中華民國第57屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

最佳創意獎

030423

十字軍「斜」征

學校名稱：嘉義市立嘉義國民中學

作者：	指導老師：
國三　黃英綺	林渝珊
國三　余采臻	林靜宜

關鍵詞：主教、攻擊線、車禍預測

摘要

本篇是研究在矩形棋盤上主教的攻擊情形，藉由了解主教的攻擊性質，尋找攻擊滿矩形棋盤所需的主教最小值、最大值及其配置方法，接著經由證明來驗證其正確性，並發現其研究結果可應用於車禍預測。

壹、研究動機

有一次下西洋棋時突然想到，如果全部的棋子都為同一種，那麼同種棋子之間的攻擊線重疊情形是怎麼樣呢？為了解開疑惑，我們上網查資料後發現，如何在西洋棋盤中擺入最多個不互相攻擊的皇后，是一個古典的數學問題(八皇后問題)，目前已經找到很多組不同的解，也看到有人認為可以把皇后的佈局延伸到警察和消防人力的部署上，所以我們想針對資料較少的主教來進行探究，結合國中所學到的平面直角坐標系觀念，希望能找出主教攻擊線的相關規律。

貳、研究目的

一、 主教攻擊規律的探討

(一) 主教攻擊格數的規律。

(二) 主教的攻擊線方程式。

二、 正方形棋盤的探討：$n \times n$正方形棋盤中，互不攻擊下，攻擊滿棋盤所需主教數

(一) 最小值與配置方法。

(二) 最大值與配置方法。

(三) 有解情形與配置方法。

三、 長方形棋盤的探討：$n \times m$長方形棋盤中，互不攻擊下，攻擊滿棋盤所需主教數

(一) 最小值與配置方法。

(二) 最大值與配置方法。

(三) 有解情形與配置方法。

四、 車禍預測的探討。

参、研究設備及器材

電腦、紙、筆、西洋棋盤。

肆、研究方法

一、名詞定義

（一）西洋棋盤：為黑白相間的 8×8 正方形棋盤，一般情況下左下角為黑色，如圖 1 所示。

（二）攻擊線：主教能夠攻擊到的格子所連成的線，為兩條斜線，可無限延伸，如圖 2 所示。

（三）互不攻擊：主教所在位置不會被任一其他主教的攻擊線所攻擊到。

（四）攻擊滿：在所有主教皆互不攻擊的情況下，所有主教的攻擊線能涵蓋棋盤內所有格子。

（五）S_n：表示在$n\times n$的正方形棋盤中，主教的總數。其中最小值為mS_n，最大值為MS_n。

（六）$RS_{n\times m}$：表示在$n\times m$的長方形棋盤中，主教的總數。其中最小值為$mRS_{n\times m}$，最大值為$MRS_{n\times m}$。

二、圖例解釋

（一）主教所在位置：以@表示。

（二）主教n所能攻擊到的範圍：以 X 表示。

（三）障礙物 所能影響到的格數：以 0 表示。

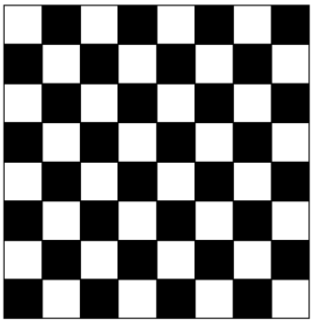


圖 1 西洋棋盤

X						X	
	X				X		
		X		X			
			@				
		X		X			
	X				X		
X						X	
							X

圖 2 主教的攻擊線

三、研究流程圖

如圖 3 所示。

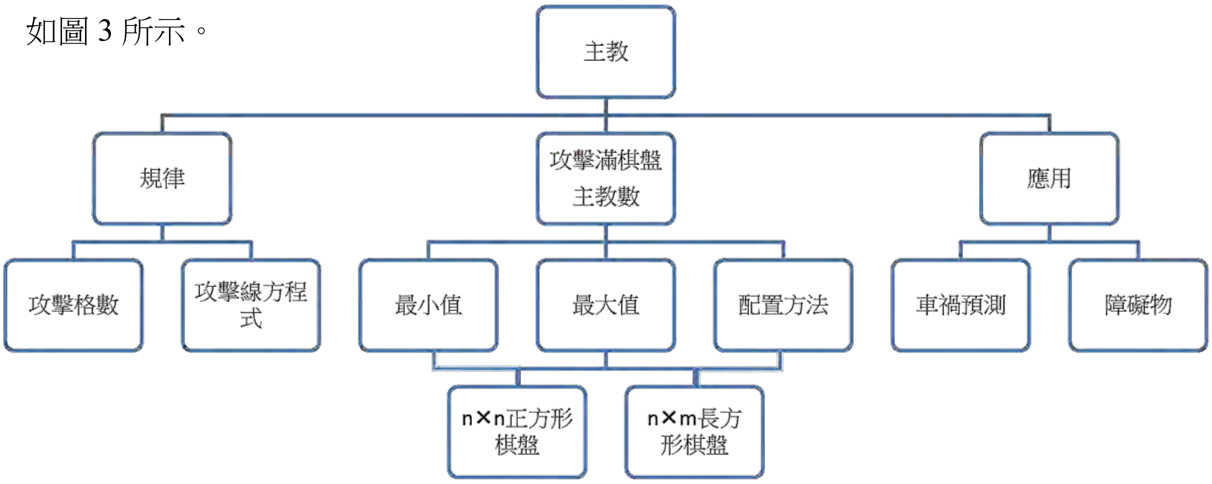


圖 3 研究流程圖

四、研究過程

首先找出主教的攻擊格數以及攻擊線方程式，接下來探討攻擊滿棋盤所需的主教數時，將其分為最小值、最大值以及配置方法來進行研究。研究流程是由特殊化(特定邊長的棋盤)開始，找到通則，接下來一般化(任意邊長的棋盤)，並以數學方法來證明公式。

伍、研究結果

一、主教攻擊線的特性

研究 1.1　探討主教攻擊的格數

特殊化

探討主教攻擊線的特性中，我們將棋盤分圈討論。以一個 8×8 的西洋棋盤為例，以坐標排序，第一圈為最外圈，即圖 4 紅色區域，第二圈為次外圈，即圖 4 黃色區域，第三圈為次內圈，即圖 4 藍色區域，第四圈為最內圈，即圖 4 紫色區域。而圖 4.1 為偶數棋盤(以 8×8 棋盤為例)在不同圈上，任取一主教的攻擊線狀況。圖 5.1 為奇數棋盤(以 7×7 為例)在不同圈上，任取一主教的攻擊線狀況。

(1) 8×8 棋盤

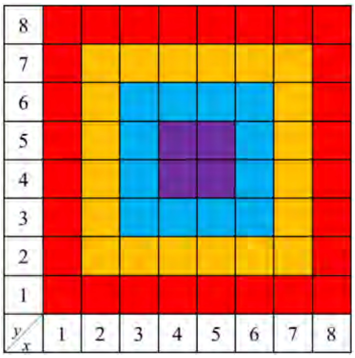


圖 4　8×8 棋盤主教的攻擊圈

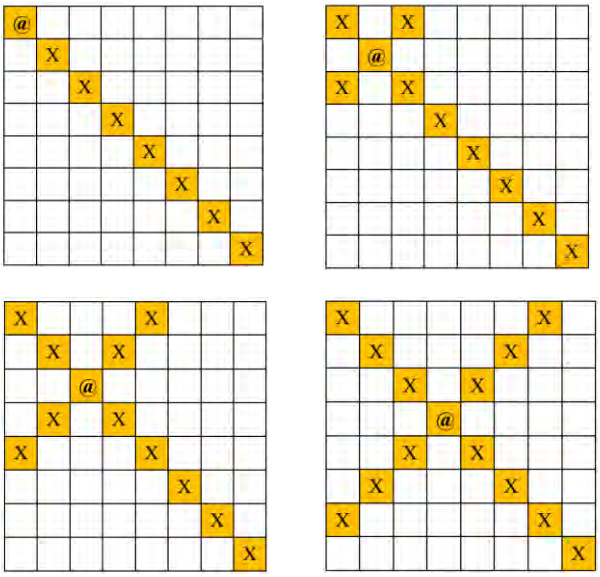


圖 4.1　主教分別位在不同圈的攻擊範圍

(2) 7×7 棋盤

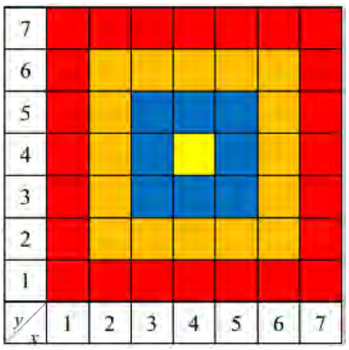


圖 5　7×7 棋盤主教的攻擊圈

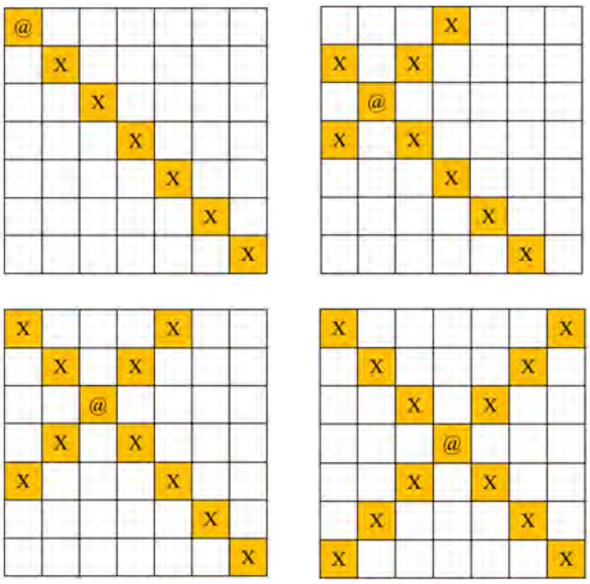


圖 5.1　主教分別位在不同圈的攻擊範圍

整理與發現

1. 在 8×8 的正方形棋盤中

   當主教位在第一圈、第二圈、第三圈、第四圈時，其主教的可攻擊範圍分別為 7+1、9+1、11+1、13+1 個格數(能攻擊到的格數以及本身所佔據的 1 個格子)，因而發現 8×8 棋盤每往內一圈，攻擊格數就會增加二格。

2. 在 7×7 的正方形棋盤中

   當主教位在第一圈、第二圈、第三圈、第四圈時，其主教的可攻擊範圍分別為 6+1、8+1、10+1、12+1 個格數，因而發現 7×7 棋盤每往內一圈，攻擊格數同樣會增加二格。

猜想

在 $n\times n$ 正方形棋盤中

1. 當 n 為偶數時，最外圈的攻擊格數為 n ，最內圈的攻擊格數則為 $2n-2$ 。
2. 當 n 為奇數時，最外圈的攻擊格數為 n ，最內圈的攻擊格數則為 $2n-1$ 。

證明

1. 當 n 為偶數時，在 $n\times n$ 的正方形棋盤棋上，當主教位在最內圈時，會有兩條攻擊線，其攻擊範圍為 n 個格數及 $n-1$ 個格數，又其中主教位置重複計算，需扣除 1 個格數，因此攻擊格數為 $n+(n-1)-1=2n-2$ 個格數。
2. 當 n 為奇數時，在 $n\times n$ 的正方形棋盤棋上，當主教位在最內圈時，會有兩條攻擊線，其攻擊範圍皆為 n 個格數，又其中主教位置重複計算，需扣除 1 個格數，因此攻擊格數為 $n+n-1=2n-1$ 個格數。

一般化

結論 1.1

在 $n\times n$ 正方形棋盤中

1. 當 n 為偶數時，最外圈的攻擊格數為 n ，最內圈的攻擊格數則為 $2n-2$ 。
2. 當 n 為奇數時，最外圈的攻擊格數為 n ，最內圈的攻擊格數則為 $2n-1$ 。

研究 1.2 兩個互不攻擊的主教共同管轄的格數

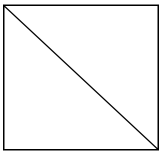
規則分析

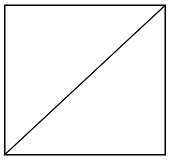
1. 從規則來看，主教間互不攻擊，代表一個主教在同一左斜線、右斜線上不能有其他的主教。因此，遊戲規則可改為：

   在 $n\times n$ 的正方形棋盤中，滿足：

(1) 每一左斜線、右斜線上最多只能有 1 個主教。

(2) 只要在任何一個空格再放 1 個主教，就會造成斜線上(左斜或右斜)有 2 個主教以上。


左斜線


右斜線

2. 玩西洋棋的過程中，我們發現如果主教原本在黑色的格子上，就絕對不會攻擊到白色格子，所以如果兩個主教分別在一黑一白的格子上，它們的攻擊線就絕對不會重疊，如圖 6 所示，因此兩個互不攻擊的主教最少共同攻擊格數為 0。因此我們開始思考如何只從坐標就能看出主教格子的顏色，藉此判斷其最少共同攻擊格數是否為 0？

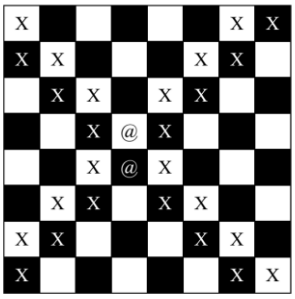


圖 6　主教在黑白兩色位置的攻擊線

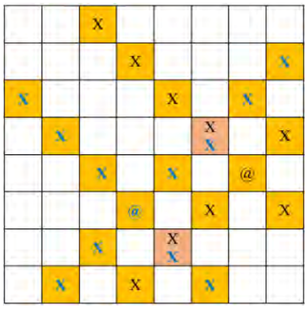


圖 6.1　兩主教的攻擊線重複情形

經由實作發現主教格子的顏色與所在坐標和$(x+y)$相關，依其規律，整理如表 1 所示：

表 1　兩主教格子顏色與所在坐標和$(x+y)$關係表

主教坐標和 / 所在格子底色	皆為奇數，皆為偶數	一為奇數，一為偶數
相同(同黑、同白)	v	
不同(一黑、一白)		v

發現若兩個主教的坐標和皆為奇數或偶數，則這兩個主教所在格子的底色會相同，而若兩個主教的坐標和為一奇一偶，則這兩個主教會位於不同底色的格子(一黑一白)。

確認了主教所屬格子顏色後，就可以進一步探討它們重複的攻擊格數。我們思考著如何從兩個主教的坐標，快速求出他們重複攻擊的格數。這個問題困擾了我們幾個月，百思不得其解，詢問老師後，建議使用高中數學的點斜式來加以說明，同時傳授我們斜率的相關概念。

斜率$m=\dfrac{y}{x}$，而主教兩條攻擊線的斜率分別是$m=1$和$m=-1$。從點斜式得知，解直線方程式，需要有斜率和點坐標，其公式為：$y-y_0=m(x-x_0)$，其中的m為斜率，x_0和y_0為該點坐標。一個坐標，可以得到兩個直線方程式$y-y_0=x-x_0$和$y-y_0=-(x-x_0)$，而若要找

出兩個點的重複攻擊坐標，只要將四個直線方程式兩兩解聯立，所得到的解即為重複攻擊坐標，且須為正整數解。

比方說任取兩個格子底色相同的點，如圖 6.1 所示，兩主教坐標分別為$(4,3)$及$(7,4)$。利用上述方式檢驗其底色是否相同?因為$4+3=7$且$7+4=11$，皆為奇數，所以代表兩主教底色相同。

代入公式，可求得點$(4,3)$的攻擊線方程式為$y-3=x-4\cdots\cdots(1)$及$y-3=-x+4\cdots\cdots(2)$，而點$(7,4)$的攻擊線方程式為$y-4=x-7\cdots\cdots(3)$及$y-4=-x+7\cdots\cdots(4)$。將四個方程式兩兩解聯立，可知攻擊線交於$(6,5)$及$(5,2)$兩點。

$$\begin{cases} y-3=x-4\cdots\cdots\cdots(1) \\ y-4=-x+7\cdots\cdots(4) \end{cases} \Rightarrow (6,5) \qquad \begin{cases} y-3=-x+4\cdots\cdots(2) \\ y-4=x-7\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases} \Rightarrow (5,2)$$

$$\begin{cases} y-3=x-4\cdots\cdots(1) \\ y-4=x-7\cdots\cdots(3) \end{cases} \Rightarrow \text{無解} \qquad \begin{cases} y-3=-x+4\cdots\cdots(2) \\ y-4=-x+7\cdots\cdots(4) \end{cases} \Rightarrow \text{無解}$$

在實作過程中發現，當主教位在$(1,1)$及(n,n)時，只會有一條攻擊線$y-y_0=x-x_0$；而當主教位在$(1,n)$及$(n,1)$時，也只會有一條攻擊線$y-y_0=-(x-x_0)$。

又觀察發現方程式有解時，必須是兩攻擊線互相垂直，亦即斜率分別為$m=1$和-1(若斜率相同，則為兩條平行線，沒有交點)，因此可以簡化上述式子，當兩坐標為(x_1，y_1)及(x_2，y_2)時，可以得到下列兩組聯立方程式: $\begin{cases} y-y_1=-x+x_1 \\ y-y_2=x-x_2 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} y-y_1=x-x_1 \\ y-y_2=-x+x_2 \end{cases}$

其解為$(\frac{x_1+x_2+y_1-y_2}{2},\frac{x_1-x_2+y_1+y_2}{2})$，$(\frac{x_1+x_2-y_1+y_2}{2},\frac{-x_1+x_2+y_1+y_2}{2})$，即為兩主教的重複攻擊坐標。

一般化

結論 1.2

1.當主教位於(x_0,y_0)時，其攻擊線方程式為$y-y_0=x-x_0$及$y-y_0=-x+x_0$

2.當兩坐標為(x_1,y_1)及(x_2,y_2)時，可以得到下列兩組聯立方程式：

$$\begin{cases} y-y_1=-x+x_1 \\ y-y_2=x-x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y-y_1=x-x_1 \\ y-y_2=-x+x_2 \end{cases}$$

兩主教的重複攻擊坐標即為

$$(\frac{x_1+x_2+y_1-y_2}{2},\frac{x_1-x_2+y_1+y_2}{2})，(\frac{x_1+x_2-y_1+y_2}{2},\frac{-x_1+x_2+y_1+y_2}{2})。$$

座標須為正整數且在棋盤內。

二、正方形棋盤的探討

<u>研究 2.1　在 n×n 的正方形棋盤中，探討在互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數 S_n 的最小值與配置方法。</u>

(一) S_n 的最小值(mS_n)探討

實際操作

為了了解主教排列的規律性，我們從 n=2～8 實際排列，試著找出有解的所有情形。結果請參閱附件(一)　。

整理與歸納

1.　從實際操作中，我們將結果進一步整理成表 2。

表 2

主教數 \ $n\times n$	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8
最小值	2	3	4	5	6	7	8

2. 從表 2 中我們發現，在 $n=2\sim8$，其主教數的最小值為 n 。

猜想

在 $n\times n$ 的正方形棋盤中，主教互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數的最小值 $mS_n=n$。

證明

我們利用反證法來證明，假設最小值為 $n-1$ 個主教

1.　當 n 為奇數時

(1) $n-1$ 個主教最多能涵蓋的方格數:

$$2\times\frac{[(2n-3)+(n+2)]\times\left(\frac{n-1}{2}-1\right)}{2}+(2n-1)+n=\frac{3n^2-4n+1}{2}$$

(2) 重複涵蓋格數: $\frac{n-1}{2}\times\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\times\frac{1}{2}\times2\times2=\frac{n^2-4n+3}{2}$

(3) 最多實際涵蓋格數: $\frac{3n^2-4n+1}{2}-\frac{n^2-4n+3}{2}=n^2-1\quad(<n^2)$矛盾

(4) 又 $S_n=n$ 存在(請參閱配置方法)，因此，$mS_n=n$

2.　當 n 為偶數時

(1) $n-1$ 個主教最多能涵蓋的方格數:

$$2 \times \frac{[(2n-2)+(n+2)] \times \left(\frac{n}{2}-1\right)}{2} + n = \frac{3n^2-4n}{2}$$

(2) 重複涵蓋格數: $\frac{n}{2} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 + \frac{n-2}{2} \times \frac{n-4}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{n^2-4n+4}{2}$

(3) 最多實際涵蓋格數: $\frac{3n^2-4n}{2} - \frac{n^2-4n+4}{2} = n^2-2 \quad (< n^2)$矛盾

(4) 又 $S_n = n$ 存在(請參閱配置方法)，因此， $mS_n = n$

一般化

結論 2.1

在 $n \times n$ 的正方形棋盤中，主教互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數的最小值 $mS_n = n$ 。

(二) S_n 為最小值(mS_n)的配置方法探討

策略提出

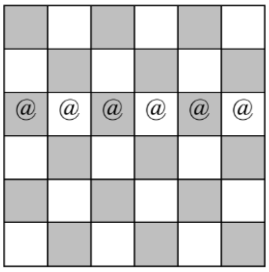
根據***研究 1.1*** 中發現，當主教位在最內圈時，其攻擊範圍是最多格的，所以需要較少主教來填滿棋盤，於是我們便形成嘗試將主教繞著攻擊格數最多的內圈開始擺起的策略。

配置方法

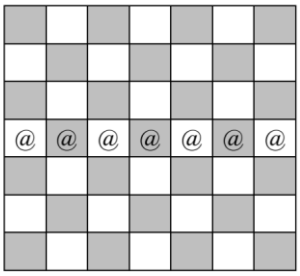
《方法一》沿著中間一列擺放

以 6×6 、 7×7 為例

$mS_6 = 6$



$mS_7 = 7$



同理，在 $n \times n$ 的正方形棋盤中，主教數的最小值 $= n$ 。

《方法二》由棋盤的主對角線向兩側發展

1. 將棋盤格塗成一黑一白。
2. 先由主對角線開始。
3. 再利用斜矩形框向棋盤主對角線的兩側框出所有的黑(白)色格。

分析

在 $n \times n$ 的棋盤中

1. 當 n 為偶數時，其中一條白色格的主對角線需要 1 個主教；另外一條黑色格的主對角線也需要 1 個主教。
2. 當 n 為奇數時，兩條主對角線最少共需要 1 個主教。
3. 因為每個斜矩形框都需要 2 個主教，而 2 個斜矩形框(當斜矩形框內沒有同色方格時)最少也是需要 2 個主教(圖 7 中，紫色長方形涵蓋黃、藍 2 個長方形)。

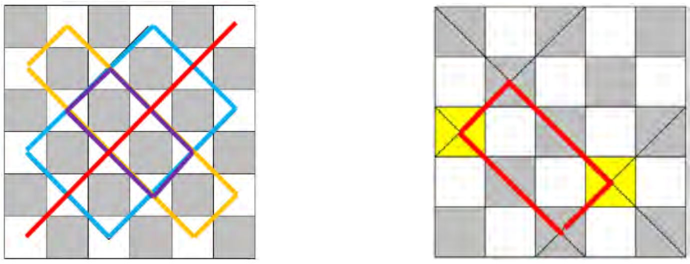
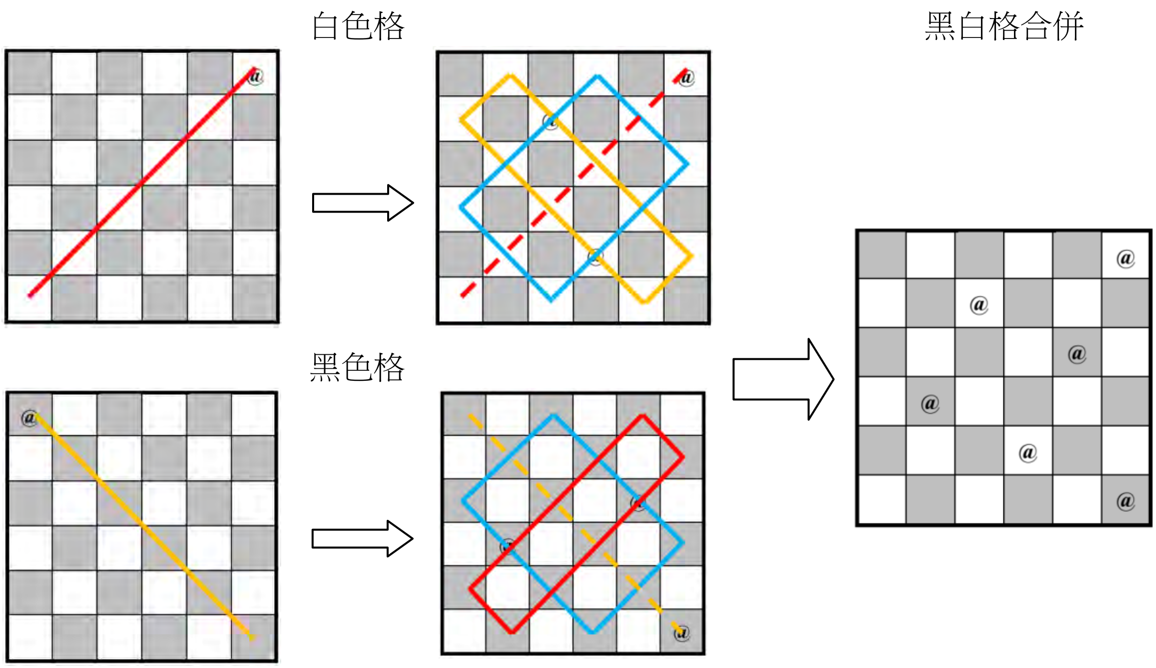


圖 7

(1) 以 6×6 為例



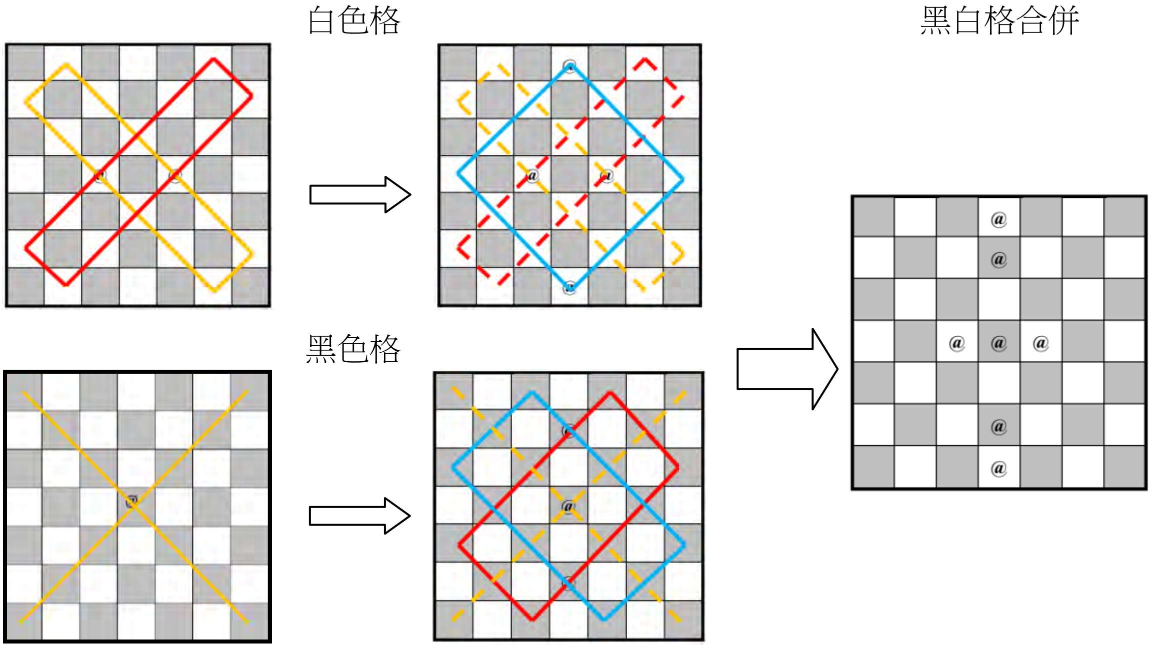
所以，在 6x6 的棋盤中，白色格有 2+1=3 個主教，黑色格有 2+1=3 個主教，

故主教數的最小值=3+3=6。

同理，在 $n\times n$(n 為偶數)的棋盤中，白色格有 $\frac{(n-2)}{2}+1=\frac{n}{2}$ 個主教，

黑色格有 $\frac{(n-2)}{2}+1=\frac{n}{2}$ 個主教，故主教數的最小值= $\frac{n}{2}+\frac{n}{2}=n$ 。

(2) 以 7×7 為例



所以，在 7×7 的棋盤中，白色格有 2+2=4 個主教；黑色格有 2+1=3 個主教，故主教數的最小值=4+3=7。

同理，在 $n\times n$(n 為奇數) 棋盤中，可以分為兩種狀況來探討：

① 當 $\frac{n-1}{2}$ 為偶數，則白色格有 $\frac{n-1}{2}$ 個主教，黑色格有 $\frac{n-5}{2}+3=\frac{n+1}{2}$ 個主教，

故主教數的最小值=$\frac{n-1}{2}+\frac{n+1}{2}=n$ 。

② 當 $\frac{n-1}{2}$ 為奇數，則白色格有 $\frac{n-3}{2}+1=\frac{n-1}{2}$ 個主教，黑色格有 $\frac{n-3}{2}+2=\frac{n+1}{2}$ ，個主教

故主教數的最小值=$\frac{n-1}{2}+\frac{n+1}{2}=n$ 。

<u>研究 2.2　在 n×n 的正方形棋盤中，探討在互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數 S_n 的最大值與配置方法。</u>

(一)　S_n 的最大值(MS_n)探討

實際操作

為了了解主教排列的規律性，我們從 n=2～8 實際排列，試著找出有解的所有情形。結果請參閱附件(二)。

整理與歸納

1.　從實際操作中，我們將結果進一步整理成表 3。

表 3

$n\times n$ / 主教數	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8
最大值	2	4	6	8	10	12	14

2. 從表 3 中我們發現：在 n=2～8，其主教數的最大值為 $2n-2$ 。

猜想

在 $n\times n$ 的正方形棋盤中，主教互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數的最大值 $MS_n=2n-2$ 。

證明

1. 因為每一條右(或左)斜線上最多只能有一個主教，又棋盤中共有 $2n-1$ 條右(或左)斜線，所以最多有 $2n-1$ 個主教。
2. 但位置 $(1,1)$ 與位置 (n,n) 只能放 1 個主教，且 $S_n=2n-1-1=2n-2$ 存在(請參閱配置方法)，故 $MS_n=2n-2$ 。

一般化

結論 2.2

在 $n\times n$ 的正方形棋盤中，主教互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數的最大值 $MS_n=2n-2$ 。

(二) S_n 為最大值(MS_n)的配置方法探討

策略提出

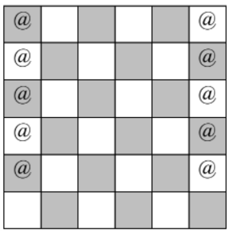
根據研究 1.1 中發現，當主教位在最外圈時，其攻擊範圍是最少格的，所以需要較多主教來填滿棋盤，於是我們便形成嘗試將主教繞著攻擊格數最少的外圍開始擺起的策略。

配置方法

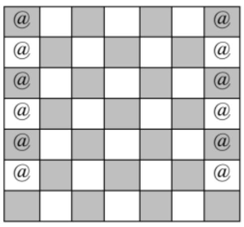
《方法一》沿著兩側擺放

以 6×6 、 7×7 為例

$MS_6=10$



$MS_7=12$



同理，在$n \times n$的正方形棋盤中，主教數的最大值$=2(n-1)=2n-2$。

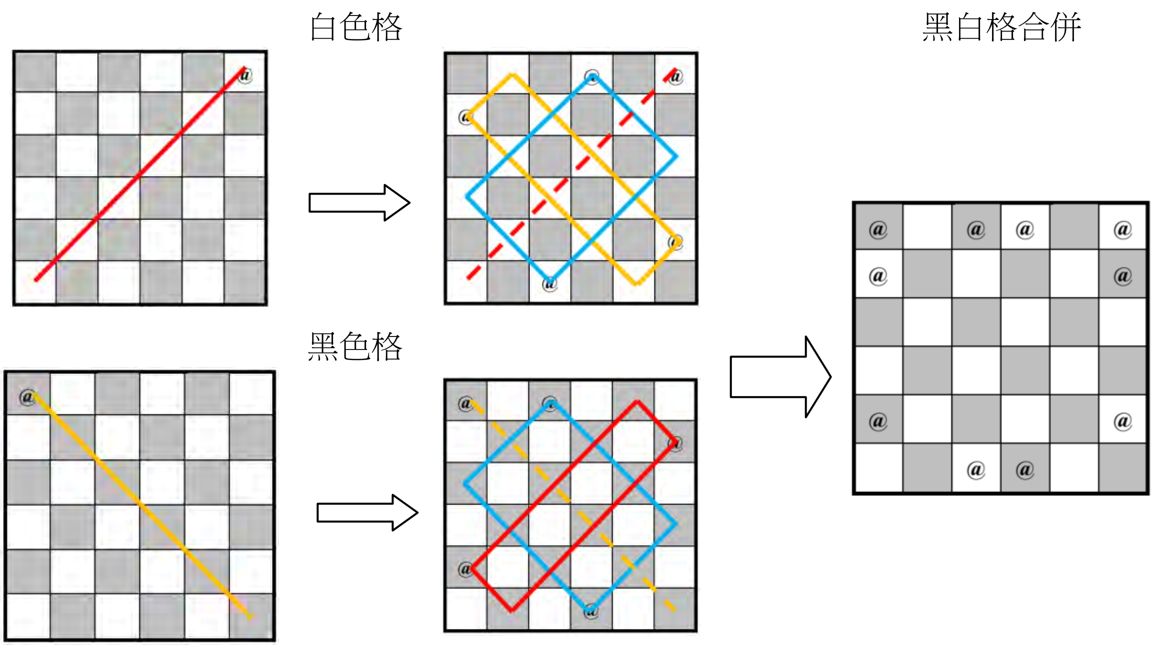
《方法二》由棋盤的主對角線向兩側發展

1. 將棋盤格塗成一黑一白。
2. 先由主對角線開始。
3. 再利用斜矩形框向棋盤主對角線的兩側框出所有的黑(白)色格。

分析

1. 當 n 為偶數時，其中一條白色格的主對角線需要 1 個主教，另外一條黑色格的主對角線也需要 1 個主教。
2. 當 n 為奇數時，兩條主對角線最多共需要 2 個主教。
3. 因為每個斜矩形框都需要 2 個主教，而 2 個斜矩形框最多共需要 4 個主教。

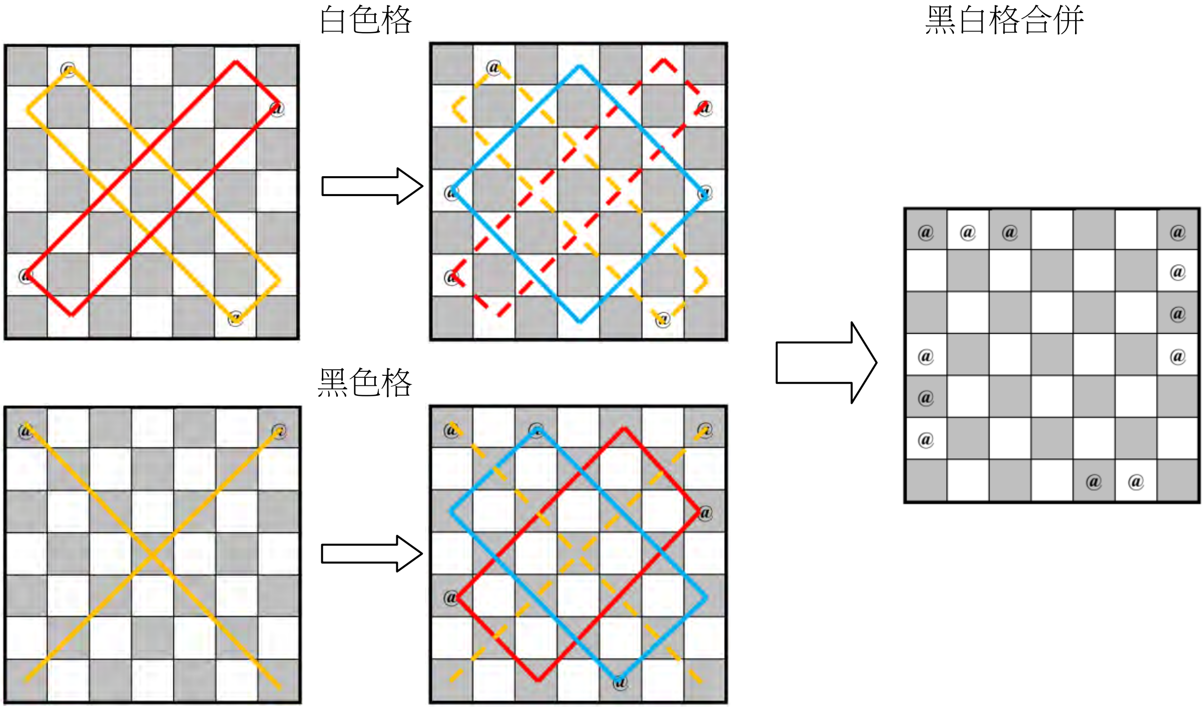
(1) 以6×6為例



所以，在 6x6 的棋盤中，白色格有 2x2+1=5 個主教，黑色格有 2x2+1=5 個主教，故主教數的最大值=5+5=10。

同理，在$n \times n$(n為偶數)的棋盤中，白色格有$2 \times \frac{(n-2)}{2}+1=n-1$個主教，黑色格有$2 \times \frac{(n-2)}{2}+1=n-1$個主教，故主教數的最大值$=n-1+n-1=2n-2$。

(2) 以 7×7 為例



所以，在 7x7 的棋盤中，白色格有 2x3=6 個主教，黑色格有 2x3=6 個主教，故主教數的最大值=6x2=12。

同理，在 $n\times n$(n 為奇數) 棋盤中，白色格有 $2\times\frac{(n-1)}{2}=n-1$ 個主教，黑色格 $2+2\times\frac{(n-3)}{2}=2\times\frac{(n-1)}{2}=n-1$ 個主教，故主教數的最大值=$n-1+n-1=2n-2$。

研究 2.3　在 n×n 的正方形棋盤中，探討在互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數 Sn 的有解情形與配置方法。

(一)　S_n 有解情形的探討

實際操作

同樣的，我們從 $n=2\sim9$ 實際排列，試著找出有解的所有情形。結果請參閱附件(三)。

整理與歸納

1. 從附件(三)中，我們將結果進一步整理成表 4。

表 4

$n\times n$	S_n 有解的所有情形	$n\times n$	S_n 有解的所有情形
2×2	2	6×6	6,7,8,9,10
3×3	3,4	7×7	7,8,9,10,11,12
4×4	4,5,6	8×8	8,9,10,11,12,13,14
5×5	5,6,7,8	9×9	9,10,11,12,13,14,15,16

2. 從表 4 中，我們發現：

   當 $n=2\sim9$ 時，S_n 從最小值到最大值之間每加 1 子均有解。

猜想

從表 4 的發現，我們形成以下的猜想：

在 $n\times n$ 的正方形棋盤中，主教互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數 S_n 從最小值到最大值之間每加 1 子均有解。

證明

由 ***性質 1.1*** 得知，在互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需的主教數，每加一子均有解。

一般化

結論 2.3

在 $n\times n$ 的正方形棋盤中，主教互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數 S_n 從最小值到最大值之間每加 1 子均有解。

(二) S_n 有解情形的配置方法探討

排法分析

1. 分拆操作：棋盤上的主教沿著攻擊線分拆成兩個主教的操作方式，並使兩個主教與其他主教互不攻擊，如圖 8。
2. 矩形框移子操作：位於同一矩形框上兩對角格的主教，可以移動為另兩對角格，且總攻擊線不變，如圖 8.1。

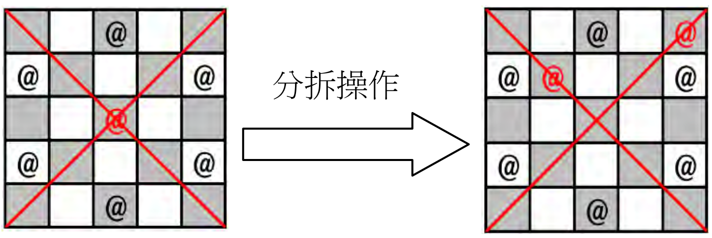


圖 8

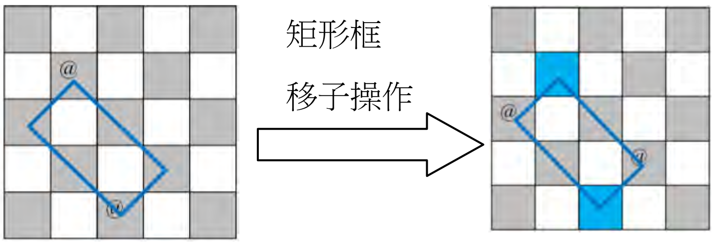


圖 8.1

性質 1.1：設 A 圖形為在 $n \times n$ 的棋盤中滿足主教攻擊滿條件之有解圖形，若 A 圖形進行一次的***分拆操作***後，所形成的圖形稱為 B 圖形，則 B 圖形亦為有解圖形。

證明

由於 A 圖形為有解圖形，且主教進行分拆操作後的 B 圖形，其攻擊線仍保持不變，所以 B 圖形亦為有解圖形。

性質 1.2：設 C 圖形為在 $n \times n$ 的棋盤中滿足主教攻擊滿條件之有解圖形，若 C 圖形進行一次的***矩形框移子操作***後，所形成的圖形稱為 D 圖形，則 D 圖形亦為有解圖形。

證明

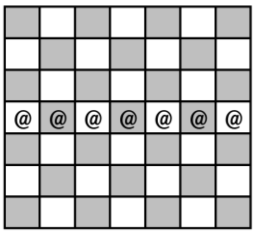
理由同***性質 1.1***。

配置方法

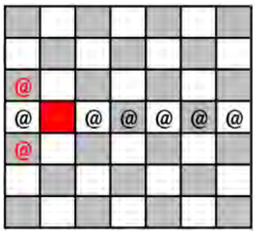
我們從 $S_n = mS_n$ 到 MS_n 中，利用分拆操作法進行每加 1 子均有解的配置。

以 7×7 為例

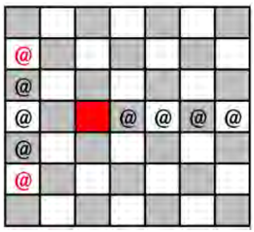
$mS_7 = 7$



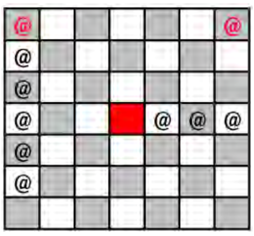
$S_7 = 8$



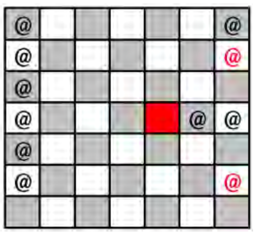
$S_7 = 9$



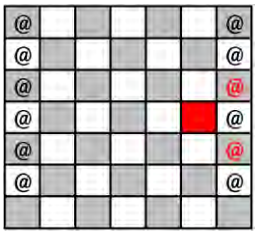
$S_7 = 10$



$S_7 = 11$



$MS_7 = 12$



三、長方形棋盤的探討

研究 3.1　在 n×m 的長方形棋盤中，探討在互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數 $RS_{n\times m}$ 的最小值與配置方法。

(一) $RS_{n\times m}$ 的最小值($mRS_{n\times m}$)探討

實際操作

同樣的，我們從 n、$m=2\sim6$ 實際排列，試著找出有解的所有情形。結果請參閱附件(四)。

整理與歸納

1.從附件(四)中，我們再將結果進一步整理成表 5。

表 5

n \ m	2	3	4	5	6
2	×	2	4	4	4
3	×	×	4	4	6
4	×	×	×	4	6
5	×	×	×	×	6
6	×	×	×	×	×

2.由表 5 中我們發現，當 n 、 $m=2\sim6$ 時：

(1)當 n、m 皆=3、5 時，其主教數的最小值 $mRS_{n\times m}$ 為 m-1。

(2)當 n= 3、5，m =2、4、6 時，其主教數的最小值 $mRS_{n\times m}$ 為 m。

(3)當 n =2、4、6，$m\div(n+1)=q......r$ 中，r 為奇數時，其主教數的最小值 $mRS_{n\times m}=qn+r+1$ 。

(4)當 n =2、4、6， $m\div(n+1)=q......r$ 中， r 為偶數時，其主教數的最小值 $mRS_{n\times m}=qn+r$ 。

猜想

在 $n\times m$ 的長方形棋盤中，主教互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數的最小值：

1. n 為奇數

(1) 當 $(n,m)=$(奇，奇)時，主教數的最小值 $mRS_{n\times m}=m-1$ 。

(2) 當 $(n,m)=$(奇，偶)時，主教數的最小值 $mRS_{n\times m}=m$ 。

2. n 為偶數

設 $m\div(n+1)=q......r$

(1) 當 r 為奇數時，主教數的最小值 $mRS_{n\times m}=qn+r+1$ 。

(2) 當 r 為偶數時，主教數的最小值 $mRS_{n\times m}=qn+r$ 。

$\boxed{\text{證明}}$

我們利用反證法來證明

1.當$(n，m)$為(奇，奇)時，假設最小值為$m-2$個主教

(1) $m-2$個主教最多能涵蓋的方格數:

$$(2n-1)[m-(n-1)]+\frac{[(2n-3)+(n+2)]\times\left(\frac{n-1}{2}-1\right)}{2}\times 2$$

$$=\frac{4nm-n^2-8n-2m+3}{2}$$

(2) 重複涵蓋格數: $\frac{m-1}{2}\times\frac{m-3}{2}\times\frac{1}{2}\times 2+\frac{m-3}{2}\times\frac{m-5}{2}\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{m^2-6m+9}{2}$

(3) 最多實際涵蓋格數:

$$\frac{4nm-n^2-8n-2m+3}{2}-\frac{m^2-6m+9}{2}$$

$$=nm+\frac{(n-m)(m-n-4)}{2}-2n-3\quad(<nm)$$ 矛盾

(4) 又$RS_{n\times m}=m-1$存在(請參閱$\boxed{\text{配置方法}}$)，因此，$mRS_{n\times m}=m-1$

2.當$(n，m)$為(奇，偶)時，假設最小值為$m-1$個主教

(1) $m-1$個主教最多能涵蓋的方格數:

$$(2n-1)[m-(n-1)]+\frac{[(2n-3)+(n+2)]\times\left(\frac{n-1}{2}-1\right)}{2}\times 2+n$$

$$=\frac{4nm-n^2-6n-2m+3}{2}$$

(2) 重複涵蓋格數: $\frac{m}{2}\times\frac{m-2}{2}\times\frac{1}{2}\times 2+\frac{m-2}{2}\times\frac{m-4}{2}\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{m^2-4m+4}{2}$

(3) 最多實際涵蓋格數:

$$\frac{4nm-n^2-6n-2m+3}{2}-\frac{m^2-4m+4}{2}$$

$$=nm+\frac{(n-m)(m-n-2)}{2}-2n-\frac{1}{2}\quad(<nm)$$ 矛盾

(4) 又$RS_{n\times m}=m$存在(請參閱$\boxed{\text{配置方法}}$)，因此，$mRS_{n\times m}=m$

3.當n為偶數時，設$m\div(n+1)=q......r$，則$m=qn+q+r$，原公式$qn+r+1$及$qn+r$分別可改寫為$m-q+1$及$m-q$。

4.當$(n，m)$為(偶，奇)、r為奇數時，假設最小值為$m-q$個主教

(1) $m-q$個主教最多能涵蓋的方格數:

$$(2n-1)(m-n)+\frac{\left[2(2n-2)-2\left(\frac{n-q}{2}-1\right)\right]\times\frac{n-q}{2}}{2}\times 2$$
$$=\frac{4nm-n^2-2m-2nq-q^2+2q}{2}$$

(2) 重複涵蓋格數:

$$\frac{m-q+1}{2}\times\frac{m-q-1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2+\frac{m-q-1}{2}\times\frac{m-q-3}{2}\times\frac{1}{2}\times 2$$
$$=\frac{m^2+q^2-2mq-2m+2q+1}{2}$$

(3) 最多實際涵蓋格數:

$$\frac{4nm-n^2-2m-2n-2nq-q^2+2q}{2}-\frac{m^2+q^2-2mq-2m+2q+1}{2}$$
$$=\frac{2nm-(n-m)^2+2q(m-n-q)-1}{2}\quad(<nm)\ 矛盾$$

(4) 又$RS_{n\times m}=m-q+1$存在(請參閱$\boxed{\text{配置方法}}$)，因此，$mRS_{n\times m}=m-q+1$

5.當$(n，m)$為(偶，奇)、r為偶數時，假設最小值為$m-q$-1個主教

(1) $m-q-1$個主教最多能涵蓋的方格數:

$$(2n-1)(m-n)+\frac{\left[2(2n-2)-2\left(\frac{n-q-1}{2}-1\right)\right]\times\frac{n-q-1}{2}}{2}\times 2$$
$$=\frac{4nm-n^2-2m-2n-2nq-q^2+1}{2}$$

(2) 重複涵蓋格數:

$$\frac{m-q}{2}\times\frac{m-q-2}{2}\times\frac{1}{2}\times 2+\frac{m-q-2}{2}\times\frac{m-q-4}{2}\times\frac{1}{2}\times 2$$
$$=\frac{m^2+q^2-2mq-4m+4q+4}{2}$$

(3) 最多實際涵蓋格數:

$$\frac{4nm-n^2+2m-2n-2nq-2q^2+1-m^2+2mq-4q-4}{2}$$
$$=nm+\frac{(m-n)(n-m+2q+2)-2q^2-4q-3}{2}\quad(<nm)\quad 矛盾$$

(4) 又$RS_{n\times m}=m-q$存在(請參閱$\boxed{\text{配置方法}}$)，因此，$mRS_{n\times m}=m-q$

6.當$(n，m)$為(偶，偶)、r為奇數時，假設最小值為$m-q$個主教

(1) $m-q$個主教最多能涵蓋的方格數:

$$(2n-1)(m-n)+\frac{\left[2(2n-2)-2\left(\frac{n-q+1}{2}-1\right)\right]\times\frac{n-q+1}{2}}{2}+\frac{\left[2(2n-2)-2\left(\frac{n-q-1}{2}-1\right)\right]\times\frac{n-q-1}{2}}{2}$$
$$=\frac{4nm-n^2-2m-2nq-q^2+2q-1}{2}$$

(2) 重複涵蓋格數:

$$\frac{m-q+1}{2}\times\frac{m-q-1}{2}\times\frac{1}{2}\times2+\frac{m-q-1}{2}\times\frac{m-q-3}{2}\times\frac{1}{2}\times2$$
$$=\frac{m^2+q^2-2mq-2m+2q+1}{2}$$

(3) 最多實際涵蓋格數:

$$\frac{4nm-n^2-2nq-2q^2-2-m^2+2mq}{2}$$
$$=\frac{2nm-(n-m)^2+2q(m-n-q)-2}{2}\quad(<nm)$$ 矛盾

(4) 又$RS_{n\times m}=m-q+1$存在(請參閱$\boxed{\text{配置方法}}$)，因此，$mRS_{n\times m}=m-q+1$

7.當$(n，m)$為(偶，偶)、r為偶數時，假設最小值為$m-q$-1個主教

(1) $m-q$-1個主教最多能涵蓋的方格數:

$$(2n-1)(m-n)+\frac{\left[2(2n-2)-2\left(\frac{n-q}{2}-1\right)\right]\times\frac{n-q}{2}}{2}+\frac{\left[2(2n-2)-2\left(\frac{n-q-2}{2}-1\right)\right]\times\frac{n-q-2}{2}}{2}$$
$$=\frac{4nm-n^2-2m-2n-2nq-q^2}{2}$$

(2) 重複涵蓋格數:

$$\frac{m-q}{2}\times\frac{m-q-2}{2}\times\frac{1}{2}\times2+\frac{m-q-2}{2}\times\frac{m-q-4}{2}\times\frac{1}{2}\times2$$
$$=\frac{m^2+q^2-2mq-4m+4q+4}{2}$$

(3) 最多實際涵蓋格數:

$$\frac{4nm - n^2 + 2m - 2n - 2nq - 2q^2 - m^2 + 2mq - 4q - 4}{2}$$

$$= nm + \frac{(m-n)(n-m+2q+2) - 2q^2 - 4q - 4}{2} \quad (< nm)$$ 矛盾

(4) 又 $RS_{n\times m} = m - q$ 存在(請參閱配置方法)，因此，$mRS_{n\times m} = m - q$

一般化

結論 3.1

在 $n\times m$ 的長方形棋盤中，主教互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數的最小值

1. n 為奇數

(1) 當 $(n,m) = $(奇，奇)時，主教數的最小值 $mRS_{n\times m} = m-1$。

(2) 當 $(n,m) = $(奇，偶) 時，主教數的最小值 $mRS_{n\times m} = m$。

2. n 為偶數

設 $m \div (n+1) = q......r$

(1) 當 r 為奇數時，主教數的最小值 $mRS_{n\times m} = qn + r + 1$。

(2) 當 r 為偶數時，主教數的最小值 $mRS_{n\times m} = qn + r$。

(1) **$RS_{n\times m}$ 為最小值($mRS_{n\times m}$)的配置方法探討**

策略提出

我們以正方形棋盤中主教數的最小值為基礎，透過加子來完成排列。

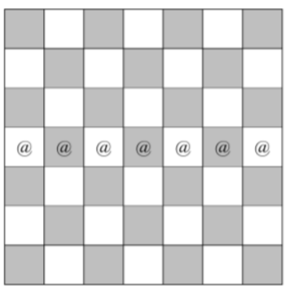
配置方法

1. n 為奇數(以 7×7 到 7×10 為例)

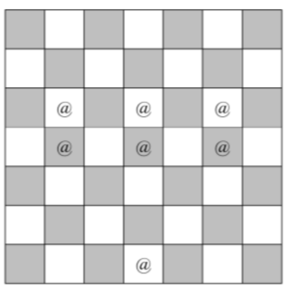
(1) 將正方形從橫排的配置方法轉換。

(2) 當 7×7 (正方形)變成 7×8 (長方形)時，加一個主教，移動一個主教。

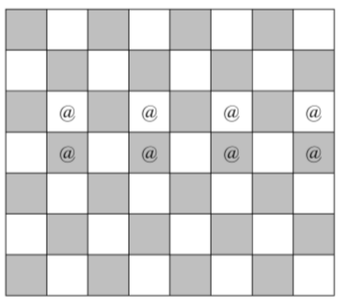
$mS_7 = 7$



$mS_7 = 7$



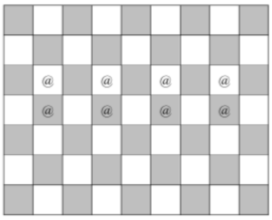
$mRS_{7\times8} = 8$(第一個長方形)

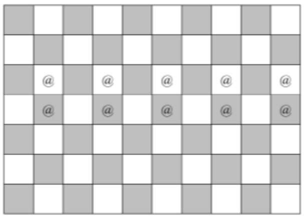


(3) 當 7×8 (第一個長方形)變成 7×9 (第二個長方形)時，不加主教也不移動主教。

(4) 當 7×9 (第二個長方形)變成 7×10 (第三個長方形)時，加兩個主教。

$mRS_{7\times9}=8$ (第二個長方形)　　　　$mRS_{7\times10}=10$ (第三個長方形)





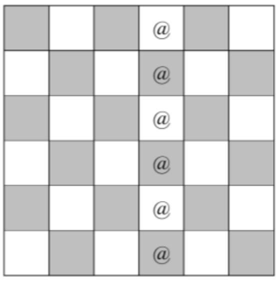
(5) 實際操作時，發現這樣的規律+0、+2、+0、+2，$7\times8\to7\times9$ (+0 個主教)$\to7\times10$ (+2 個主教)⋯，於附件(五)中，我們依此規律，排出更多資料來佐證我們的推論及證明皆正確。

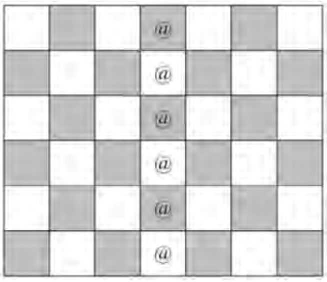
2. n 為偶數

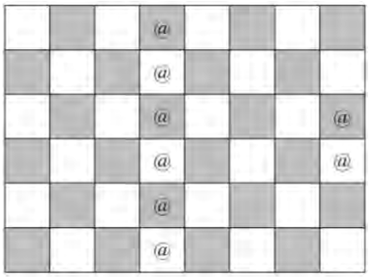
(1) 當 6×6 (正方形)變成 6×7 (長方形)時，不加主教也不移動主教。

(2) 當 6×7 (第一個長方形)變成 6×8 (第二個長方形)時，加兩個主教。

$mS_6=6$　　　　$mRS_{6\times7}=6$ (第一個長方形)　　$mRS_{6\times8}=8$ (第二個長方形)





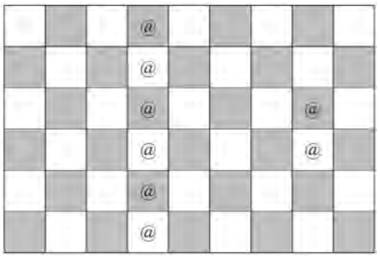


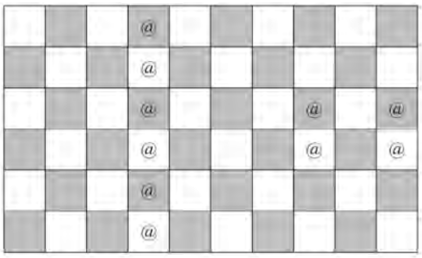
(3) 當 6×8 (第二個長方形)變成 6×9 (第三個長方形)時，不加主教也不移動主教。

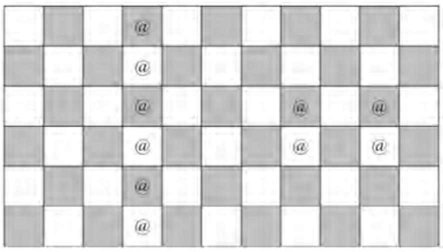
(4) 當 6×9 (第三個長方形)變成 6×10 (第四個長方形)時，加兩個主教。

(5) 當 6×10 (第四個長方形)變成 6×11 (第五個長方形)時，不加主教也不移動主教。

$mRS_{6\times9}=8$ (第三個長方形)　　$mRS_{6\times10}=10$ (第四個長方形)　　$mRS_{6\times11}=10$ (第五個長方形)



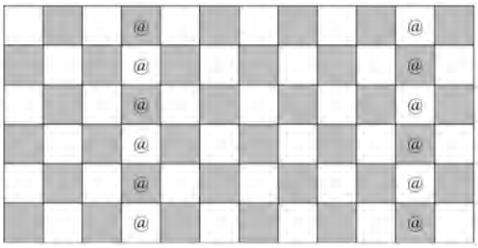




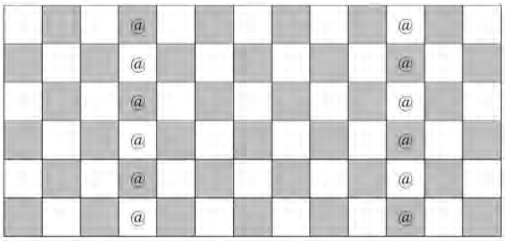
(6) 當 6×11 (第五個長方形)變成 6×12 (第六個長方形)時，加兩個主教。

(7) 當 6×12 (第六個長方形)變成 6×13 (第七個長方形)時，不加主教也不移動主教。

$mRS_{6\times12} = 12$ (第六個長方形)



$mRS_{6\times13} = 12$ (第七個長方形)



(8) 實際操作時，發現這樣的規律+2、+0、+2、+0……直到變成第 n 個長方形時+2 並移動 n-2 個主教，變成第 n+1 個長方形時不變，依此規律以 n+1 個長方形為一組進行循環，亦即 $6\times7 \to 6\times8$ (+2 個主教)→ 6×9 (+0 個主教)→ 6×10 (+2 個主教)→ 6×11 (+0 個主教) → 6×12 (+2 個主教，移動 4 個主教)→ 6×13 (+0 個主教)⋯，於附件(六)中，我們依此規律，排出更多資料來佐證我們的推論及證明皆正確。

研究 3.2　在 n×m 的長方形棋盤中，探討在互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數 $RS_{n\times m}$ 的最大值與配置方法。

(一)　$RS_{n\times m}$ 的最大值($MRS_{n\times m}$)探討

實際操作

同樣的，我們從 n 、 $m = 2\sim6$ 實際排列，結果請參閱附件(七)。

整理與歸納

1.從附件(七)中，我們再將結果進一步整理成表 6。

表 6

n \ m	2	3	4	5	6
2	×	4	4	6	6
3	×	×	6	7	8
4	×	×	×	8	8
5	×	×	×	×	10
6	×	×	×	×	×

2.由表 6 中我們發現，當 n 、 $m = 2\sim6$ 時：

(1)當 n、m 皆=2、4、6 時，其主教數的最大值 $MRS_{n\times m}$ 為 $n+m-2$ 。

(2)當 $n = 3$、5，m =2~6 或 n =2、4、6，m =3、5 時，其主教數的最大值 $MRS_{n\times m}$ 為 $n+m-1$。

猜想

在 $n\times m$ 的長方形棋盤中，主教互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數的最大值:

1. 當 $(n,m)=$(偶，偶) 時，主教數的最大值 $MRS_{n\times m}=n+m-2$。

2. 當 $(n,m)=$(奇，奇)、(奇，偶)、(偶，奇)時，主教數的最大值 $MRS_{n\times m}=n+m-1$。

證明

我們分為兩類來討論

1. 棋盤左、右對角線的條數不同　(即 $(n,m)=$(偶，偶))

　如圖 9，我們分黑色格及白色格來看(分別取較少條數的左斜線或右斜線)：

　(1) 黑色格有 $\frac{m+n}{2}-1$ 條***左斜線***　$\Rightarrow$ 所以最多有 $\frac{m+n}{2}-1$ 個主教。

　(2) 白色格有 $\frac{m+n}{2}-1$ 條***右斜線***　$\Rightarrow$ 所以最多有 $\frac{m+n}{2}-1$ 個主教。

　所以 $MRS_{n\times m}=\frac{m+n}{2}-1+\frac{m+n}{2}-1=n+m-2$。

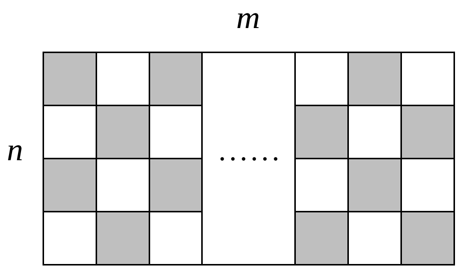


圖 9

2. 棋盤左、右對角線的條數相同 (即 $(n,m)=$(奇，奇)、(奇，偶)、(偶，奇))

　因為每一條右(或左)斜線上最多只能有一個主教，又棋盤中共有 $n+m-1$ 條右(或左)斜線，所以最多有 $n+m-1$ 個主教，又 $RS_{n\times m}=n+m-1$ 存在(請參閱配置方法)，故 $MRS_{n\times m}=n+m-1$。

一般化

結論 3.2

在 $n\times m$ 的長方形棋盤中，主教互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數的最大值

1. 當 $(n,m)=$(偶，偶) 時，主教數的最大值 $MRS_{n\times m}=n+m-2$

2. 當 $(n,m)=$(奇，奇)、(奇，偶)、(偶，奇)時，主教數的最大值 $MRS_{n\times m}=n+m-1$。

(二) $RS_{n\times m}$ 為最大值($MRS_{n\times m}$)的配置方法探討

策略提出

我們以正方形棋盤中的主教數的最大值基礎，透過加子來完成排列。

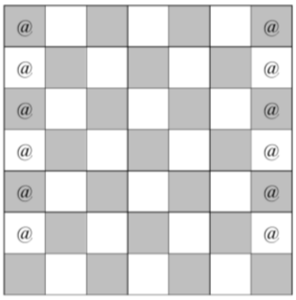
配置方法

1. n 為奇數(以 7×7 到 7×11 為例)

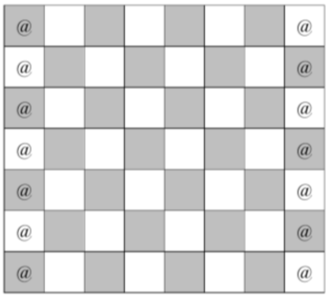
(1)從 7×7 (正方形)棋盤出發，當變成 7×8 (長方形)時，將右方主教右移一欄並在右下角及左下角各增加一個主教。

(2)接下來棋盤每增加一欄就在棋盤的中心放置一個主教，並將右方主教右移一欄。

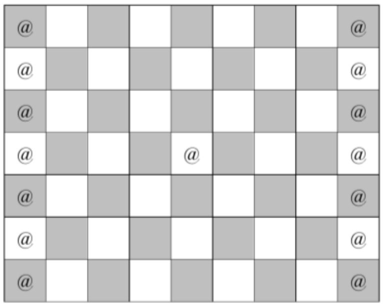
$MS_7 = 12$



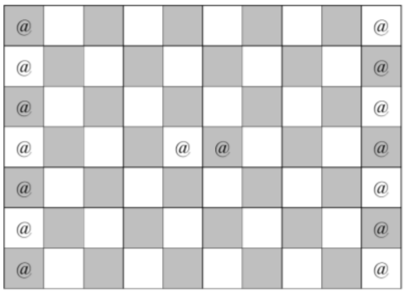
$MRS_{7\times8} = 14$



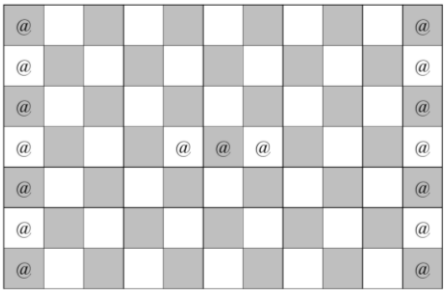
$MRS_{7\times9} = 15$



$MRS_{7\times10} = 16$



$MRS_{7\times11} = 17$

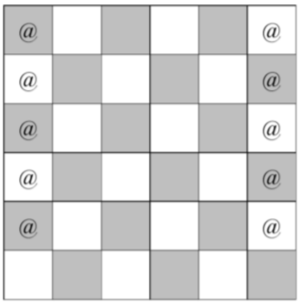


2. n 為偶數(以 6×6到6×11為例)

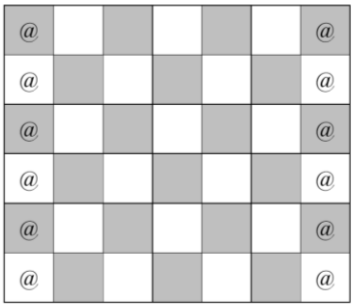
(1) 從 6×6 (正方形)棋盤出發，當變成 6×7 (長方形)時，將右方主教右移一欄並在右下角及左下角各增加一個主教。

(1) 當 6×7 (第一個 m 為奇數的長方形)變成 6×8 (第一個 m 為偶數的長方形)時，將右方主教右移一欄。

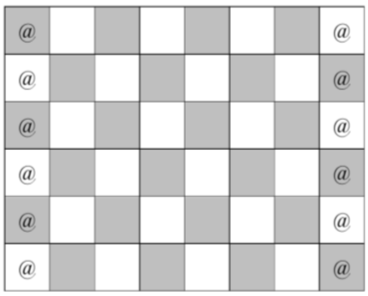
$MS_6 = 10$



$MRS_{6\times7} = 12$



$MRS_{6\times8} = 12$

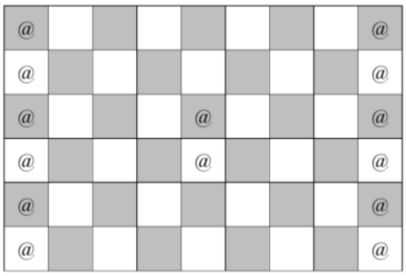


(3) 當 6×8 (第一個 m 為偶數的長方形)變成 6×9 (第二個 m 為奇數的長方形)時，在中間欄加兩個主教，並將右方主教右移一欄。

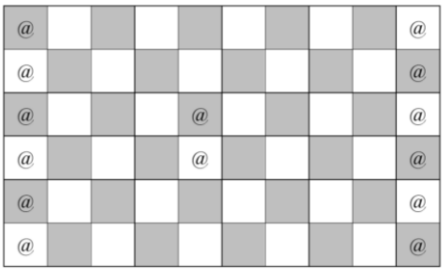
(4) 當 6×9 (第二個 m 為奇數的長方形)變成 6×10 (第二個 m 為偶數的長方形)，將右方主教右移一欄。

(5) 當 6×10 (第二個 m 為偶數的長方形)變成 6×11 (第三個 m 為奇數的長方形)，在中間欄的右欄加兩個主教，將右方主教右移一欄。

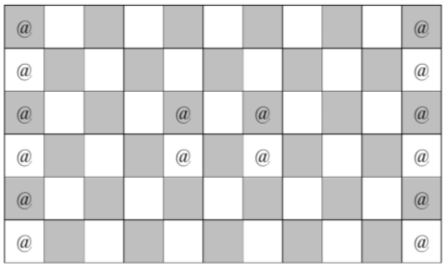
$MRS_{6\times9}=14$



$MRS_{6\times10}=14$



$MRS_{6\times11}=16$



研究 3.3 在 n×m 的長方形棋盤中，探討在互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數 $RS_{n\times m}$ 的有解情形與配置方法。

(一) $RS_{n\times m}$ 有解情形的探討

實際操作

同樣的，我們從 $n=3$、4，$m=4\sim11$ 實際排列，試著找出有解的所有情形。結果請參閱附件(八)。

整理與歸納

1. 從附件(八)中，我們將結果進一步整理成表 7。

表 7

$n\times m$	$RS_{n\times m}$ 有解的所有情形	$n\times m$	$RS_{n\times m}$ 有解的所有情形
3×4	4，5，6	4×5	4，5，6，7，8
3×5	4，5，6，7	4×6	6，7，8
3×6	6，7，8	4×7	6，7，8，9，10
3×7	6，7，8，9	4×8	8，9，10
3×8	8，9，10	4×9	8，9，10，11，12
3×9	8，9，10，11	4×10	8，9，10，11，12
3×10	10，11，12	4×11	10，11，12，13，14

2. 從表中，我們發現：

當 $n=3$、4，$m=4\sim11$ 時，$RS_{n\times m}$ 從最小值到最大值之間每加 1 子均有解。

猜想

在 $n \times m$ 的長方形棋盤中，主教互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數 $RS_{n\times m}$ 從最小值到最大值之間每加 1 子均有解。

證明

由***性質 1.1*** 與***性質 1.2*** 得知，在互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需的主教數，每加一子均有解。

一般化

結論 3.3

在 $n \times m$ 的長方形棋盤中，主教互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數 $RS_{n\times m}$ 從最小值到最大值之間每加 1 子均有解。

(二) $RS_{n\times m}$ 有解情形的配置方法探討

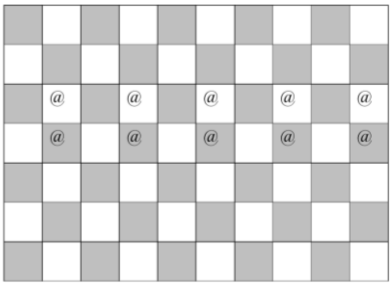
策略提出

我們從 $RS_{n\times m} = mRS_{n\times m}$ 到 $MRS_{n\times m}$ 中，利用分拆操作及矩形框移子操作進行每加 1 子均有解的配置。

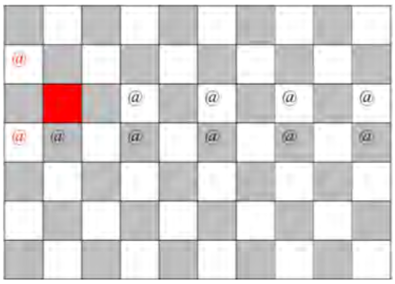
配置方法

我們從 $mS_{n\times m}$ 到 $MS_{n\times m}$ 中，利用分拆操作及矩形框移子操作進行每加 1 子均有解的配置。以 7×10 為例

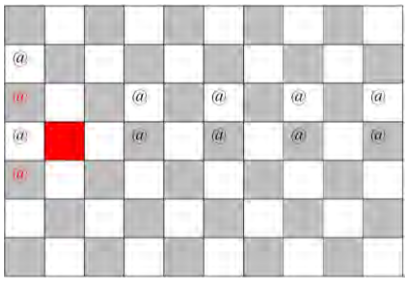
$mRS_{7\times10} = 10$



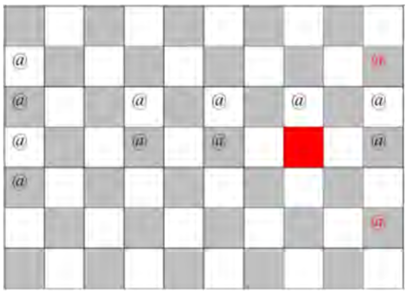
$RS_{7\times10} = 11$



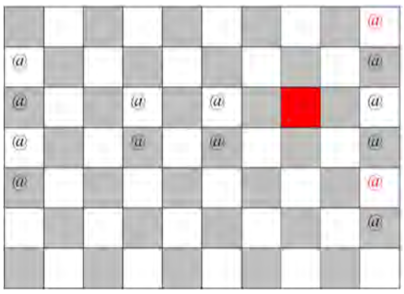
$RS_{7\times10} = 12$



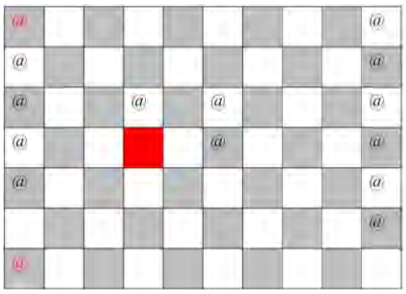
$RS_{7\times10} = 13$



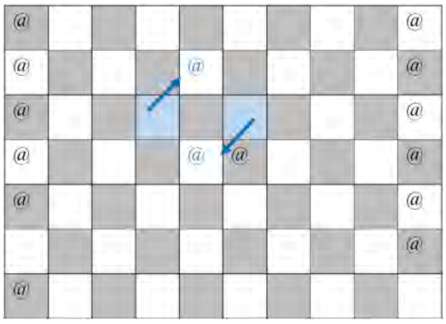
$RS_{7\times10} = 14$



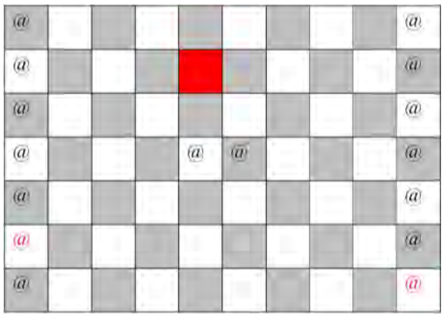
$RS_{7\times10} = 15$



$RS_{7\times10}=15$



$MRS_{7\times10}=16$



陸、討論

一、應用

在研究的過程中，我們想到可以將研究運用於生活中的**車禍預測**，透過研究 1.2 求出的攻擊線方程式，找出在不同情況下車禍的好發地點，相關說明如下:

圖例解釋

(一)箭頭:車輛的行進方向。

(二)有色區塊:車輛的可能出發位置。

(三)各色虛線:由該色區塊出發的車輛理想行進路線。

(四)各色方框:

1. 藍色方框:理想情況下最安全的區域，建議交通警察可站在此處執勤。
2. 粗線紅色方框:理想情況下最危險的區域，提醒駕駛可以多加注意，並加強夜間警示燈及監視設備。
3. 黃色方框:路口。
4. 細線紅色方框:預設的討論棋盤。

說明

(一)以丁字路口及十字路口為例，如圖 10 和 10.1。

(二)行進路線:

1. 水平線:假設出發點的坐標為 (x_0, y_0)，則攻擊線(行進路線)方程式為 $y = y_0$。
2. 鉛直線:假設出發點的坐標為 (x_0, y_0)，則攻擊線(行進路線)方程式為 $x = x_0$。
3. 斜線:根據研究 1.2，可以由車輛(主教)的坐標，求出攻擊線(行進路線)方程式。

(三)由以上的斜率及坐標，可以算出車輛的行進路線方程式，透過兩兩解聯立即可找出重複攻擊坐標**(車禍的好發地點)**。

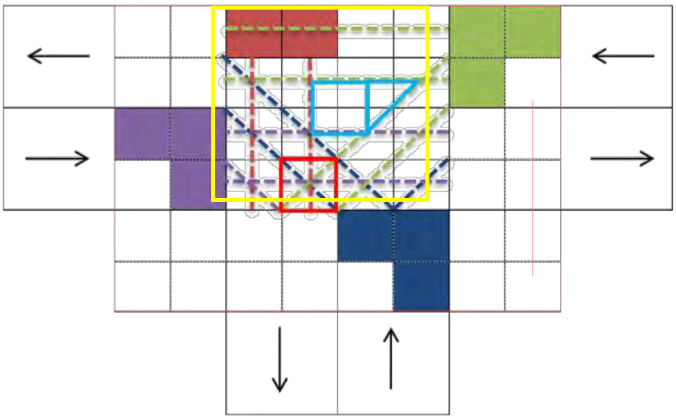


圖 10　丁字路口

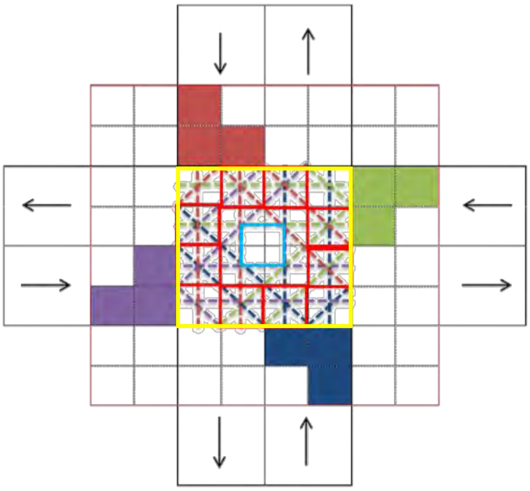


圖 10.1 十字路口

二、未來發展方向

(一)變形棋盤

發想

我們主要探討的是平面矩形，未來可以嘗試做其他的圖形或是朝著多元空間去發展。

實作

我們嘗試讓棋盤變為不規則的形狀或立體圖形，經過一段時間的嘗試，發現有許多變因是目前所不能及的，未來仍會努力思考如何突破。

未來方向

嘗試學習編譯程式，透過撰寫電腦程式再逐一分析討論。

(二)障礙物

發想

如果主教攻擊線中出現障礙物時，會有怎樣的影響？於是，我們進行了以下討論。

障礙物的性質

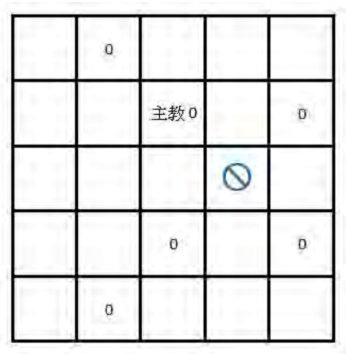


圖 11

1. 影響方式:斜直線，如圖 11。
2. 只要主教的攻擊線碰到障礙物，其攻擊線就會中止。
3. 將障礙物的坐標帶入研究 1.2，只要主教所在的坐標符合障礙物的任一直線方程式(且在棋盤範圍內)，該主教即會受到影響。

實作

1. 目的：速算主教被障礙物影響的格數。
2. 策略：確認所選擇的主教是否會被影響→找出主教和障礙物的共同直線方程式→
   →從 x 坐標判斷要取右邊或左邊的邊界坐標(須符合主教和障礙物的共同直線方程式)

→(障礙物到該邊界坐標的距離)除以$\sqrt{2}$再+1。

3. 實例：以圖 11 為例，障礙物位在(4，3)，在棋盤內且符合攻擊線方程式的坐標有(2，1)、(3，2)、(5，4)、(3，4)、(5，2)、(2，5)，其中位在棋盤邊緣的有(2，1)、(5，4)、(2，5)、(5，2)四個坐標，假設主教位在(3，4)，他和障礙物(4，3)的共同攻擊線方程式是$x+y=7$，從x坐標可知障礙物在主教的右邊，所以應該要取在右邊邊界上且符合$x+y=7$的點，求出坐標為(5，2)，之後找出障礙物的坐標(4，3)和右邊邊界的坐標(5，2)的距離除以$\sqrt{2}$再+1就能找出該主教被障礙物所影響到的格數。

公式：

若障礙物坐標為(x_1,y_1)，邊界坐標為(x_2,y_2)，則被影響的格數=$\dfrac{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}{\sqrt{2}}+1$。

未來方向

目前我們已經研究出被影響的格數，未來希望能找出棋盤中放置障礙物時，攻擊滿棋盤所需主教數的最大值及最小值。

三、延伸討論

在研究一開始提到一個古老的數學問題：八皇后問題，也就是在8×8的棋盤上，8 個皇后的配置方法(圖 12 為其中一種配置方法)。雖然我們的研究有部分是受該問題啟發，但完成研究後發現，我們的研究與八皇后問題相差很多，我們針對本研究與八皇后問題做了簡單的比較，如表 8。

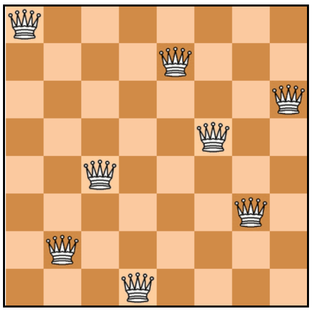


圖 12

	本研究	八皇后問題
討論對象	主教	皇后
主要討論性質	攻擊滿棋盤所需主教數 1.最小值 2.最大值 3.配置方法	以 8 個皇后攻擊滿 8×8 棋盤的有解情形 1.配置方法 2.互不相同解數量 3.獨立解數量

表 8

柒、結論

一、$n\times n$正方形棋盤上主教的攻擊格數(n為正整數)

(一)主教每往內一圈，攻擊格數增加二格。

(二)最外圈的攻擊格數為n。

(三)當n為偶數時，最內圈的攻擊格數為$2n-2$。

(四)當 n 為奇數時，最內圈的攻擊格數為 $2n-1$。

二、當主教位於 (x_0, y_0) 時，其攻擊線方程式為 $y-y_0=x-x_0$ 及 $y-y_0=-x+x_0$。

三、在互不攻擊下，攻擊滿 $n\times n$ 棋盤所需的主教數 S_n

(一)最小值 $mS_n=n$。

(二)最大值 $MS_n=2n-2$。

(三)最小值到最大值之間每加 1 子均有解。

四、在互不攻擊下，攻擊滿 $n\times m$ 棋盤所需的主教數 $RS_{n\times m}$

(一)最小值 $mRS_{n\times m}$

1. 當 n 為奇數時

(1)若 m 為奇數，$mRS_{n\times m}=m-1$。

(2)若 m 為偶數，$mRS_{n\times m}=m$。

2. 當 n 為偶數時，設 $m\div(n+1)=q......r$

(1)若 r 為奇數，則 $mRS_{n\times m}=qn+r+1$。

(2)若 r 為偶數，則 $mRS_{n\times m}=qn+r$。

(二)最大值 $MRS_{n\times m}$

1. 當 (n,m) 為(偶，偶)時，$MRS_{n\times m}=n+m-2$。

2. 當 (n,m) 為(奇，奇)、(奇，偶)或(偶，奇)時，$MRS_{n\times m}=n+m-1$。

3. 最小值到最大值之間每加 1 子均有解。

五、本研究可應用於車禍預測。

捌、參考資料及其他

一、李威締、賴冠錡（民 101 年）。科展群傑廳。當「皇后」遇見「小三」－正三角形棋盤上的皇后互不侵犯問題。取自 http://science.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?cat=&a=0&fld=1000000&key=&isd=1&icop=10&p=1&sid=9534

二、第一冊數學課本。南一版。

三、第二冊數學課本。南一版。

四、第三冊數學課本。南一版。

五、封面圖片出處 https://kknews.cc/history/mzkek2.html。

【評語】030423

探討在棋盤上放置若干個主教，在限制主教們彼此不落在對方的攻擊線上，而所有的主教的攻擊線必須能覆蓋整個棋盤的前提下，所能放置的主教的個數的問題。針對 n×n 的正方形棋盤，給出了完整的結果。對於 m×n 的長方形棋盤，也作了一些討論。問題很有趣。西洋棋中互不攻擊且控制全局主教（nonattacking and dominating bishop）的存在與配置問題，是古老的遊戲數學題材，已經有不少資料在網路上可參考。作者展現了分析能力，但可惜結果有一些重複已知的部分。有研究主題的反思從正方形棋盤探討到長方形棋盤，很有研究精神。美中不足的是，在一些關鍵點的論述上過於模糊，感覺上比較接近直觀的說明而不像論證，這也對後續長方形棋盤的討論造成了影響。如果能稍做修正，把一些概念說的更清楚會更好。

作品海報

壹 摘要

本篇是研究在矩形棋盤上主教的攻擊情形，藉由了解主教的攻擊性質，尋找攻擊滿矩形棋盤所需的主教最小值、最大值及其配置方法，接著經由證明來驗證其正確性，並發現其研究结果可應用於車禍預測。

貳 研究動機

有一次下西洋棋時突然想到，如果全部的棋子都為同一種，那麼同種棋子之間的攻擊線重疊情形是怎麼樣呢？為了解開疑惑，我們上網查資料後發現，如何在西洋棋盤中擺入最多個不互相攻擊的皇后，是一個古典的數學問題(八皇后問題)，目前已經找到很多组不同的解，也看到有人認為可以把皇后的佈局延伸到警察和消進行探究，结合國中所學到的平面直角坐標系觀念，希望能找出主教攻擊線的相關規律。

參 研究目的

一、主教攻擊規律的探討
(一) 主教攻擊格數的規律。
(二) 主教的攻擊線方程式。
二、正方形棋盤的探討： 正方形棋盤中，互不攻擊下，攻擊滿棋盤所需主教數
(一)最小值與配置方法。
(二)最大值與配置方法。
(三)有解情形與配置方法。
三、長方形棋盤的探討： 長方形棋盤中，互不攻擊下，攻擊滿棋盤所需主教數
(一)最小值與配置方法。
(二)最大值與配置方法。
(三)有解情形與配置方法。
四、 車禍預測的探討。

肆 研究方法

一、名詞定義
（一）西洋棋盤：為黑白相間的8×8正方形棋盤，一般情況下左下角為黑色，如圖1所示。
（二）攻擊線：主教能夠攻擊到的格子所連成的線，為兩條斜線，可無限延伸，如圖2所示。
（三）互不攻擊：主教所在位置不會被任一其他主教的攻擊線所攻擊到。
（四）攻擊滿：在所有主教皆互不攻擊的情況下，所有主教的攻擊線能涵蓋棋盤內所有格子。
（五）s_n：表示在 $n\times n$ 的正方形棋盤中，主教的總數。其中最小值為 $\mathrm{m}S_n$，最大值為 MS_n。
（六）$RS_{n\times m}$：表示在 $n\times m$ 的長方形棋盤中，主教的總數。其中最小值為$\mathrm{m}RS_{n\times m}$，最大值為$MRS_{n\times m}$。
二、圖例解釋
（一）主教所在位置：以@ 表示。
（二）主教所能攻擊到的範圍：以X表示。
（三）障礙物　所能影響到的格數：以0表示。

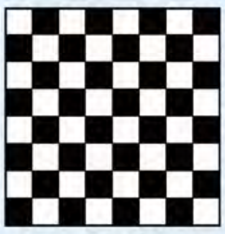


圖1

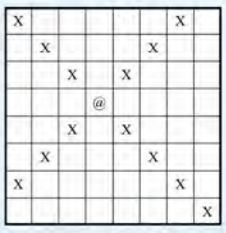


圖2

三、研究流程圖

四、研究過程
首先找出主教的攻擊格數以及攻擊線方程式，接下來探討攻擊滿棋盤所需的主教數時，將其分為最小值、最大值以及有解情形來進行研究。研究流程是由特殊化(特定邊長的棋盤)開始，找到通則，接下來一般化(任意邊長的棋盤)，並以數學方法來證明公式。

伍 研究结果

一、主教攻擊線的特性
研究1.1 探討主教攻擊的格數

特殊化
在探討主教攻擊線的特性中，我們將棋盤分圈討論。
整理與發現
在8×8的正方形棋盤中，當主教分別位在第一圈、第二圈、第三圈、第四圈時，其主教的可攻擊範圍分別為7＋1、9＋1、11＋1、13＋1個格數(能攻擊到的格數以及本身所佔據的1個格子)，因而發現8×8棋盤每往內一圈，攻擊格數就會增加二格。
在7×7的正方形棋盤中，當主教分別位在第一圈、第二圈、第三圈、第四圈時，其主教的可攻擊範圍分別為6＋1、8＋1、10＋1、12＋1個格數，因而發現7×7棋盤每往內一圈，攻擊格數也會增加二格。
結論
在$n\times n$正方形棋盤中
1. 當n為偶數時，最外圈的攻擊格數為n，最內圈的攻擊格數則為$2n-2$ 。
2. 當n為奇數時，最外圈的攻擊格數為n，最內圈的攻擊格數則為 $2n-1$。

研究1.2兩個互不攻擊的主教共同管轄的格數
規則分析
1. 從規則來看，主教間互不攻擊，代表一個主教在同一左斜線、右斜線上不能有其他的主教。因此，遊戲規則可改為：
在$n\times n$ 的正方形棋盤中，滿足：
(1)每一左斜線、右斜線上最多只能有1個主教。
(2)只要在任何一個空格再放1個主教，就會造成斜線上(左斜或右斜)有2個主教以上。
2. 我們發現若兩個主教的坐標和皆為奇數或偶數，則這兩個主教所在格子的底色會相同，而若兩個主教的坐標和為一奇一偶，這兩個主教會位於不同底色的格子(一黑一白)。確認了主教所屬格子顏色後，我們使用點斜式來加以說明。斜率 $m=\frac{y}{x}$，而主教兩條攻擊線的斜率分別是$m=1$和$m=-1$。從點斜式得知，解直線方程式，需要有斜率和點坐標，其公式為$y-y_0=m(x-x_0)$，其中的m為斜率，x_0 和y_0為該點坐標。一個坐標，可以得到兩個直線方程式$y-y_0=x-x_0$和 $y-y_0=-(x-x_0)$，而若要找出兩個點的重複攻擊坐標，只要將四個直線方程式兩兩解聯立，所得到的正整數解即為重複攻擊坐標。

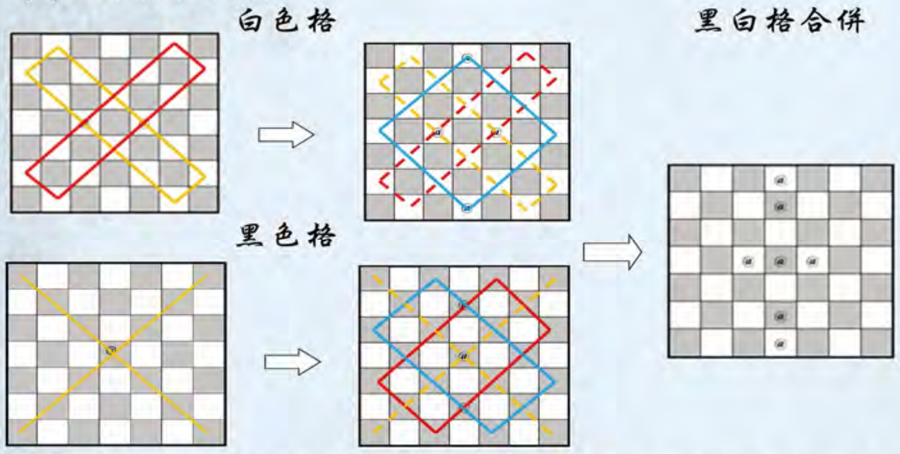
二、正方形棋盤的探討
研究2.1 在n×n的正方形棋盤中，探討在互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數S_n的最小值與配置方法
(一)S_n的最小值(mS_n)探討

實際操作
為了解主教排列的規律性，我們從$n=2$~8實際排列，試著找出有解的所有情形。结果請參閱附件(一)。
整理與歸納
從實際操作中，我們將结果進一步整理成表1。
結論
在$n\times n$ 的正方形棋盤中，主教互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數的最小值$mS_n=n$ 。

(二)S_n為最小值(mS_n)的配置方法探討
策略提出
根據***研究1.1***發現，當主教位在最內圈時，其攻擊範圍是最多格的，所以需要較少主教來填滿棋盤，於是我們便形成嘗試將主教繞著攻擊格數最多的內圈開始擺起的策略。

配置方法
《方法一》沿著中間一列擺放
《方法二》由棋盤的主對角線向兩側發展
1. 將棋盤格塗成一黑一白。
2. 先由主對角線開始。
3. 再利用斜矩形框向棋盤主對角線的兩側框出所有的黑(白)色格。
分析
在$n\times n$的棋盤中
1. 當n為偶數時，其中一條白色格的主對角線需1個主教；另外一條黑色格的主對角線也需1個主教。
2. 當 n為奇數時，兩條主對角線最少共需1個主教。
3. 因為每個斜矩形框都需2個主教，而2個斜矩形框(當斜矩形框內沒有同色方格時)最少也是需要2個主教(圖中，紫色長方形涵蓋黃、藍2個長方形)。

(1) 以7 × 7 為例



所以，在7 × 7的棋盤中，白色格有2 + 2 = 4個主教；黑色格有2 + 1 = 3個主教，故主教數的最小值= 4 + 3 = 7。同理，在 $n \times n$(n為奇數) 棋盤中，可分為兩種狀況來探討：

① 當 $\frac{(n-1)}{2}$為偶數，則白色格有$\frac{(n-1)}{2}$ 個主教，黑色格有$\frac{(n-5)}{2}+3=\frac{(n+1)}{2}$ 個主教，故主教數的最小值 $=\frac{(n-1)}{2}+\frac{(n+1)}{2}=2$ 。

② 當 $\frac{(n-1)}{2}$為奇數，則白色格有$\frac{(n-3)}{2}+2=\frac{(n-1)}{2}$ 個主教，黑色格有$\frac{(n-3)}{2}+1=\frac{(n+1)}{2}$ 個主教故主教數的最小值$=\frac{(n-1)}{2}+\frac{(n+1)}{2}=n$。

研究2.2 在n×n的正方形棋盤中，探討在互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數S_n的最大值與配置方法。

(一) S_n的最大值(MS_n)探討

實際操作

為了了解主教排列的規律性，我們從$n = 2$　8實際排列，試著找出有解的所有情形。結果請參閱附件(二)。

整理與歸納

1. 從實際操作中，我們將結果進一步整理成表2。
2. 從表2中我們發現：在$n = 2$　8，其主教數的最大值為 $2n - 2$ 。

結論

在$n \times n$ 的正方形棋盤中，主教互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數的最大值$MS_n = 2n - 2$。

(二)S_n為最大值(MS_n)的配置方法探討

策略提出

根據研究1.1中發現，當主教位在最外圈時，其攻擊範圍是最少格的，所以需要較多主教來填滿棋盤，於是我們便形成嘗試將主教繞著攻擊格數最少的外圈開始擺起的策略。

配置方法

《方法一》沿著兩側擺放

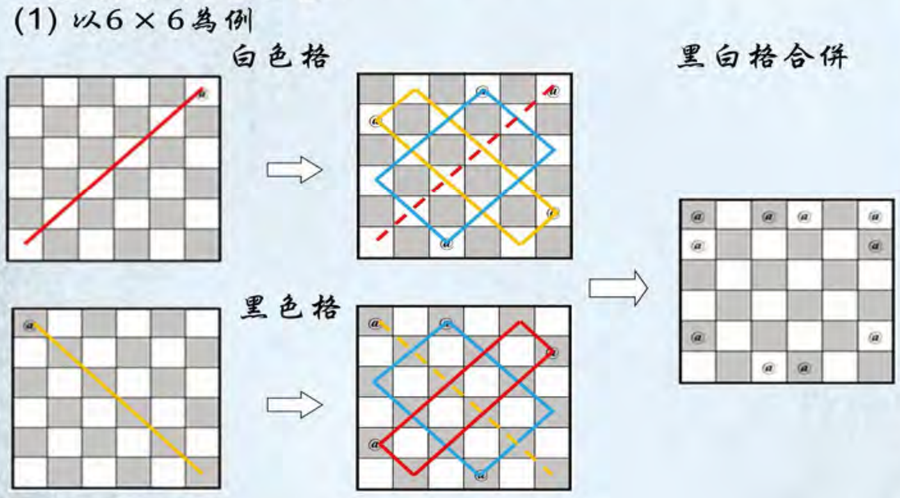
《方法二》由棋盤的主對角線向兩側發展

1. 將棋盤格塗成一黑一白。
2. 先由主對角線開始。
3. 再利用斜矩形框向棋盤主對角線的兩側框出所有的黑(白)色格。

分析

1. 當n為偶數時，其中一條白色格的主對角線需要1個主教，另外一條黑色格的主對角線也需要1個主教。
2. 當n為奇數時，兩條主對角線最多共需要2個主教。
3. 因為每個斜矩形框都需要2個主教，而2個斜矩形框最多共需要4個主教。

(1) 以6 × 6為例



所以，在6 × 6的棋盤中，白色格有2 × 2 + 1 = 5個主教，黑色格有2 × 2 + 1 = 5個主教，故主教數的最大值 = 5 + 5 = 10。

同理，在$n \times n$ (n為偶數)的棋盤中，白色格有 $2\times\frac{(n-2)}{2}+1=n-1$ 個主教，黑色格有$2\times\frac{(n-2)}{2}+1=n-1$個主教，故主教數的最大值$= n - 1 + n - 1 = 2n - 2$。

研究2.3 在n×n的正方形棋盤中，探討在互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數S_n的有解情形與配置方法。

(一) 有解情形的探討

實際操作

同樣的，我們從$n = 2\sim9$實際排列，試著找出有解的所有情形。結果請參閱附件(三)。

整理與歸納

1. 從附件(三)中，我們將結果進一步整理成表3。
2. 從表3中，我們發現：當$n = 2\sim9$時，S_n從最小值到最大值之間每加1子均有解。

結論

$n \times n$ 的正方形棋盤中，主教互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數S_n從最小值到最大值之間每加1子均有解。

(二)S_n有解情形的配置方法探討

排法分析

分拆操作：棋盤上的主教沿著攻擊線分拆成兩主教的操作方式，並使兩個主教與其他主教互不攻擊，如圖3。

矩形框移子操作：位於同一矩形框上兩對角格的主教，可以移動為另兩對角格，且總攻擊線不變，如圖3.1。

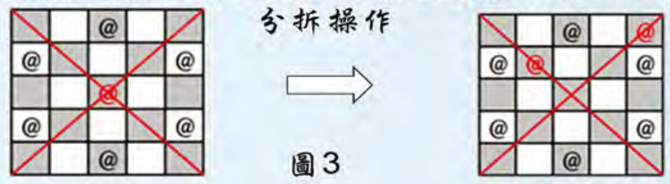


圖3

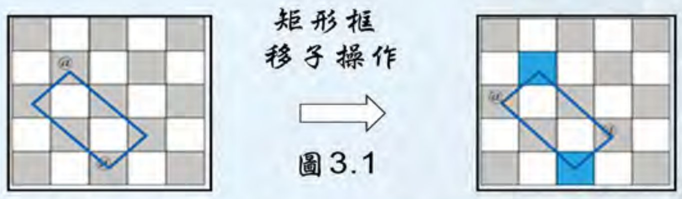


圖3.1

性質1.1：設A圖形為 $n \times n$的棋盤中滿足主教攻擊滿條件之有解圖形，若A圖形進行一次的***分拆操作***後，所形成的圖形稱為B圖形，則B圖形亦為有解圖形。

性質1.2：設C圖形為$n \times n$的棋盤中滿足主教攻擊滿條件之有解圖形，若C圖形進行一次的***矩形框移子操作***後，所形成的圖形稱為D圖形，則D圖形亦為有解圖形。

配置方法

我們從$S_n = mS_n$到MS_n中，利用分拆操作法進行每加1子均有解的配置。

三、長方形棋盤的探討

研究3.1 在n×m的長方形棋盤中，探討在互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數 的最小值與配置方法。

(一)$RS_{n\times m}$的最小值($mRS_{n\times m}$)探討

實際操作

同樣的，我們從n、$m = 2\sim6$實際排列，試著找出有解的所有情形。結果請參閱附件(四)。

整理與歸納

1. 從附件(四)中，我們再將結果進一步整理成表4
2. 由表4中我們發現，當n、$m = 2\sim6$時：
   (1)當n、m皆= 3、5時，其主教數的最小值$mRS_{n\times m} = m - 1$。
   (2)當$n = 3$、5，$m = 2$、4、6時，其主教數的最小值$mRS_{n\times m} = m$。
   (3)當$n = 2$、4、6，$m \div (n+1) = q \ldots\ldots r$中，$r$為奇數時，其主教數的最小值$mRS_{n\times m} = qn + r + 1$。
   (4)當$n = 2$、4、6，$m \div (n+1) = q \ldots\ldots r$中，$r$為偶數時，其主教數的最小值$mRS_{n\times m} = qn + r$ 。

結論

在$n \times m$的長方形棋盤中，主教互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數的最小值

1. n為奇數
   (1) 當(n，m) =(奇，奇)時，主教數的最小值$mRS_{n\times m} = m - 1$ 。
   (2) 當(n，m) =(奇，偶)時，主教數的最小值$mRS_{n\times m} = m$。
2. n為偶數
   設$m \div (n+1) = q \ldots\ldots r$
   (1) 當r為奇數，主教數最小值$mRS_{n\times m} = qn + r + 1$。
   (2) 當r為偶數，主教數最小值$mRS_{n\times m} = qn + r$ 。

(一) $RS_{n\times m}$為最小值($mRS_{n\times m}$)的配置方法探討

策略提出

我們以正方形棋盤中主教數的最小值為基礎，透過加子來完成排列。

配置方法

1. n為奇數

實際操作時，發現這樣的規律+0、+2、+0、+2，於附件(五)中，我們依此規律，排出更多資料來佐證我們的推論及證明皆正確。

2. n為偶數

實際操作時，發現規律為+2、＋0、＋2、＋0……成第$n+1$個長方形時不變，依此規律以$n+1$個長方形為一組進行循環，於附件(六)中，我們依此規律，排出更多資料來佐證我們的推論及證明皆正確。

研究3.2 在n×m的長方形棋盤中，探討在互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數 的最大值與配置方法。

(一)$RS_{n\times m}$的最大值($MRS_{n\times m}$)探討

實際操作

同樣的，我們從n、m = 2~6 實際排列，結果請參閱附件(七)。

整理與歸納

1. 從附件(七)中，我們再將結果進一步整理成表5。
2. 由表5中我們發現，當n、m = 2~6時：
 (1) 當n、m皆= 2、4、6時，其主教數的最大值$MRS_{n\times m}$為$n+m-2$。
 (2) 當n = 3、5，m = 2~6或n = 2、4、6，m = 3、5時，其主教數的最大值$MRS_{n\times m}$ 為$n+m-1$。

結論

在$n\times m$的長方形棋盤中，主教互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數的最大值

1. 當(n，m) =(偶，偶) 時，主教數的最大值$MRS_{n\times m}=n+m-2$
2. 當(n，m) = (奇，奇)、(奇，偶)、(偶，奇)時，主教數的最大值$MRS_{n\times m}=n+m-1$。

(二)$RS_{n\times m}$為最大值($MRS_{n\times m}$)的配置方法探討

策略提出

我們以正方形棋盤中的主教數的最大值基礎，透過加子來完成排列。

配置方法

1. n為奇數
 (1) 從正方形棋盤出發，當變成長方形時，將右方主教右移一欄並在右下角及左下角各增加一個主教。
 (2) 接下來棋盤每增加一欄就在棋盤的中心放置一個主教，並將右方主教右移一欄。
2. n為偶數
 (1) 從正方形棋盤出發，當變成長方形時，右方主教右移一欄並在右下角及左下角各增加一個主教。
 (2) 當m為奇數的長方形變成m為偶數的長方形時，將右方主教右移一欄。
 (3) 當m為偶數的長方形變成m為奇數的長方形時，在中間欄加兩個主教，並將右方主教右移一欄。

研究3.3 在n×m的長方形棋盤中，探討互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數 的有解情形與配置方法。

(一)$RS_{n\times m}$有解情形的探討

實際操作

同樣的，我們n = 3、4，m = 4~11實際排列，試著找出有解的所有情形。結果請參閱附件(八)。

整理與歸納

1. 從附件(八)中，我們將結果進一步整理成表6。
2. 從表6中，我們發現：
 當n = 3、4，m = 4~11 時，$RS_{n\times m}$ 從最小值到最大值之間每加1子均有解。

結論

在$n\times m$的長方形棋盤中，主教互不攻擊情況下，攻擊滿棋盤所需主教數$RS_{n\times m}$從最小值到最大值之間每加1子均有解。

(二)$RS_{n\times m}$有解情形的配置方法探討

策略提出

我們從$RS_{n\times m}=mRS_{n\times m}$到$MRS_{n\times m}$中，利用分拆操作及矩形框移子操作進行每加1子均有解的配置。

配置方法

我們從$mRS_{n\times m}$到$MRS_{n\times m}$中，利用分拆操作及矩形框移子操作進行每加1子均有解的配置。

陸 討論

一、應用

車禍預測

圖例解釋

(一)箭頭:車輛的行進方向。
(二)有色區塊:車輛的可能出發位置。
(三)各色虛線:由該色區塊出發的車輛理想行進路線。
(四)各色方框:
 1. 藍色方框:理想情況下最安全的區域，建議交通警察可站在此處執勤。
 2. 粗線紅色方框:理想情況下最危險的區域，提醒駕駛可多加注意，並加強夜間警示燈及監視設備。
 3. 黃色方框:路口。
 4. 細線紅色方框:預設的討論棋盤。

說明

(一)以丁字路口及十字路口為例。
(二)行進路線:
 1. 水平線:假設出發點的坐標為(x_0，y_0)，則攻擊線(行進路線)方程式為$y=y_0$ 。
 2. 鉛直線:假設出發點的坐標為(x_0，y_0)，則攻擊線(行進路線)方程式為$x=x_0$ 。
 3. 斜線:根據研究1.2，可以由車輛(主教)的坐標，求出攻擊線(行進路線)方程式。
(三)由以上的斜率及坐標，可以算出車輛的行進路線方程式，透過兩兩解聯立即可找出重複攻擊坐標(**車禍的好發地點**)。

二、未來發展方向

(一)變形棋盤

發想

我們主要探討的是平面矩形，未來可以嘗試做其他的圖形或是朝著多元空間去發展。

實作

我們嘗試讓棋盤變為不規則的形狀或立體圖形，經過一段時間的嘗試，發現有許多變因是目前所不能及的。

未來方向

嘗試學習編課程式，透過撰寫電腦程式再逐一分析討論。

(二)障礙物

障礙物的性質

1. 影響方式:斜直線。
2. 只要主教的攻擊線碰到障礙物，其攻擊線就會中止。
3. 將障礙物的坐標帶入研究1.2，只要主教所在的坐標符合障礙物的任一直線方程式(且在棋盤範圍內)，該主教即會受到影響。

實作

1. 目的：速算主教被障礙物影響的格數。
2. 策略：確認所選擇的主教是否會被影響→找出主教和障礙物的共同直線方程式→從x坐標判斷要取右邊或左邊的邊界坐標(須符合主教和障礙物的共同直線方程式)→(障礙物到該邊界坐標的距離)除以$\sqrt{2}$再+1。
3. 實例：以圖為例，障礙物位在(4，3)，在棋盤內且符合攻擊線方程式的坐標有(2，1)、(3，2)、(5，4)、(3，4)、(5，2)、(2，5)，其中位在棋盤邊緣的有(2，1)、(5，4)、(2，5)、(5，2)四個坐標，假設主教位在(3，4)，他和障礙物(4，3)的共同攻擊線方程式$x+y=7$，從x坐標可知障礙物在主教的右邊，所以應該要取在右邊邊界上且符合$x+y=7$的點，求出坐標為(5，2)，之後找出障礙物的坐標(4，3)和右邊邊界的坐標(5，2)的距離除以$\sqrt{2}$ 再+1就能找出該主教被障礙物所影響到的格數。

公式

若障礙物坐標為(x_1，y_1)，邊界坐標為(x_2，y_2)，則被影響的格數= $\frac{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}{\sqrt{2}}+1$ 。

未來方向

目前我們已研究出被影響的格數，未來希望能找出棋盤放置障礙物時，攻擊滿棋盤所需主教數的最大值及最小值。

三、延伸討論

在研究一開始提到一個古老的數學問題：八皇后問題，也就是在8 × 8的棋盤上，8個皇后的配置方法。雖然我們的研究有部分是受該問題啟發，但完成研究後發現，我們的研究與八皇后問題相差很多，我們針對本研究與八皇后問題做了簡單的比較。

柒 結論

一、$n\times n$正方形棋盤上主教的攻擊格數(n為正整數)
 (一)主教每往內一圈，攻擊格數增加二格。
 (二)最外圈的攻擊格數為n。
 (三)當n為偶數時，最內圈的攻擊格數為$2n-2$。
 (四)當n為奇數時，最內圈的攻擊格數為$2n-1$。
二、當主教位於(x_0，y_0)時，其攻擊線方程式為
 $y-y_0=x-x_0$ 及$y-y_0=-x+x_0$。
三、互不攻擊下，攻擊滿$n\times n$棋盤所需的主教數S_n
 (一)最小值$mS_n=n$。
 (二)最大值$MS_n=2n-2$。
 (三)最小值到最大值之間每加1子均有解。
四、互不攻擊下，攻擊滿$n\times m$棋盤所需的主教數$RS_{n\times m}$
 (一)最小值$mRS_{n\times m}$
  1. 當n為奇數時
   (1)若m為奇數，$mRS_{n\times m}=m-1$。
   (2)若m為偶數，$mRS_{n\times m}=m$。
  2. 當n為偶數時，設$m\div(n+1)=q\ldots\ldots r$
   (1)若r為奇數，則$mRS_{n\times m}=qn+r+1$。
   (2)若r為偶數，則$mRS_{n\times m}=qn+r$。
 (二)最大值$MRS_{n\times m}$
  1. 當(n，m) 為(偶，偶)，$MRS_{n\times m}=n+m-2$。
  2. 當(n，m) 不為(偶，偶)，$MRS_{n\times m}=n+m-1$。
  3. 最小值到最大值之間每加1子均有解。
五、本研究可應用於車禍預測。