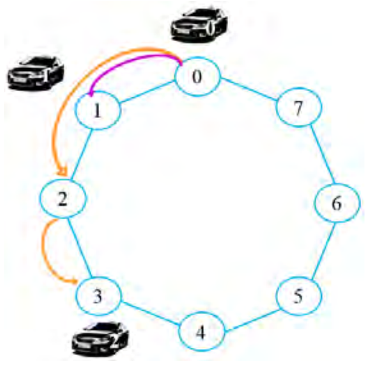


圖 4.

定義

定義 6. 池塘、停車場皆正 n 邊形，青蛙、車編號 i，移動 k 次。$n\ge 3, n\in N$，$0\le i\le n-1, i\in N$，$k\in N$。

定義 7. $F_N(n,i,k)$，正 n 邊形，i 號青蛙移動 k 次的落點。

定義 8. $f_N(n,i,k)$，正 n 邊形，移動 k 次後，有青蛙的荷葉數。

定義 9. $J(n,i,k)$，正 n 邊形，移動 k 次，i 號車而言的空車位數列。空白數列。
例: $J(2,8,1)=\{2,3,4,5,6,7\}$，如圖 10。

定義 11. $R_N(n,i,k)$，正 n 邊形，i 號車移動 k 次，在空白數列中的位置。
$1\le R_N(n,i,k)\le n-i$。

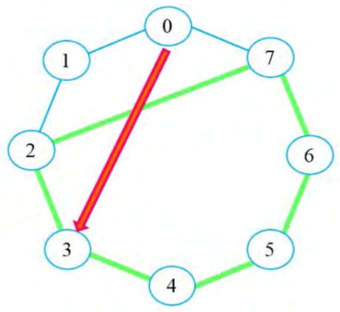


圖 10.

定義 12. $Park_N(n,i,k)$，正 n 邊形，i 號車移動 k 次的落點。

定義 13. $Cycle_N(n)$、$Cycle_F(n,i)$、$Cycle_P(n,i)$，正 n 邊形，i 號車再回到空白數列中原位，需經的最少次數。

定義 14. $Cycle_N(n)$、$Cycle_F(n)$、$Cycle_P(n)$，正 n 邊形，所有車同時回到原位，需經的最少次數。

下標 N、F、P 分別代表，各車「每次移動格數」依序為 0 至 $n-1$、費氏數列、巴斯卡三角形第 $n-2$ 列。

研究目的

(一) 青蛙問題「落點」與「有青蛙的荷葉數」的一般式。

(二) 停車場問題「落點」演算法與「循環數」的一般式。

(三) 停車場問題「循環數」與巴斯卡三角形的關係。

(四) 青蛙問題「有青蛙的荷葉數」和停車場問題「循環數」的數種對射。

青蛙問題

性質 15. $F_N(n,i,k)\equiv ik(\mathrm{mod}\ \ n)$。

性質 16. $f_N(n,i,k)=\dfrac{lcm(n,k)}{k}$。

車子落點

空白數列中位置

性質 17. 若 $(n-i)$ 是 ik 的因數，則 $R_N(n,i,k)=n-i$；
若 $(n-i)$ 不是 ik 的因數，則 $R_N(n,i,k)\equiv ik\ \ (\mathrm{mod}\ \ n-i)$。

逆序法

定義 18. I 號車插入後，i 號車目前位置下移 $\varphi_N(n,i,k,I)$ 格，
至 $\tau_N(n,i,k,I)$。$1\le I\le i$。

演算方法 19. (逆序演算法，如圖 20.)

步驟 1. 先預設 $R_N(n,i,k)$，
$I=i$，$\tau_N(n,i,k,i)=R_N(n,i,k)$。

步驟 2. 逆序插入 $i-1,i-2,\ldots,1$ 號車於 $R_N(n,I,k)$。
$1\le I\le i-1$ $\tau_N(n,i,k,I)=\tau_N(n,i,k,I+1)+\varphi_N(n,i,k,I)$。

步驟 3. i 號車目前位置不動或下移 1 格。
$\varphi_N(n,i,k,I)=0$ 或 1。

步驟 4. $Park_N(n,i,k)=R_N(n,i,k)+\sum_{I=1}^{i}\varphi_N(n,i,k,I)$。

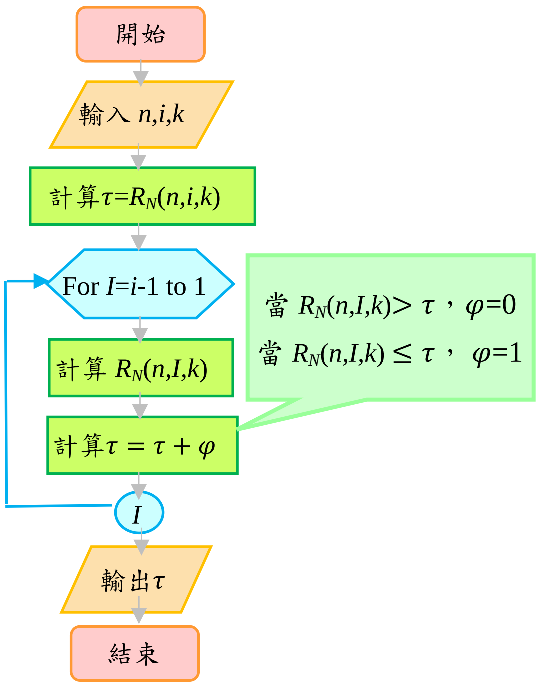


圖 20.

車子循環數 *Cycle*

i 號車循環數

性質 21. 若 $i=0$，則 $Cycle_N(n,0)=1$；若 $0\le i<n$，則 $Cycle_N(n,i)=\dfrac{lcm(n-i,i)}{i}$。

例: $Cycle_N(8,2)=3$，綠正六邊形為空白數列，如圖 22。

性質 23. 若 $i=0$，則 $Cycle_F(n,0)=1$；若 $0\le i<n$，則 $Cycle_F(n,i)=\dfrac{lcm(n-i,F_i)}{F_i}$。

性質 24. 若 $i=0$，則 $Cycle_P(n,0)=1$；若 $0\le i<n$，則 $Cycle_P(n,i)=\dfrac{lcm(n-i,C_{i-1}^{n-2})}{C_{i-1}^{n-2}}$。

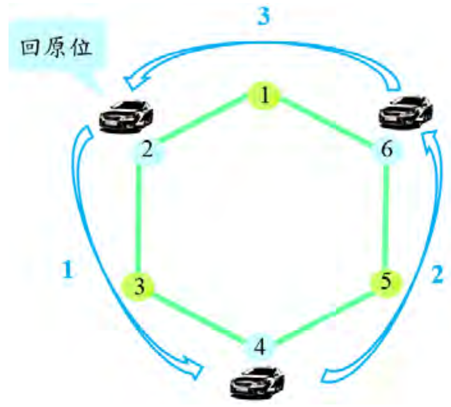


圖 22.

所有車循環數

性質 25. $Cycle_N(n)=lcm(Cycle_N(n,0),Cycle_N(n,1),Cycle_N(n,2),...,Cycle_N(n,n-1))$。

性質 26. 若 $n=a^b$，$Cycle_N(n)=\dfrac{lcm(1,2,...,n-1)}{a^{b-1}}$。若 $n\ne a^b$，$Cycle_N(n)=\dfrac{lcm(1,2,...,n-1)}{n}$。其中，$a\in P, b\in N$。

[證明] $Cycle_N(n)=lcm(1,2,...,n-1)$ 除以「符合 $\gcd(n,i)\ne 1$、$\gcd(n,i)$ 為最高次方的，所有 $\dfrac{n-i}{Cycle_N(n,i)}$ 之積」。

性質 27. $Cycle_N(n)=\dfrac{lcm(1,2,...,n)}{n}$。

性質 28. $Cycle_P(n)=n-1$。

Cycle 與巴斯卡三角形

鄰數定理

定理 29. $\gcd(C_{i-1}^{n-1},C_i^{n-1})=\dfrac{C_i^{n-1}}{Cycle_N(n,i)}$。如圖 30。

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$C(7,i)$	1	7	21	35	35	21	7	1
$Cycle_N(8,i)$	1	7	3	5	1	3	1	1
$C(7,i)\div Cycle_N(8,i)$	1	1	7	7	35	7	7	1

gcd ÷

圖 30. 鄰數定理

單列定理

定理 31. $Cycle_N(n)=lcm(C_0^{n-1},C_1^{n-1},...,C_{n-1}^{n-1})$。如圖 32。有人提出證明。[3]

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$C(7,i)$	1	7	21	35	35	21	7	1
lcm	105							
$Cycle_N(8,i)$	1	7	3	5	1	3	1	1
$Cycle_N(8)$	105							

相等

圖 32. 單列定理

雙列定理

引理 33. $\dfrac{C_i^{n-1}}{Cycle_N(n,i)}\times n=C_i^n\times\gcd(n,i)$。

定義 34. p 為質數，能整除 n 的 p 的冪次的最高次記作 $v_p(n)$。

定義 35. 當 n 以 p 進位制表示時，其各位值的數碼和記作 $S_p(n)$。

引理 36.(庫默爾定理的應用) $v_p(C_i^n)=\dfrac{1}{p-1}(S_p(i)+S_p(n-i)-S_p(n))$。

引理 37. $v_p(C_i^n)\le M-d$。

[證明]

設 $M=v_p(lcm(1,2,...,n+1))$，$d=v_p(\gcd(n,i))$。

令 $n=\sum_{t=0}^{M}n_t p^t, 0\le n_t\le p-1$。

$i=\sum_{t=0}^{M}i_t p^t, 0\le i_t\le p-1$。

$n-i=\sum_{t=0}^{M}j_t p^t, 0\le j_t\le p-1$。

$i_t+j_t-n_t=0, 0\le t\le d-1$。

$i_d+j_d-n_d\le p$。

$i_t+j_t-n_t\le p-1, d\le t\le M-1$。

$i_M+j_M-n_M=-1$。

$v_p(C_i^n)\le\dfrac{1}{p-1}(p+(M-d-1)(p-1)-1)=M-d$

得證。

□

定理 38. $Cycle_N(n+1)=lcm\left(\dfrac{C_0^{n-1}}{Cycle_N(n,0)},\dfrac{C_1^{n-1}}{Cycle_N(n,1)},...,\dfrac{C_{n-1}^{n-1}}{Cycle_N(n,n-1)}\right)\times n$。

[證明]

由引理 33.，

$$lcm\left(\frac{C_0^{n-1}}{Cycle_N(n,0)},\frac{C_1^{n-1}}{Cycle_N(n,1)},...,\frac{C_{n-1}^{n-1}}{Cycle_N(n,n-1)}\right)\times n$$
$$=lcm(C_1^n\times\gcd(n,1),C_2^n\times\gcd(n,2),...,C_{n-1}^n\times\gcd(n,n-1))$$

。

$Cycle_N(n+1)$
$=lcm(C_1^n,C_2^n,...,C_{n-1}^n)$，

由引理 37.，

$C_i^n\times\gcd(n,i)|Cycle_N(n+1)$。

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$C(7,i)$	1	7	21	35	35	21	7	1
$Cycle_N(8,i)$	1	7	3	5	1	3	1	1
$C(7,i)/Cycle_N(8,i)$	1	1	7	7	35	7	7	1
lcm	35							
$Cycle_N(9)$	280							

÷ ×8

圖 39. 雙列定理

$Cycle_N(n+1)=lcm(C_1^n\times\gcd(n,1),C_2^n\times\gcd(n,2),...,C_{n-1}^n\times\gcd(n,n-1))$ 成立。

雙列定理得證。

□

三個定理是以 *Cycle* 對於巴斯卡三角形的影響範圍命之。橘色部分，如圖 30.、圖 32.、圖 39.。

定理 29.、定理 31.及定理 38.，對於 *Cycle* 與巴斯卡三角形之間的關係，如圖 40.。

如此，自然數與巴斯卡三角形之間的交互推導，如圖 41.。

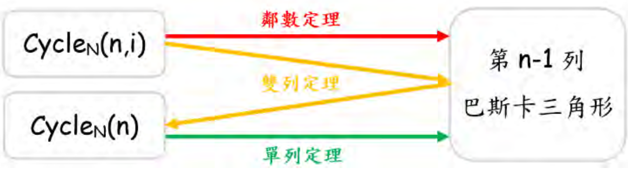


圖 40.

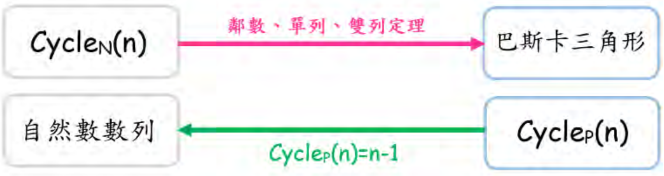


圖 41.

.

青蛙與車子落點

將車子落點拆成四部分表之，$Park_N(8,5,1)$，如圖 42.。

繞過的數目:

藍色部分，i 號車在整數圈繞過的車位數，$i\times$圈數。

粉色部分，i 號車在末圈繞過的車位數，$\sum_{I=1}^{i}\varphi_N(n,i,k,I)$。

移動的數目:

黃色部分，i 號車總移動格數，ik。

棕色部分，起點不列入計算須扣除。

事實 43. $Park_N(n,i,k)=\mathrm{mod}(i\times\left\lfloor\frac{ik}{n-i}\right\rfloor+\sum_{I=1}^{i}\varphi_N(n,i,k,I)+ik-1,n)$。

性質 44. $Park_N(n,i,k)=\mathrm{mod}\left[F_N(n,i,k)+\mathrm{mod}(i\times\left\lfloor\frac{ik}{n-i}\right\rfloor+\sum_{I=1}^{i}\varphi_N(n,i,k,I)-1,n),n\right]$。

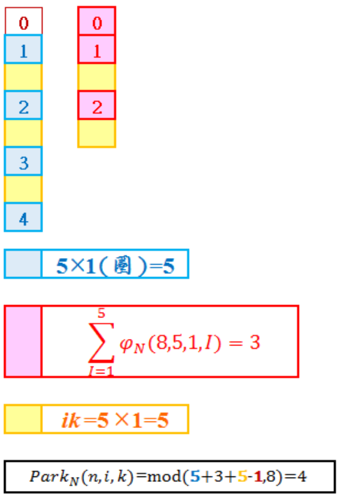


圖 42.

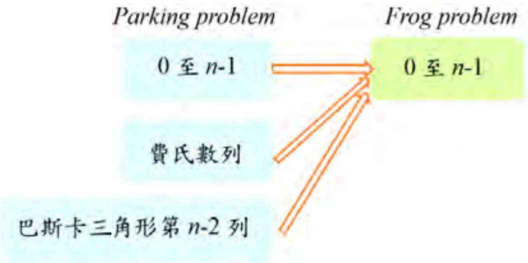
對射

青蛙與停車場存在著對射，發現青蛙對到停車場的三種關係。如圖 48.。

性質 45. $f_N(t-s,s)=Cycle_N(t,s)$，$t\geq 3, t\in N$，$1\leq s<t, s\in N$。

性質 46. $f_N(t-s,F_s)=Cycle_F(t,s)$，$t\geq 3, t\in N$；$1\leq s<t, s\in N$。

性質 47. $f_N(t-s,C_{s-1}^{t-2})=Cycle_P(t,s)$。$t\geq 3, t\in N$；$1\leq s<t, s\in N$。



[證明] 性質 45.、性質 46.、性質 47.均以數學歸納法證明。

圖 48.

應用

通訊碼

有一串 n 項皆無重複的英文字母序列，依照先後順序予以對應編號 i，$0\leq i<n$，可利用 *parking problem* 落點重新定義，得一串新的數字序列，此時再對應回英文字母，即完成。每改變一種 *parking problem* 車子移動的次數 k，就構成一種通訊碼系統。透過逆序法演算落點建構。共有 $Cycle_N(n)=\frac{lcm(1,2,3,...,n)}{n}$ 種通訊碼系統。

倉儲應用

設有一汽車製造商，今有 n 種款式的汽車，第 0 種至第 $n-1$ 種，分別放置於 n 種倉儲。

規定每種汽車都各自有如 *parking problem* 給定的移動模式儲存。

可藉本研究的模式，知道汽車倉儲的存放結果。如此，符合人性化的現象。

結論

本研究探討青蛙問題與停車場問題，並將二者間做對射，亦提出本研究的應用。

Cycle 與巴斯卡三角形的重要定理，有下列三項。

鄰數定理 $\gcd(C_{i-1}^{n-1},C_i^{n-1})=\frac{C_i^{n-1}}{Cycle_N(n,i)}$。$n\geq 3, n\in N$，$0\leq i\leq n-1, i\in N$。

單列定理 $Cycle_N(n)=lcm(C_0^{n-1},C_1^{n-1},...,C_{n-1}^{n-1})$，$n\geq 3, n\in N$。

雙列定理 $Cycle_N(n+1)=lcm(\frac{C_0^{n-1}}{Cycle_N(n,0)},\frac{C_1^{n-1}}{Cycle_N(n,1)},...,\frac{C_{n-1}^{n-1}}{Cycle_N(n,n-1)})\times n$，$n\geq 3, n\in N$。

其中，雙列定理，我們突破了只能用高等逼近法的限制，借用單列定理某部分，成功用目前所學的技巧證出。

參考資料

[1]游森棚，八隻青蛙，科學研習月刊 2016 年 12 月期，國立臺灣科學教育館。

[2]賴俊儒，停車場就是彈硬幣，2005 年台灣國際科學展覽，科學教育館網站。

[3]Bakir FARHI，An identity involving the least common multiple of binomial coefficients and its application，(20170605 引用)，引用自 arxiv.org/pdf/0906.2295v2.pdf。

[4]Richard P. Stanley，PARKING FUNCTIONS，Department of Mathematics ,M.I.T. 2-375, Cambridge, MA 02139，Massachusetts Institute of Technology。