中華民國第 57 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030422

頂圓多邊形之性質研究與探討

學校名稱：新竹市立光武國民中學

作者：	指導老師：
國二 梁力洵	魏子超
國二 黃暐哲	蘇錦霞
國二 張竹欣	

關鍵詞：頂圓多邊形、形狀、疊作

摘要

本作品藉由研究任意三角形與任意點之頂圓三角形的性質探討，推廣至任意多邊形與任意點之頂圓多邊形的性質探討，及其相鄰兩層圖形頂點連接之夾角與圖形之內角，其邊長比值關係的性質探討；並藉由研究任意多邊形與任意點之頂圓多邊形之形狀，歸納出其形狀區域分布及性質。

壹、 研究動機

在參考多邊形與其中重、頂重多邊形之性質探討後，發現頂重三角形疊作有一些特別的結論，就想：「如果把重心換成任意點呢?」於是我們就展開了這個研究。

貳、 研究目的

一、探討重複疊作頂圓**三角形角度及邊長**規律

二、探討重複疊作頂圓**多邊形角度及邊長**規律

三、探討重複疊作頂圓多邊形**形狀區域分布**及其性質

參、 研究設備與器材

GGB 軟體、電腦、紙、筆

肆、 研究過程與方法

一、名詞定義：

(一)點角線：如圖 1，點P為任意點，$\triangle A_0B_0C_0$為任意三角形。則$\overline{A_0\mathrm{P}}$，$\overline{B_0P}$，$\overline{C_0P}$分別稱為$\triangle A_0B_0C_0$的**點角線**。

(二)頂圓多邊形：以三角形為例，如圖 1，點P為任意點，$\triangle A_0B_0C_0$為任意三角形。分別以點A_0、B_0、C_0為圓心，$\overline{A_0\mathrm{P}}$，$\overline{B_0P}$，$\overline{C_0P}$為半徑做圓，圓A_0與圓B_0交於A_1，圓B_0與圓C_0交於B_1，圓C_0與圓A_0交於C_1，則$\triangle A_1B_1C_1$即為$\triangle A_0B_0C_0$的**頂圓三角形**。

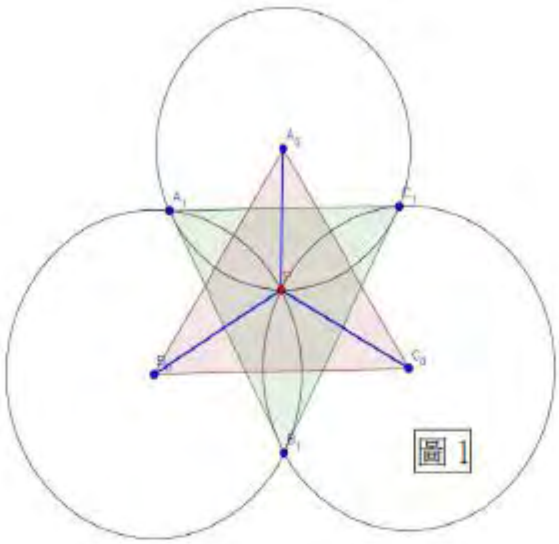


圖 1

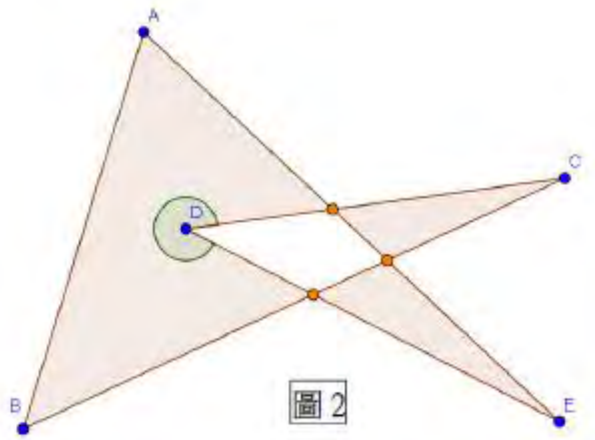


圖 2

(三)頂圓多邊形形狀表示方法：一 n 邊形內角有 x 個為優角，且有 y 個交叉(非鄰邊交叉)，表示為 x 優角 y 交叉 n 邊形。如圖 2，表示為一優角三交叉五邊形。(∠D為優角，三橘點為交叉點)

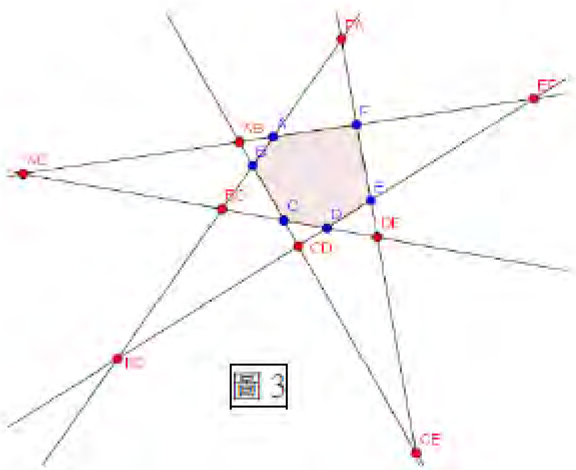


圖 3

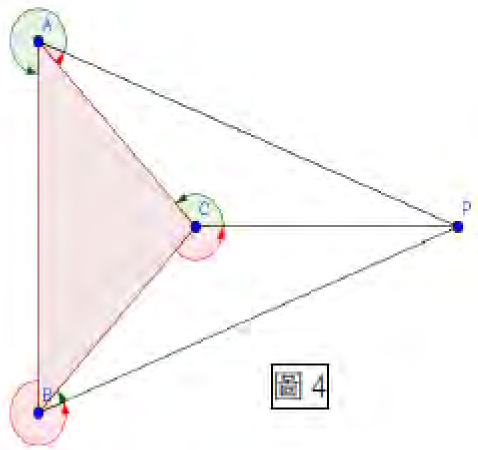


圖 4

(四)n 階交點：如圖 3，以六邊形為例。將多邊形的邊延長，相隔一條邊所交的點為 1 階交點，如點AB、點BC、點CD、點DE、點EF、點FA(交點AB與原圖形相隔邊$\overline{AB}$)，相隔兩條邊所交的點為 2 階交點，如點AC、點BD、點CE(交點AC與原圖形相隔邊$\overline{AB},\overline{BC}$)，以此類推。則n邊形最高有(n-3)階交點。

(五)邊線角：一任意多邊形的點角線，以邊(三角形各邊)到線(點角線)，或線(點角線)到邊(三角形各邊)逆時針方向旋轉的夾角即為**邊線角**，如圖 4。

求多邊形內角方法：取一頂點旁兩邊線角相加後，取其最小正同界角。

角度表示方法為：以$\overline{PA}$為始邊，$\overline{AB}$為終邊

畫一逆時針角度，其角度表示為∠PAB。

(六)邊外、點外：如圖 5，以三角形為例。將圖形各邊延長，由邊向外延伸之區域為**邊外**，由點向外延伸之區域為**點外**。

(七)降邊：在重複疊作頂圓 n 邊形時，當下一層圖形邊數小於 n 邊時，我們將此情況稱為**降邊**。

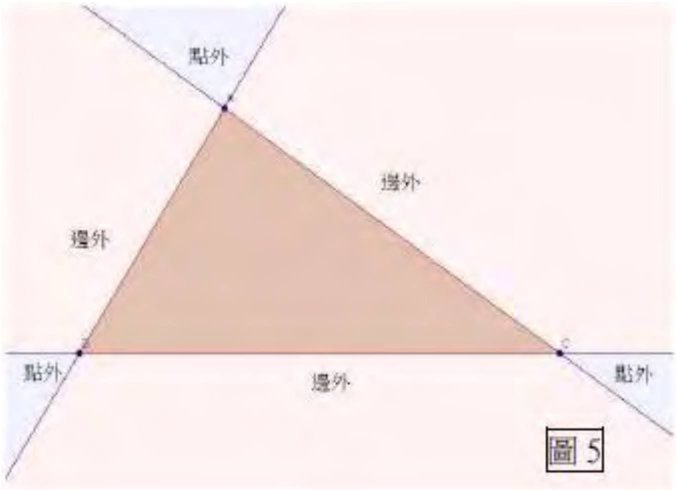


圖 5

(八)邊界圓：以兩頂點及其延長線上之一個一階交點作圓即為**邊界圓**；任意點位於邊界圓上時降一邊。如圖 6

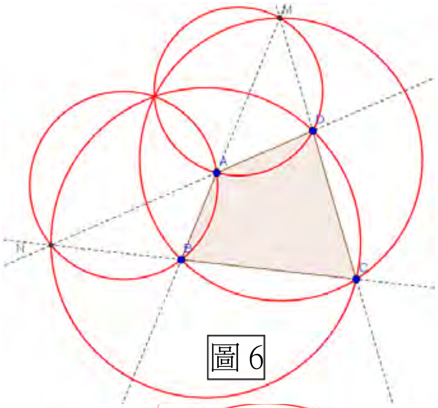


圖 6

(九)n 階邊界弓形：分為偶數、奇數多邊形：

1. 偶數多邊形：以一個$\frac{n-2}{2}$階交點及其延長線上一個$\frac{n-4}{2}$階交點，各作延長線交於第三點，三點作圓後取二階交點與一階交點延長線向圖形外之弓形，

   即為$\boldsymbol{\frac{n-2}{2}}$**階邊界弓形**。如圖 7

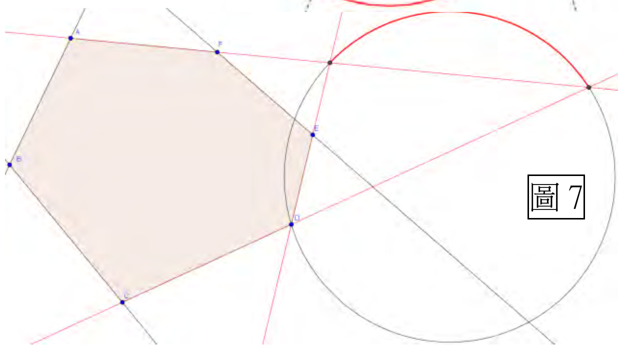


圖 7

2. 奇數多邊形：以一頂點及其對邊上之兩$\frac{n-3}{2}$階交點作圓，並取兩$\frac{n-3}{2}$階交點延長線向圖形外之弓形，即為$\boldsymbol{\frac{n-3}{2}}$**階邊界弓形**。如圖 8

   一個偶數多邊形最高僅會有$\frac{n-2}{2}$階邊界弓形

   一個奇數多邊形最高僅會有$\frac{n-3}{2}$階邊界弓形

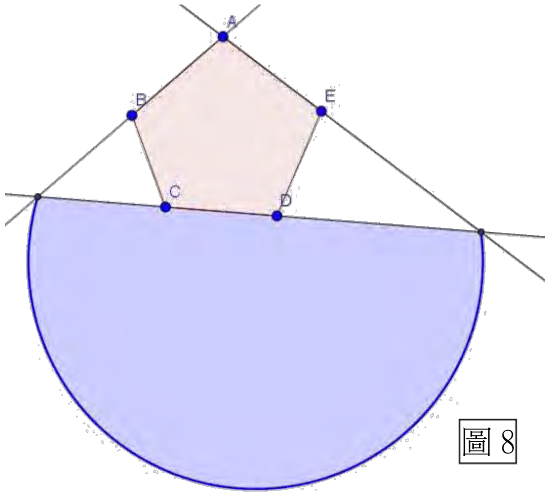


圖 8

(十)點重疊邊：當一頂點位於非鄰邊上時，即為**點重疊邊**。位於非鄰邊之點 P 稱為重疊點，其邊$\overline{AB}$稱為重疊邊。如圖 9

二、重複疊作頂圓三角形性質探討

(一)定義：重疊作頂圓三角形

1. 作一任意三角形及任意點 P，分別以各頂點為圓心，點角線為半徑畫圓，將相鄰的兩圓之交點連線，即為原圖形之頂圓三角形，也為第一層圖形。
2. 重複步驟 1 即為重複疊作頂圓三角形。

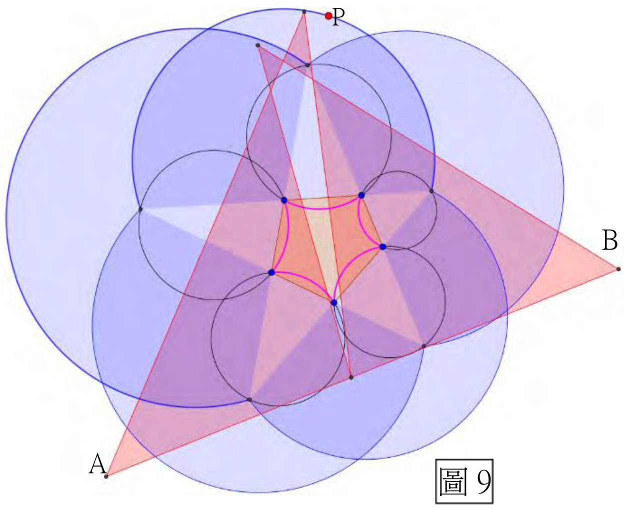
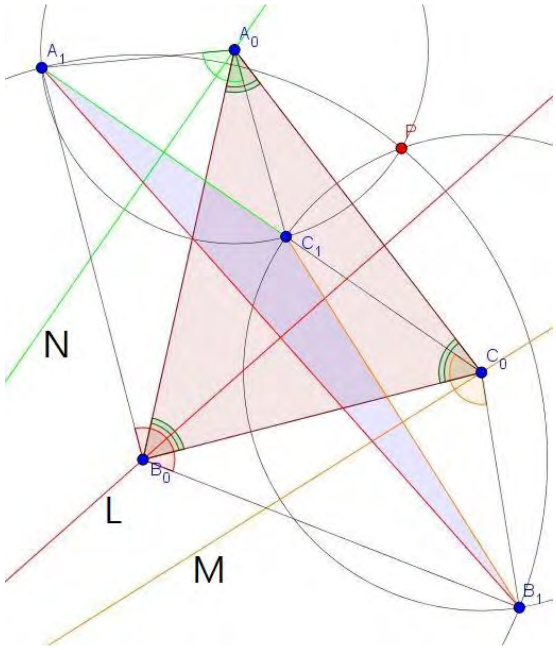


圖 9

(二)重複疊作頂圓三角形性質

性質一：當原圖形的下一層(第一層)每邊都畫出中垂線，發現每邊的中垂線都會通過原圖形的頂點，此邊的兩個點與其中垂線所通過的點畫出的角度會為原圖形該頂點內角的兩倍。



已知：$\triangle A_0B_0C_0$為原圖形，$\triangle A_1B_1C_1$為第一層圖形，L為$\overline{A_1B_1}$之中垂線、M為$\overline{B_1C_1}$之中垂線、N為$\overline{C_1A_1}$之中垂線

求證：

1.第一層圖形每邊之中垂線必過頂點

2. $2\cdot\angle A_0C_0B_0=\angle A_1C_0B_1$

$2\cdot\angle B_0A_0C_0=\angle C_1A_0A_1$

$2\cdot\angle C_0B_0A_0=\angle B_1B_0C_1$

證明：

1. $\because\overline{A_1B_1}$為圓$C_0$之弦，且弦的中垂線必過圓心

$\therefore\overline{A_1B_1}$之中垂線過$C_0$

同理$\overline{B_1C_1}$之中垂線過B_0、$\overline{C_1A_1}$之中垂線過A_0

故第一層圖形每邊之中垂線必過頂點

2. 設$\angle C_0B_0A_0$為$\angle$a、$\angle B_1B_0C_1$為$\angle$b

$\angle A_0B_0C_1=\angle \mathrm{P}B_0A_0$

$\because A_0C_1B_0P$為一箏形、$\angle B_1B_0A_0$為$\angle$a, $\angle$b重疊的部分

$\therefore\angle b-\angle B_1B_0A_0=\angle B_1B_0A_0+2\cdot(\angle a-\angle B_1B_0A_0)$

$\Rightarrow\angle b-\angle B_1B_0A_0=\angle B_1B_0A_0+2\cdot\angle a-2\cdot\angle B_1B_0A_0$

$\Rightarrow\angle b=2\cdot\angle a$

3. 設$\angle A_0C_0B_0$為$\angle$c、$\angle A_1C_0B_1$為$\angle$d

$\angle A_1C_0A_0 = \angle A_0C_0P$

$\because A_0A_1C_0P$為一箏形、$\angle B_1C_0A_0$為$\angle$c, $\angle$d間隔的部分

$\Rightarrow \angle d + \angle B_1C_0A_0 = 2\cdot(\angle c + \angle B_1C_0A_0) - \angle B_1C_0A_0$

$\Rightarrow \angle d + \angle B_1C_0A_0 = 2\cdot\angle c + 2\cdot\angle B_1C_0A_0 - \angle B_1C_0A_0$

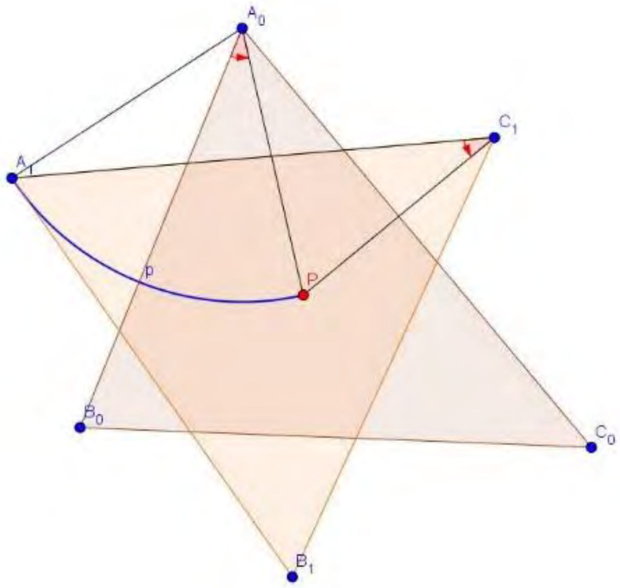
$\Rightarrow \angle d = 2\cdot \angle c\ +$

4. 設$\angle C_0A_0A_1 = \angle PA_0C_0 = \angle e, \angle B_0A_0P = \angle C_1A_0B_0 = \angle f$

$\because 2\cdot\angle e + 2\cdot\angle f = 2\cdot(\angle e + \angle f)$

$\therefore 2\cdot\angle B_0A_0C_0 = \angle C_1A_0A_1$

性質二：第 m 層圖形~第(m+3)層圖形



觀察一：任意點位於圖形內

已知：$\Delta\ A_0B_0C_0$為原圖形，

$\Delta\ A_1B_1C_1$為第一層圖形

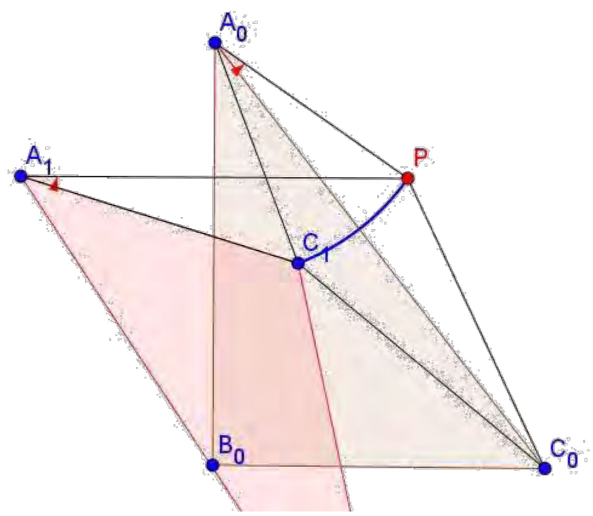
求證：$\angle B_0A_0P = \angle A_1C_1P$

證明：$\angle A_1C_1P = \frac{1}{2}\widehat{A_1\mathrm{P}} = \frac{1}{2}\angle A_1A_0P$

$\angle A_1C_1P = \frac{1}{2}\angle A_1A_0P = \angle B_0A_0P$

故$\angle B_0A_0P = \angle A_1C_1P$

觀察二：任意點位於邊外



已知：$\Delta\ A_0B_0C_0$為原圖形，

$\Delta\ A_1B_1C_1$為第一層圖形

求證：$\angle C_0A_0P = \angle C_1A_1P$

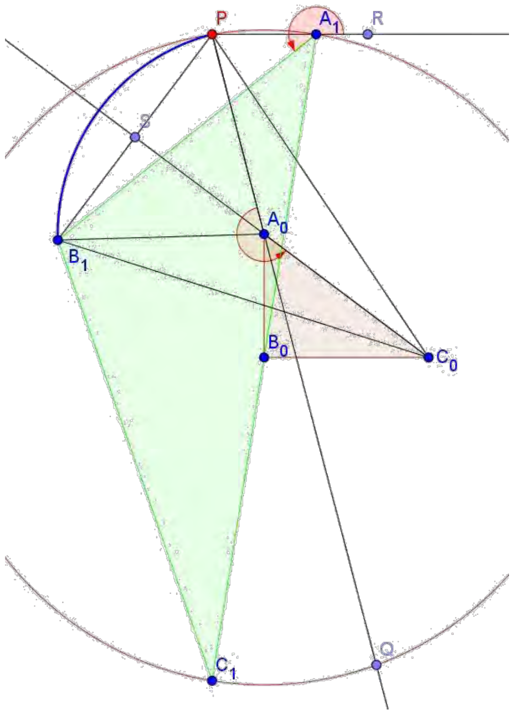
證明：$\angle C_1A_1P = \frac{1}{2}\widehat{C_1P} = \angle C_0A_0P$

$(A_0C_1C_0P$為一箏形)

$\angle C_1A_1P = \frac{1}{2}\angle C_1A_0P = \angle C_0A_0P$

故$\angle C_1A_1P = C_0A_0P$

觀察三：任意點位於點外



已知：$\triangle A_0B_0C_0$為原圖形，

$\triangle A_1B_1C_1$為第一層圖形

求證：$\angle RA_1B_1 = \angle PA_0C_0$

證明：$\angle PA_1B_1 = \frac{1}{2}\angle PA_0B_1 = \frac{1}{2}\widehat{PB_1}$

$\because \triangle PB_1A_0$、$\triangle PB_1C_0$為共底等腰三角形

$\therefore \triangle PB_1A_0$、$\triangle PB_1C_0$高共線

$\overrightarrow{C_0A_0}$平分$\angle PA_0B_1$

$\therefore \angle QA_0C_0 = \angle PA_0S$

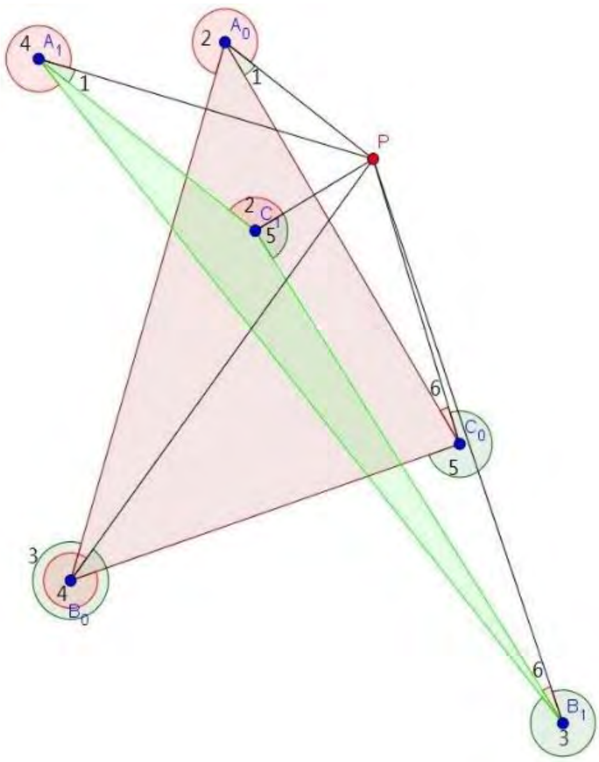
$\because \angle PA_0S = \frac{1}{2}\angle PA_0B_1$

$\therefore \angle QA_0C_0 = \angle PA_0S = \frac{1}{2}\angle PA_0B_1 = \frac{1}{2}\widehat{PB_1} = \angle PA_1B_1$

故$\angle RA_1B_1 = \angle PA_0C_0$

$\boxed{\text{性質二}}$之證明

步驟一：證明原圖形相似於第三層圖形



1. 原圖形與第一層疊作頂圓三角形

藉由**觀察一、二、三**可得

$\angle C_0A_0P = \angle 1 = \angle C_1A_1P$

$\angle PA_0B_0 = \angle 2 = \angle PC_1A_1 + 180°$

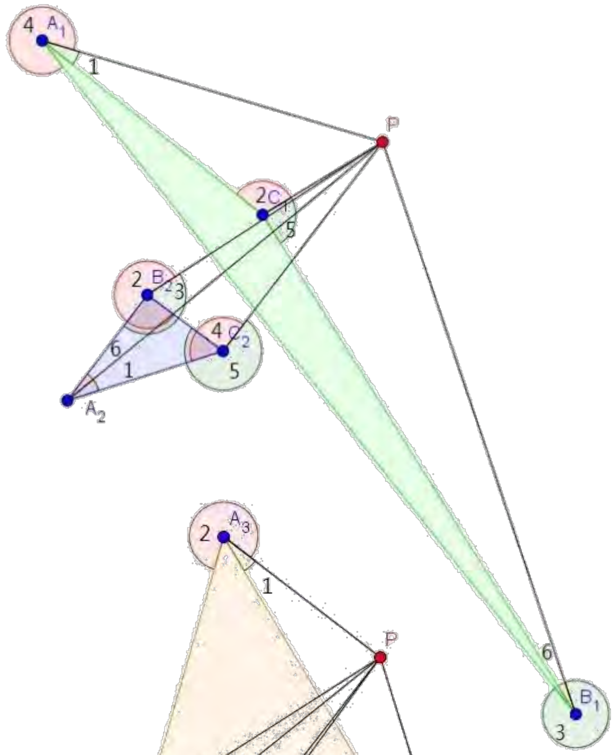
$\angle A_0B_0P = \angle 3 = \angle A_1B_1P$

$\angle PB_0C_0 = \angle 4 = \angle PA_1B_1$

$\angle B_0C_0P = \angle 5 = \angle B_1C_1P + 180°$

$\angle B_0C_0P = \angle 6 = \angle PC_1A_1$

2.第一層與第二層重複疊作頂圓三角形



同 1.的方法可得

$\angle C_1A_1P = \angle 1 = \angle C_2A_2P$

$\angle \mathrm{P}C_1A_1 + 180° = \angle 2 = \angle \mathrm{P}B_2C_2$

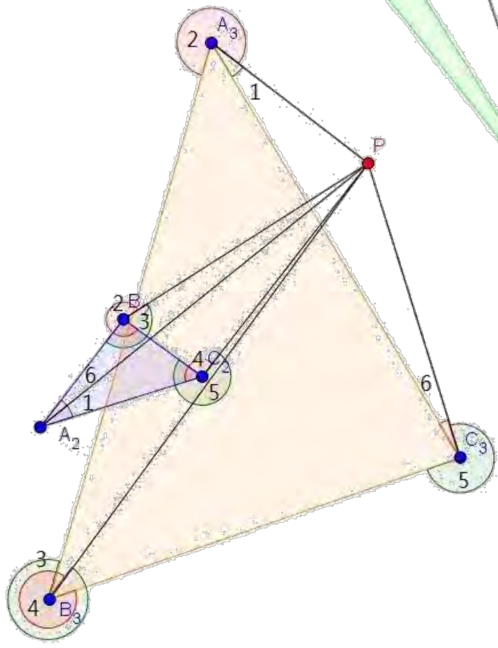
$\angle A_1B_1P = \angle 3 = \angle A_2B_2P + 180°$

$\angle \mathrm{P}A_1B_1 = \angle 4 = \angle \mathrm{P}C_2A_2 + 180°$

$\angle B_1C_1P + 180° = \angle 5 = \angle B_2C_2P$

$\angle PC_1A_1 = \angle 6 = \angle PA_2B_2$

3. 第二層與第三層重複疊作頂圓三角形



同 1.的方法可得

$\angle C_2A_2P = \angle 1 = \angle C_3A_3P$

$\angle \mathrm{P}B_2C_2 = \angle 2 = \angle \mathrm{P}A_3B_3$

$\angle A_2B_2P + 180° = \angle 3 = \angle A_3B_3P$

$\angle \mathrm{P}C_2A_2 + 180° = \angle 4 = \angle PB_3C_3$

$\angle B_2C_2P = \angle 5 = \angle B_3C_3P$

$\angle PA_2B_2 = \angle 6 = \angle PC_3A_3$

4. 在$\Delta\ A_0B_0C_0$和$\Delta\ A_3B_3C_3$中

$\because \angle C_0A_0P = \angle C_1A_1P = \angle C_2A_2P = \angle C_3A_3P = \angle 1$

$\angle PA_0B_0 = \angle PC_1A_1 + 180° = PB_2C_2 = \angle PA_3B_3 = \angle 2$

$\angle A_0B_0P = \angle A_1B_1P = \angle A_2B_2P + 180° = \angle A_3B_3P = \angle 3$

$\angle PB_0C_0 = \angle PA_1B_1 = \angle PC_2A_2 + 180° = \angle PB_3C_3 = \angle 4$

$\angle B_0C_0P = \angle B_1C_1P + 180° = \angle B_2C_2P = \angle B_3C_3P = \angle 5$

$\angle BC_0P = \angle PC_1A_1 = \angle PA_2B_2 = \angle PC_3A_3 = \angle 6$

$\therefore \angle B_0A_0C_0 = 360^\circ - (\angle C_0A_0P + \angle PA_0B_0) = 360^\circ - (\angle C_3A_3P + \angle PA_3B_3) = \angle B_3A_3C_3$

$\angle C_0B_0A_0 = 720^\circ$-$(\angle A_0B_0P + \angle PB_0C_0) = 720^\circ$-$(\angle A_3B_3P + \angle PB_3C_3) = \angle C_3B_3A_3$

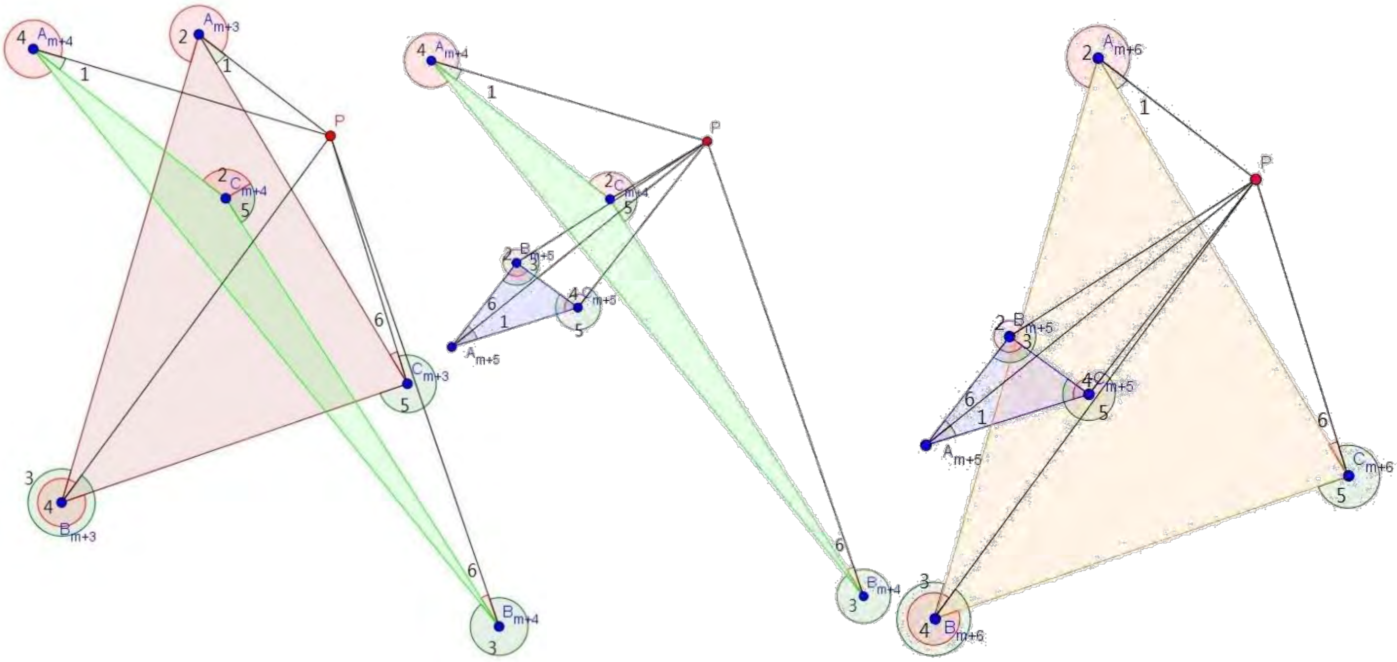
$\angle A_0C_0B_0 = 360^\circ - (\angle B_0C_0P + \angle PC_0A_0) = 360^\circ - (\angle B_3C_3P + \angle PC_3A_3) = \angle A_3C_3B_3$

$\Rightarrow \Delta\ A_0B_0C_0 \sim \Delta\ A_3B_3C_3$(AAA 相似)，故原圖形相似於第三層圖形

步驟二：假設第 m 層圖形~第(m+3)層圖形成立

步驟三：證明第(m+3)層圖形~第(m+6)層圖形

如下圖，P 為第(m+3)層圖形的任意點，對其重複疊作，與步驟一同理， 得到第(m+3)層圖形與第(m+6)層圖形之各對應角相等，故可得第(m+3)層圖形~第(m+6)層圖形(AAA 相似)。



由步驟一、步驟二、步驟三及數學歸納法可得第m層圖形~第$(m+3)$層圖形，得證。

經整理可得頂圓三角形角度規律如下

第 m 層	內角$\angle A_m$	內角$\angle B_m$	內角$\angle C_m$
第 m+0 層	$\angle A_0 = \angle 1 + \angle 2$	$\angle B_0 = \angle 3 + \angle 4$	$\angle C_0 = \angle 5 + \angle 6$
第 m+1 層	$\angle A_1=(\angle 1+180^\circ)+(\angle 4+180^\circ)$ 之同界角	$\angle B_1 = \angle 3 + \angle 6$	$\angle C_1 = \angle 5 + \angle 2$
第 m+2 層	$\angle A_2 = \angle 1 + (\angle 6 + 180^\circ)$ 之同界角	$\angle B_2 = \angle 3 + \angle 2$	$\angle C_2 = (\angle 5 + 180^\circ) + \angle 4$ 之同界角
第 m+3 層	$\angle A_0 = \angle 1 + \angle 2$	$\angle B_0 = \angle 3 + \angle 4$	$\angle C_0 = \angle 5 + \angle 6$

$\boxed{\text{性質三}}$：三角形第 m 層與第$(m+3)$層之邊長成比例

已知：$\triangle A_0B_0C_0$為原圖形，$\triangle A_1B_1C_1$為第一層圖形，

$\triangle A_2B_2C_2$為第二層圖形，$\triangle A_3B_3C_3$為第三層圖形

求證：$\triangle A_0B_0C_0$與第三層圖形$\triangle A_3B_3C_3$之對應邊長成比例

證明：設$\overline{A_0P}=a,\overline{B_0P}=b,\overline{C_0P}=c,\angle C_0A_0P=\angle 1,\angle PA_0B_0=\angle 2,$

$\angle A_0B_0P=\angle 3,\angle PB_0C_0=\angle 4,\angle B_0C_0P=\angle 5,\angle PC_0A_0=\angle 6$

(1)$\because \angle A_0PC_1=90°-\angle 1,\angle A_0PA_1=90°-(360°-\angle 2),$

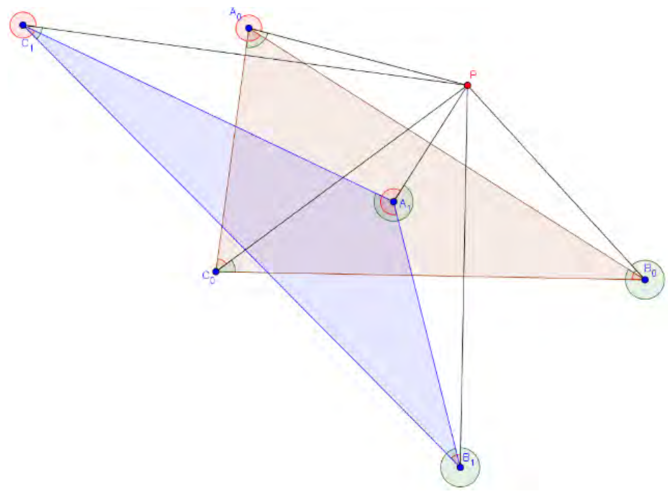
$\therefore \angle C_1PA_1=\angle A_0PA_1-\angle A_0PC_1=90°-\angle 1-[90°-(360°-\angle 2)]$

$=90°-\angle 1-90°+360°-\angle 2$

$\Rightarrow$ (取同界角) $\Rightarrow \angle C_1PA_1$

$=-(\angle 1+\angle 2),\sin(-\angle 1-\angle 2)$

$=-\sin(\angle 1+\angle 2)$



由正弦定理可以得知

$\because \dfrac{\overline{C_1A_1}}{\sin(\angle 1+\angle 2)}=2a$

$\therefore \overline{C_1A_1}=2a\sin(\angle 1+\angle 2)$

同理$\overline{A_1B_1}=2b\sin(\angle 3+\angle 4)$

$\overline{B_1C_1}=2c\sin(\angle 5+\angle 6)$

(2)$\overline{A_1P}=-2a\sin\angle 2=-2b\sin\angle 3,\overline{B_1P}=2b\sin\angle 4=2c\sin\angle 5$

$\overline{C_1P}=2c\sin\angle 6=2a\sin\angle 1$

(3)經運算可得各層邊長：

第 m 層	m=0	m=1	m=2	m=3
$\overline{A_mB_m}$	$a\cos\angle 2+b\cos\angle 3$	$2b\sin(\angle 3+\angle 4)$	$4c\sin(\angle 3+\angle 6)\sin\angle 5$	$-8a\sin(\angle 3+\angle 2)\sin\angle 5\sin\angle 1$
$\overline{B_mC_m}$	$b\cos\angle 4+c\cos\angle 5$	$2c\sin(\angle 5+\angle 6)$	$4a\sin(\angle 5+\angle 2)\sin\angle 1$	$-8b\sin(\angle 5+\angle 4)\sin\angle 1\sin\angle 3$
$\overline{C_mA_m}$	$c\cos\angle 6+a\cos\angle 1$	$2a\sin(\angle 1+\angle 2)$	$-4b\sin(\angle 1+\angle 4)\sin\angle 3$	$-8c\sin(\angle 1+\angle 6)\sin\angle 3\sin\angle 5$
令$x_3=\sin\angle 1\sin\angle 3\sin\angle 5=\sin\angle 2\sin\angle 4\sin\angle 6$				

$\dfrac{\overline{A_3B_3}}{\overline{A_0B_0}}=\dfrac{-8a\sin(\angle 3+\angle 2)\sin\angle 5\sin\angle 1}{a\cos\angle 2+b\cos\angle 3}=\dfrac{-8a(\sin\angle 3\cos\angle 2+\cos\angle 3\sin\angle 2)\sin\angle 5\sin\angle 1}{a\cos\angle 2+b\cos\angle 3}$

$=\dfrac{-8a\sin\angle 3\cos\angle 2\sin\angle 5\sin\angle 1-8a\cos\angle 3\sin\angle 2\sin\angle 5\sin\angle 1}{a\cos\angle 2+b\cos\angle 3}$

$\Rightarrow$將$\overline{A_1P}=-2a\sin\angle 2=-2b\sin\angle 3$代入

$$\frac{-8ax_3\cos\angle 2-8bx_3\cos\angle 3}{a\cos\angle 2+b\cos\angle 3}=\frac{-8x_3(a\cos\angle 2+b\cos\angle 3)}{a\cos\angle 2+b\cos\angle 3}=-8x_3$$

同理$\frac{\overline{B_3C_3}}{B_0C_0}=-\,8x_3$，$\frac{\overline{C_3A_3}}{C_0A_0}=-\,8x_3$

故$\Delta\, A_0B_0C_0$與第三層圖形$\Delta\, A_3B_3C_3$之對應邊長成比例。

三、重複疊作頂圓四邊形性質探討

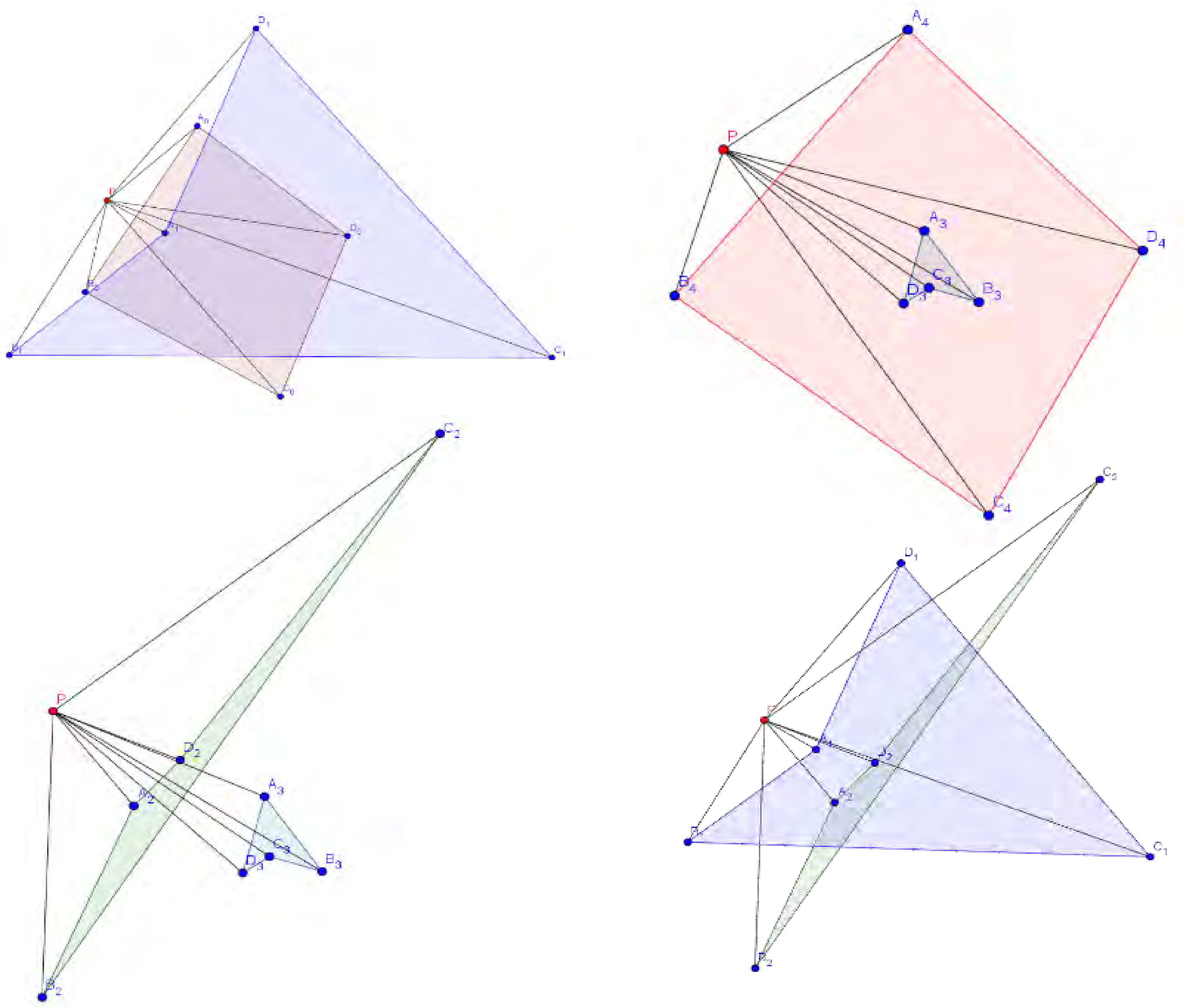
(一)定義：重複疊作頂圓四邊形

1. 作一任意四邊形及任意點 P，分別以各頂點為圓心，點角線為半徑畫圓，將相鄰的兩圓之交點連線，即為原圖形之頂圓四邊形。

2. 重複步驟 1 即為重複疊作頂圓四邊形。

(二)重複疊作頂圓四邊形性質

$\boxed{\text{性質一}}$：重複疊作四邊形第m層圖形~第$(m+4)$層圖形



1. 重複疊作四邊形第m層圖形與第$(m+4)$層圖形對應角角度相等

證明：同頂圓三角形角度證明

經推導可得頂圓四邊形角度規律如下表：

第 m 層	內角$\angle A_n$	內角$\angle B_n$	內角$\angle C_n$	內角$\angle D_n$
第 m+0 層	$\angle A_0=\angle 1+\angle 2$	$\angle B_0=\angle 3+\angle 4$	$\angle C_0=\angle 5+\angle 6$	$\angle D_0=\angle 7+\angle 8$
第 m+1 層	$\angle A_1=\angle 1+\angle 4$	$\angle B_1=\angle 3+\angle 6$	$\angle C_1=(\angle 5-180^\circ)+(\angle 8-180^\circ)$ 之同界角	$\angle D_1=\angle 7+\angle 2$
第 m+2 層	$\angle A_2=\angle 1+\angle 6$	$\angle B_2=(\angle 3-180^\circ)+(\angle 8-180^\circ)$ 之同界角	$\angle C_2=(\angle 5-180^\circ)+(\angle 2-180^\circ)$ 之同界角	$\angle D_2=\angle 7+\angle 4$
第 m+3 層	$\angle A_3=\angle 1+\angle 8$	$\angle B_3=(\angle 3-180^\circ)+(\angle 2-180^\circ)$ 之同界角	$\angle C_3=(\angle 5-180^\circ)+(\angle 4-180^\circ)$ 之同界角	$\angle D_3=(\angle 7+180^\circ)+(\angle 6+180^\circ)$ 之同界角
第 m+4 層	$\angle A_4=\angle 1+\angle 2$	$\angle B_4=\angle 3+\angle 4$	$\angle C_4=\angle 5+\angle 6$	$\angle D_4=\angle 7+\angle 8$

2. 證明第 m 層與第層 m+4 頂圓四邊形對應邊長成比例

設$\overline{A_0P}=a, \overline{B_0P}=b, \overline{C_0P}=c, \overline{D_0P}=d, \angle D_0A_0P=\angle 1, \angle PA_0B_0=\angle 2$

$\angle A_0B_0P=\angle 3, \angle PB_0C_0=\angle 4, \angle B_0C_0P=\angle 5, \angle PC_0D_0=\angle 6, \angle C_0D_0P=\angle 7, \angle PD_0A_0=\angle 8$

$\because \angle A_1PA_0=90^\circ-(\angle 2-180^\circ),$

$\angle D_1PA_0=90^\circ-(360^\circ-\angle 1)$

$\therefore \angle D_1PA_1=\angle D_1PA_0-\angle A_1PA_0$

$=90^\circ-(360^\circ-\angle 1)-90^\circ+(\angle 2-180^\circ)$

$=\angle 1+\angle 2-540^\circ$

$\Rightarrow$ (取同界角) $\Rightarrow -(180^\circ-\angle 1-\angle 2),$

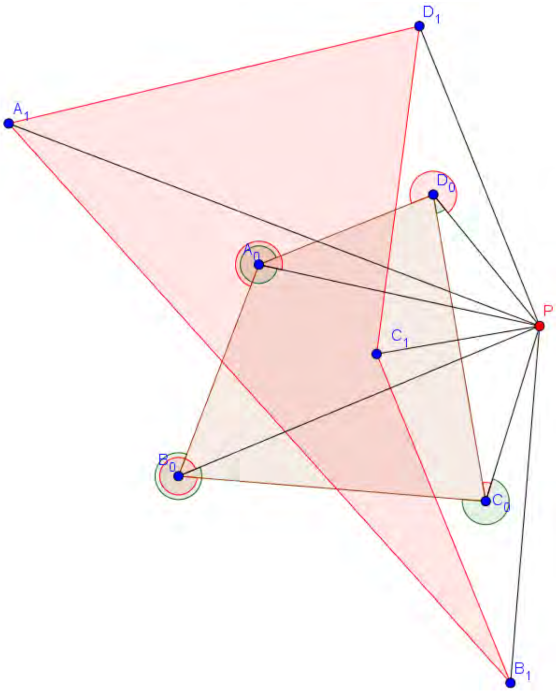
$\sin\angle D_1PA_1=-\sin(\angle 1+\angle 2)$，

$\dfrac{\overline{A_1D_1}}{-\sin(\angle 1+\angle 2)}=2a, \overline{D_1A_1}=-2a\ \sin(\angle 1+\angle 2)$

同理$\overline{A_1B_1}=-2b\ \sin(\angle 3+\angle 4)$

$\overline{B_1C_1}=-2c\ \sin(\angle 5+\angle 6)$

$\overline{C_1D_1}=-2d\ \sin(\angle 7+\angle 8)$



四邊形$A_1B_1C_1D_1$各頂點到任意點 P 的距離：

$\overline{A_1\mathrm{P}} = -2\mathrm{a}\ \ \sin\angle 2 = -2\mathrm{b}\ \ \sin\angle 3, \overline{B_1 P} = -2\mathrm{b}\ \ \sin\angle 4 = -2c\ \ \sin\angle 5$

$\overline{C_1 P} = -2\mathrm{c}\ \ \sin\angle 6 = -2d\ \ \sin\angle 7, \overline{D_1 P} = -2\mathrm{d}\ \ \sin\angle 8 = -2a\ \ \sin\angle 1$

經運算可得各層邊長：

邊長	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	…
$\mathrm{A}_m\mathrm{B}_m$	$b\ \ cos\angle 3 + a\ \ cos\angle 2$	$-2\mathrm{b}\ \ \sin(\angle 3 + \angle 4)$	$4\mathrm{c}\ \ \sin(\angle 3 + \angle 6)\sin\angle 5$	$8\mathrm{d}\sin(\angle 3 + \angle 8)\sin\angle 5\sin\angle 7$	$-16\mathrm{a}\sin(\angle 3 + \angle 2)\sin\angle 5\sin\angle 7\sin\angle 1$	…
$\mathrm{B}_m\mathrm{C}_m$	$\mathrm{c}\ \ \cos\angle 5 + b\ \ \cos\angle 4$	$-2\mathrm{c}\ \ \sin(\angle 5 + \angle 6)$	$4\mathrm{d}\ \ \sin(\angle 5 + \angle 8)\ \ \sin\angle 7$	$-8\mathrm{a}\sin(\angle 5 + \angle 2)\sin\angle 7\sin\angle 1$	$-16\mathrm{b}\sin(\angle 5 + \angle 4)\sin\angle 7\sin\angle 1\sin\angle 3$	…
$\mathrm{C}_m\mathrm{D}_m$	$\mathrm{d}\ \ \cos\angle 7 + c\ \ \cos\angle 6$	$-2\mathrm{d}\ \ \sin(\angle 7 + \angle 8)$	$4\mathrm{a}\ \ \sin(\angle 7 + \angle 2)\ \ \sin\angle 1$	$8\mathrm{b}\sin(\angle 7 + \angle 4)\sin\angle 1\sin\angle 3$	$-16\mathrm{c}\sin(\angle 7 + \angle 6)\sin\angle 1\sin\angle 3\sin\angle 5$	…
$\mathrm{D}_m\mathrm{A}_m$	$\mathrm{a}\ \ \cos\angle 1 + d\ \ \cos\angle 8$	$-2\mathrm{a}\ \ \sin(\angle 1 + \angle 2)$	$4\mathrm{b}\ \ \sin(\angle 1 + \angle 4)\ \ \sin\angle 3$	$-8\mathrm{c}\sin(\angle 1 + \angle 6)\sin\angle 3\sin\angle 5$	$-16\mathrm{d}\sin(\angle 1 + \angle 8)\sin\angle 3\sin\angle 5\sin\angle 7$	…
令$x_4 = \sin\angle 1\sin\angle 3\sin\angle 5\sin\angle 7 = \sin\angle 2\sin\angle 4\sin\angle 6\sin\angle 8$						

$$\frac{\overline{A_4B_4}}{\overline{A_0B_0}} = \frac{-16\mathrm{a}\sin(\angle 3+\angle 2)\sin\angle 5\sin\angle 7\sin\angle 1}{\mathrm{b}\ \ \cos\angle 3 + a\ \ \cos\angle 2} = \frac{-16\mathrm{a}\ (\sin\angle 3\cos\angle 2+\cos\angle 3\sin\angle 2)\sin\angle 5\sin\angle 7\sin\angle 1}{\mathrm{b}\ \ \cos\angle 3 + a\ \ \cos\angle 2}$$

$$= \frac{-16\mathrm{a}\sin\angle 3\cos\angle 2\sin\angle 5\sin\angle 7\sin\angle 1 - 16\mathrm{a}\cos\angle 3\sin\angle 2\sin\angle 5\sin\angle 7\sin\angle 1}{\mathrm{b}\ \ \cos\angle 3 + a\ \ \cos\angle 2}$$

$\Rightarrow$ 將$\overline{A_1\mathrm{P}} = -2\mathrm{a}\sin\angle 2 = -2\mathrm{b}\sin\angle 3$代入

$$\frac{-16a\sin\angle 3\cos\angle 2\sin\angle 5\sin\angle 7\sin\angle 1 - 16bx_4\cos\angle 3}{\mathrm{b}\cos\angle 3 + a\cos\angle 2} = \frac{-16x_4[a\cos\angle 2 + b\cos\angle 3]}{\mathrm{b}\cos\angle 3 + a\cos\angle 2} = -16x_4$$

同理可得$\frac{\overline{B_4C_4}}{\overline{B_0C_0}} = -16x_4, \frac{\overline{C_4D_4}}{\overline{C_0D_0}} = -16x_4, \frac{\overline{D_4A_4}}{\overline{D_0A_0}} = -16x_4$

故原圖形$A_0B_0C_0D_0$與第四層圖形$A_4B_4C_4D_4$之對應邊長成比例。(得證)

四、 重複頂圓多邊形性質探討

(一)定義：重複疊作頂圓 n 邊形

1. 作一任意 n 邊形及任意點 P，分別以各頂點為圓心，點角線為半徑畫圓，將相鄰的兩圓之交點連線，即為原圖形之頂圓三角形，也為第一層圖形。
2. 重複步驟 1 即為重複疊作頂圓多邊形。

(二)重複疊作頂圓 n 邊形性質

角度：以 n 邊形第 m 層圖形~第(m+n)層圖形邊線角成規律

(第 m 層圖形與第(m+n)層圖形內角相等)

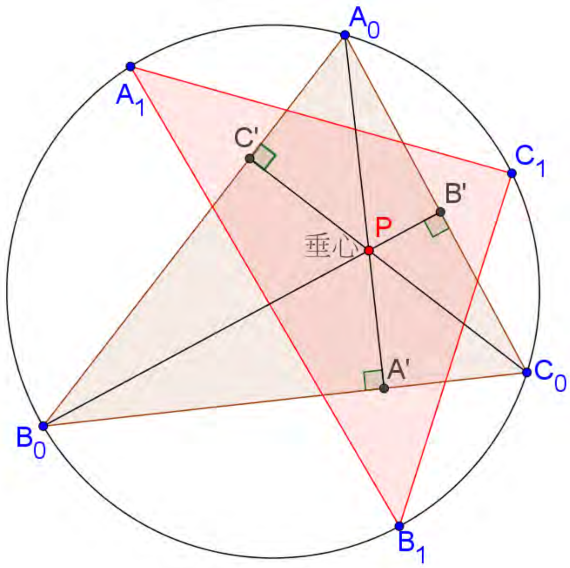
邊長：第 m 層與第 m+n 層頂圓 n 邊形邊長成比例$\left(\frac{P_{m+n}Q_{m+n}}{P_mQ_m}=-2^n x_n\right)$

所以第 m 層與第 m+n 層頂圓 n 邊形相似

伍、 研究分析與討論

一、重複疊作頂圓三角形的其他性質

$\boxed{\text{性質一}}$：當任意點為垂心時，原圖形與第一層圖形外接圓共圓。



已知：$\triangle A_0B_0C_0$為原圖形，

$\triangle A_1B_1C_1$為第一層圖形

求證：$\triangle A_0B_0C_0$與$\triangle A_1B_1C_1$外心共點

證明：$\because \angle B_0C'P+\angle PA'B_0=180°$

$\therefore \angle A'B_0C'+C'PA'=180°$

$\because \angle C'PA'=\angle C_0PA_0=\angle A_0C_1C_0$

$\therefore \angle A'B_0C'+\angle A_0C_1C_0=180°$

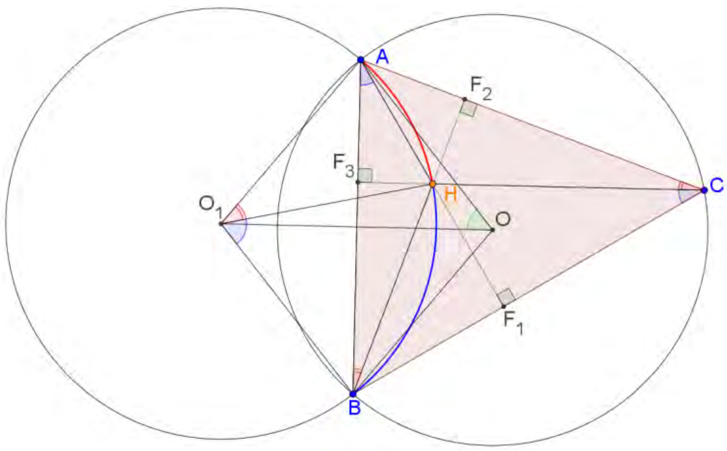
$\Rightarrow$ 四邊形$A_0B_0C_0C_1$為一圓內接四邊形

同理四邊形$A_0B_0C_0A_1$、四邊形$A_0B_0C_0B_1$皆為圓內接四邊形

$\Rightarrow A_0$、B_0、C_0、A_1、B_1、C_1六點共圓

$\Rightarrow$原圖形與第一層圖形外接圓共圓(得證)

$\boxed{\text{性質二}}$：連接各頂點至垂心，可將$\triangle$ ABC分割為三個小三角形，這三個小三角形的外接圓與原圖形外接圓必為等圓



已知：H 為$\triangle$ ABC之垂心、

圓O為$\triangle$ ABC之外接圓、

圓O_1為$\triangle$ ABH之外接圓

求證： 圓O與圓O_1為等圓

證明： 令$\angle \mathrm{AC}F_3 = \angle \mathrm{a}, \angle F_3 C\mathrm{B} = \angle \mathrm{b}$

$\because \angle \mathrm{CH}F_2 = \angle F_3 HB, \angle HF_2 C = \angle \mathrm{B}F_3 H$

$\therefore \angle \mathrm{HB}F_3 = \angle F_2 CH = \angle \mathrm{a}$，同理$\angle F_3 AH = \angle HCF_1 = \angle \mathrm{b}$

$\angle HO_1 A = \widehat{AH} = 2\angle HBF_3 = 2\angle a$，同理$\angle \mathrm{B}O_1 H = 2\angle \mathrm{b}$，$\angle BO_1 A = 2(\angle a + \angle b)$

$\because \angle \mathrm{AOB} = \widehat{\mathrm{AB}} = 2\angle \mathrm{ACB}$且$\angle ACB = \angle a + \angle b$，$\therefore \angle AOB = 2(\angle a + \angle b)$

$\because \overline{\mathrm{O_1 A}} = \overline{\mathrm{O_1 B}}$(圓$\mathrm{O_1}$半徑)$,\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}}$(圓 O 半徑)$,\overline{\mathrm{OO_1}} = \overline{\mathrm{OO_1}}$(共用邊),

$\therefore \triangle AOO_1 \cong \triangle BOO_1 \Rightarrow \angle BO_1 O = \angle OO_1 A = \frac{\angle BO_1 A}{2} = \angle a + \angle b$，$\angle AOO_1 =$

$\angle O_1 OB = \frac{\angle AOB}{2} = \angle a + \angle b$

$\because \angle OO_1 A = \angle AOO_1$，$\therefore \triangle \mathrm{AOO_1}$為一等腰三角形

$\Rightarrow \overline{AO} = \overline{AO_1} \Rightarrow$ 圓 O 與圓$\mathrm{O_1}$為等圓

同理圓O與圓O_1、O_2、O_3為等圓(得證)

二、重複疊作頂圓多邊形區域分布

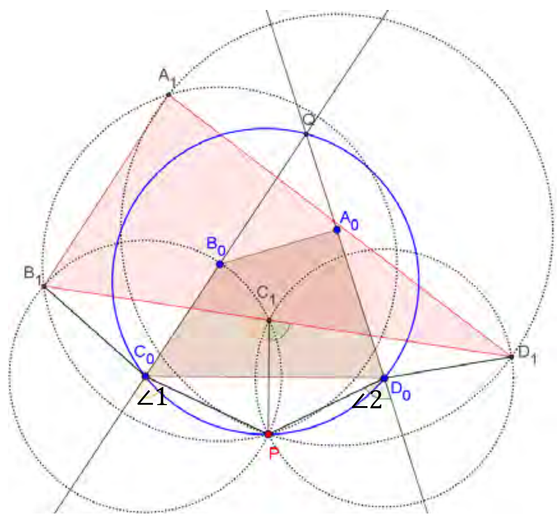
(一)重複疊作頂圓四邊形區域分布性質：

$\boxed{\text{性質一}}$：當任意點位於原圖形邊界圓上時，所畫出的下一層圖形出現降邊

已知： 邊界圓為Q、C_0、D_0三點所作

P 點為邊界圓上的任一點

求證： B_1、C_1、D_1共線



證明： $\because$ Q$C_0 PD_0$為圓內接四邊形

$\therefore \angle \mathrm{P}C_0 B_0$、$\angle A_0 D_0 P$互補

$\because \angle PC_0 B_0 + \angle 1 = 180°$

$\angle A_0 D_0 P + \angle 2 = 180°$

$\therefore \angle \mathrm{P}C_0 B_0 + \angle A_0 D_0 P = \angle 1 + \angle 2$

$\because \angle \mathrm{B_1 C_1 P} = \frac{1}{2}\widehat{B_1 \mathrm{P}} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{B_1 C_0 P} = \angle 1$

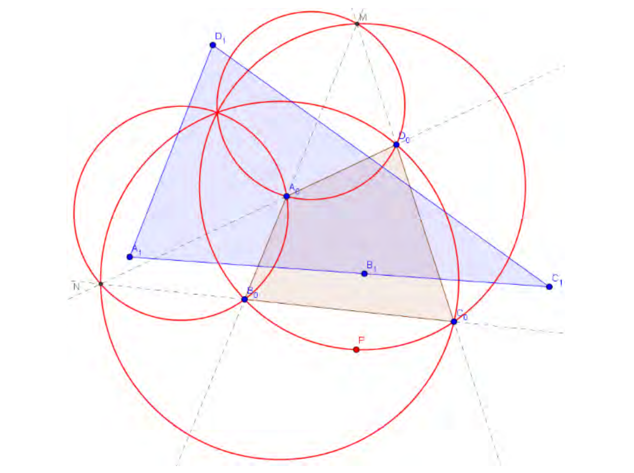
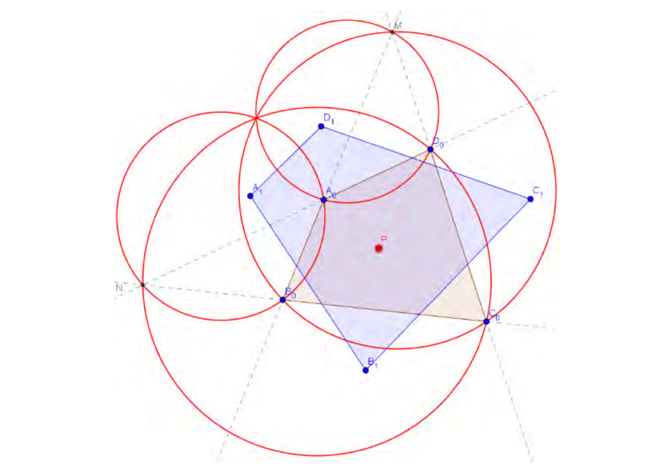
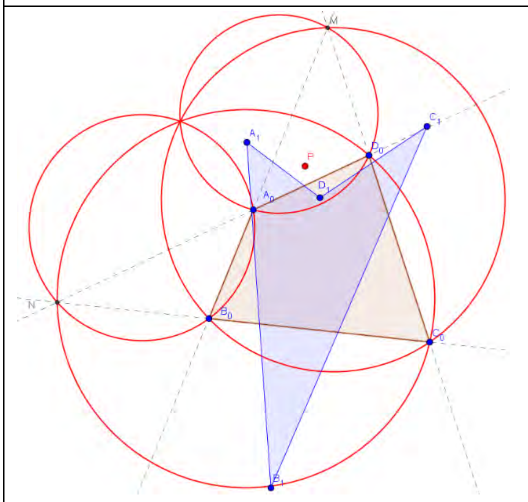
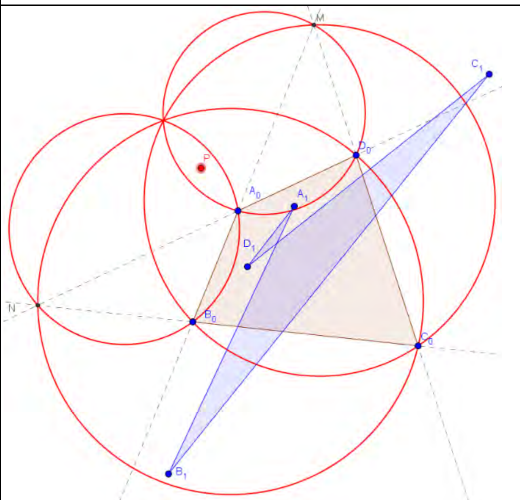
$\angle PC_1 D_1 = \frac{1}{2}\widehat{PD_1} = \frac{1}{2}\angle PD_0 D_1 = \angle 2$

$\because B_0B_1C_0P$為箏形、$A_0PD_0D_1$為飛鏢形

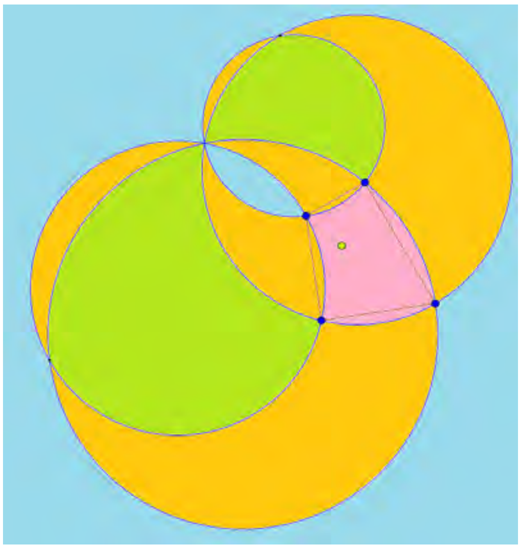
$\therefore \angle B_1C_1P + \angle PC_1D_1 = 180°$

$\Rightarrow B_1$、C_1、D_1三點共線

性質二：當任意點 P 位於四個一階交點圓所形成之不同區域上時，會產生不同疊作圖形，如下表(其中括號內色塊對應性質三各區域)：

P 在圓上：三角形 ( )	P 在原圖形內交疊：凸四邊形 ( )
	
P 在圖形外且圓交疊次數為奇數：凹四邊形	P 在圖形外且圓交疊次數為偶數：交叉四邊形
 ( )	 ( ) ( )
(任意點位於四圓共點第一層圖形為一直線)	

性質三：任意點位於圖中相同顏色區域，會產生相同形狀疊作圖形(對應上表各圖)：



藍色弧線上：三角形

粉紅色區域：凸四邊形

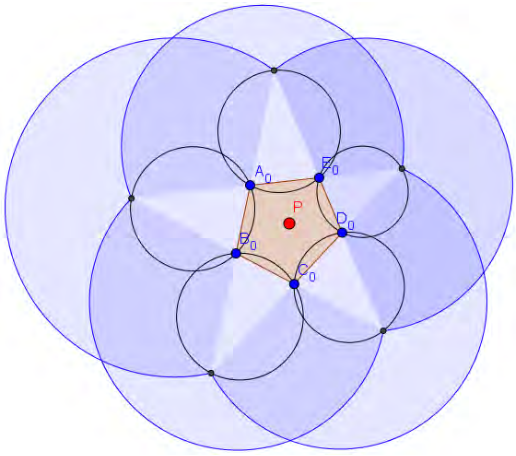
橘色區域：凹四邊形

綠色、藍色區域：外單交叉四邊形

(二) 重複疊作頂圓五邊形區域分布性質：

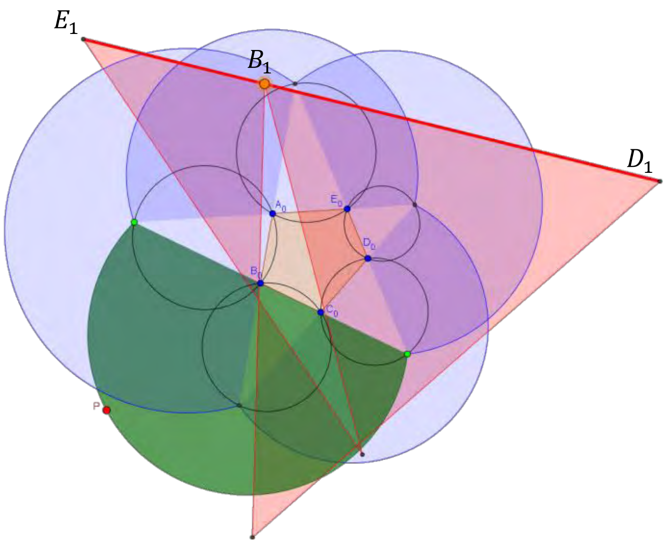
性質一：當任意點位於原圖形邊界圓上時，所畫出的下一層圖形出現降邊

性質二：當任意點位於邊界圓所形成之不同區域上時會產生不同疊作圖形：



1. 邊界圓上：四邊形
2. 兩邊界圓交點上：三角形
3. 圖形內邊界圓外：凸五邊形
4. 重疊一層邊界圓：凹五邊形
5. 圖形外、重疊兩層邊界圓：單交叉五邊形

性質三：當任意點位於一階邊界弓形弧上時，出現點重疊邊：



重疊點：此邊界弓形弦上兩頂點所作之下一層頂點

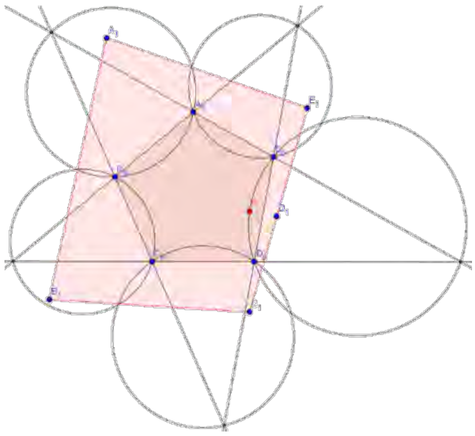
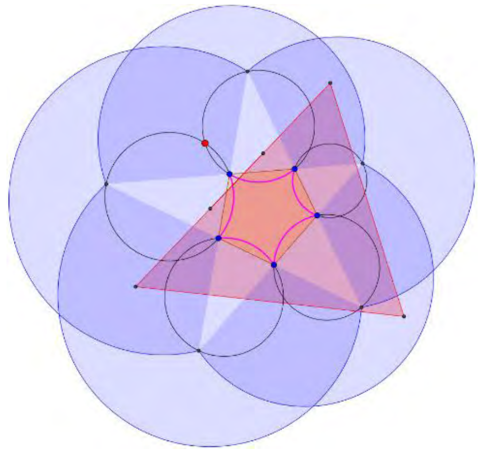
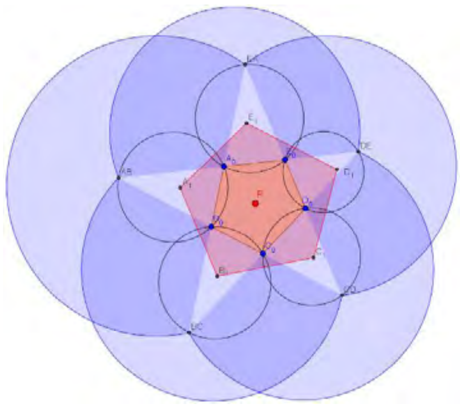
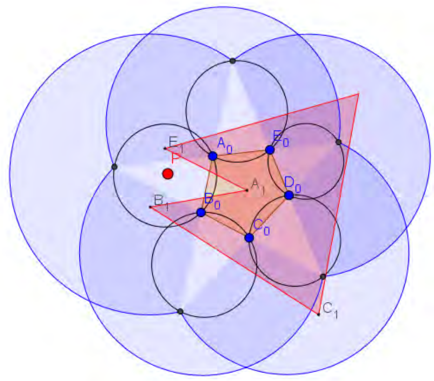
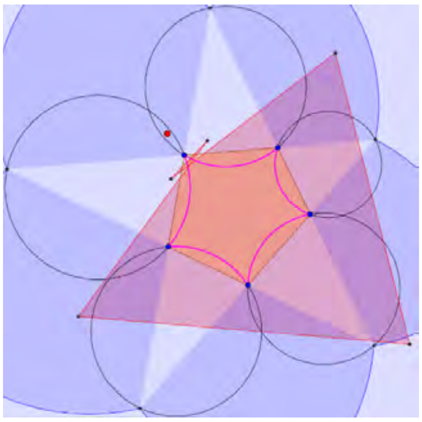
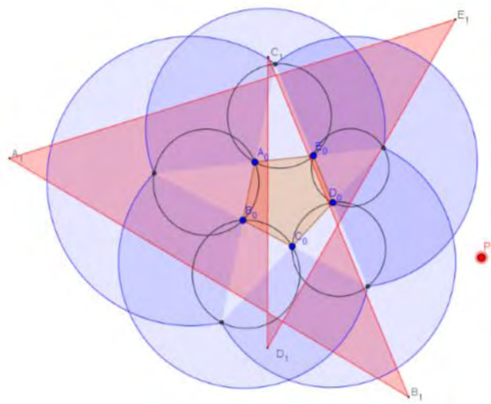
重疊邊：此邊界弓形弦上兩交點延長線所作第三點之兩鄰邊，各作下一層頂點連線

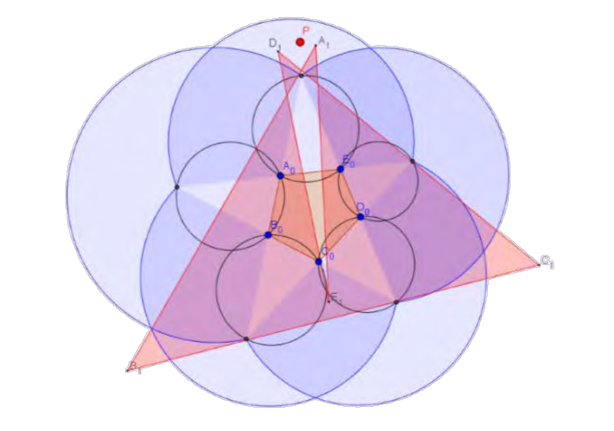
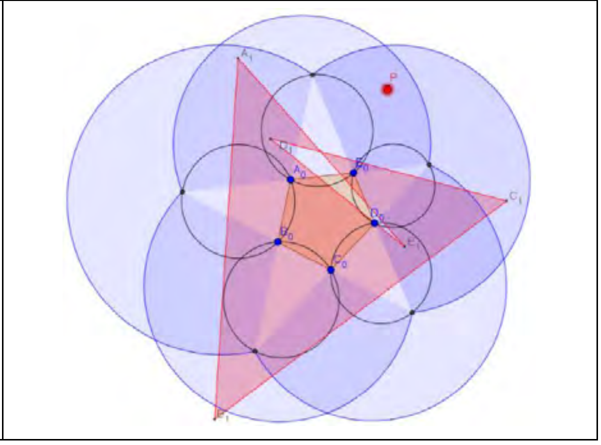
如圖，橘點為重疊點，紅色粗邊為重疊邊

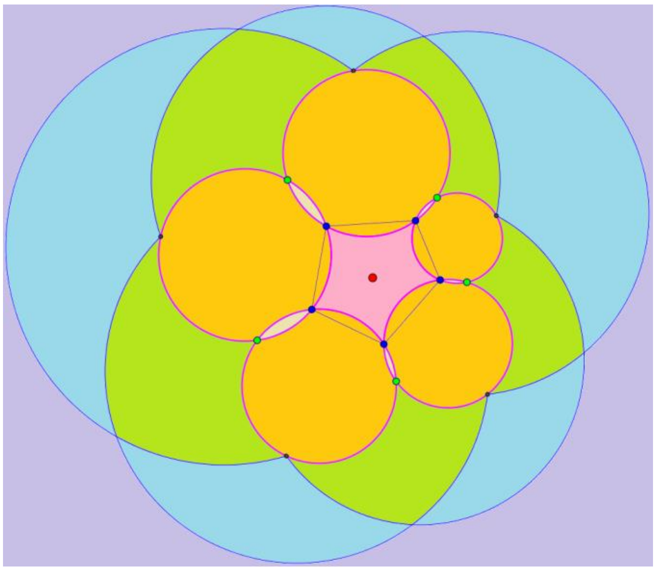
性質四：任意點位於邊界圓外、一階邊界弓形重疊所形成之不同區域，會產生不同疊作圖形：

1. 重疊 0 層(邊界圓外)：零優角五交叉五邊形
2. 重疊 1 層(邊界圓外)：一優角三交叉五邊形
3. 重疊 2 層(邊界圓外)：二優角一交叉五邊形

(表中括號內色塊對應性質五各區域)

邊界圓上( )	兩邊界圓交點上( )
	
圖形內邊界圓外( )	重疊一層邊界圓( )
	
圖形外、重疊兩邊界圓( )	重疊零層一階邊界弓形( )
	

重疊一層一階邊界弓形（ ）	重疊兩層一階邊界弓形（ ）
	



性質五：任意點位於圖中相同顏色區域，會產生相同形狀疊作圖形(對應上表各圖)：

粉紅色弧線上：四邊形

綠色點上：三角形

粉紅色區域：凸五邊形

橘色區域：單凹五邊形

白色區域：外單交叉五邊形

綠色區域：兩優角一交叉五邊形

藍色區域：一優角三交叉五邊形

紫色區域：零優角五交叉五邊形

(三) 重複疊作頂圓六邊形區域分布性質：

性質一：當任意點位於原圖形邊界圓上時，所畫出的下一層圖形出現降邊

性質二：當任意點位於邊界圓所形成之不同區域上時會產生不同疊作圖形：

1. 邊界圓上：五邊形
2. 兩邊界圓交點：四邊形
3. 圖形內邊界圓外：凸六邊形
4. 重疊一層邊界圓：凹六邊形
5. 圖形外、重疊兩層邊界圓：外單交叉六邊形
6. 圖形內、重疊兩層邊界圓：雙凹六邊形

性質三：當任意點位於一階、二階邊界弓形弧上時，出現點重疊邊：

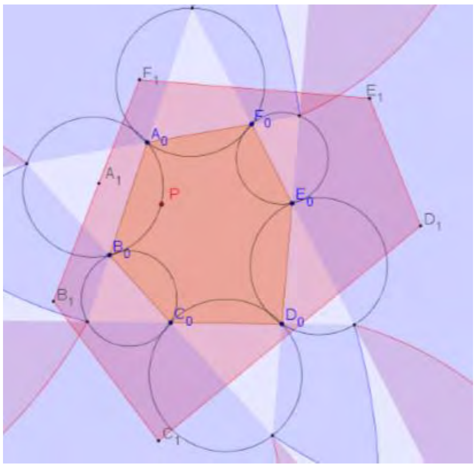
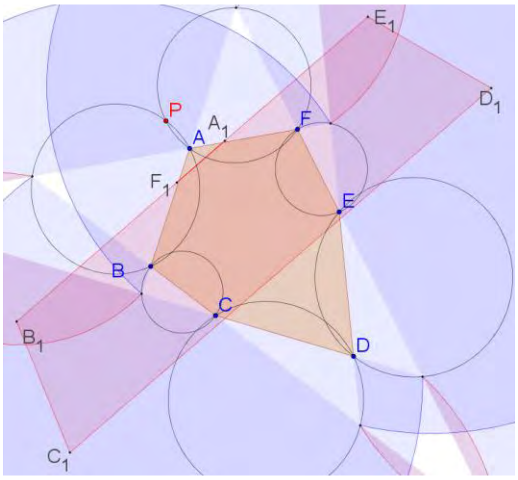
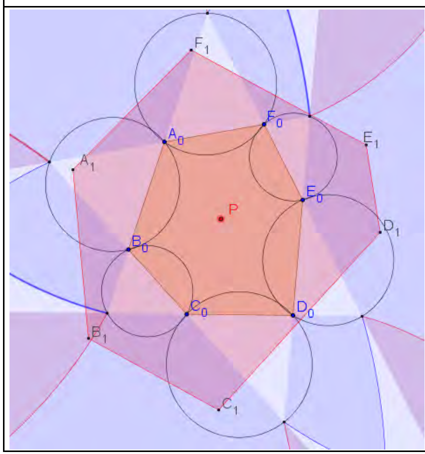
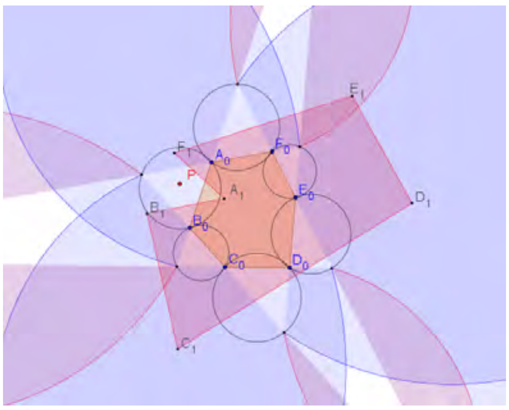
重疊點：此邊界弓形弦上兩頂點所作之下一層頂點

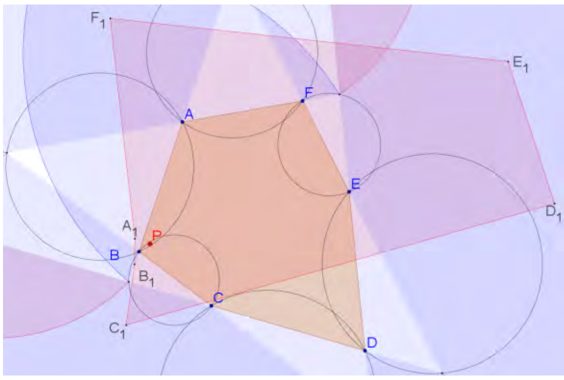
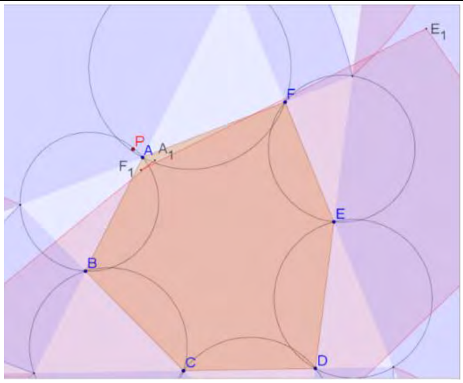
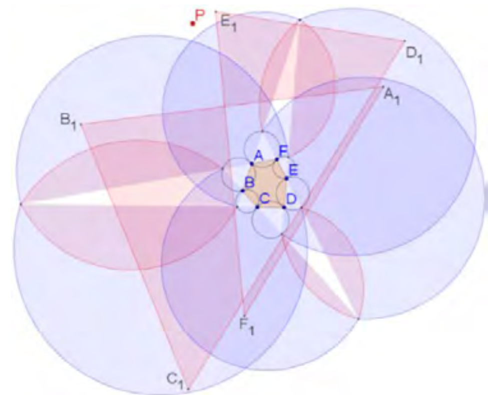
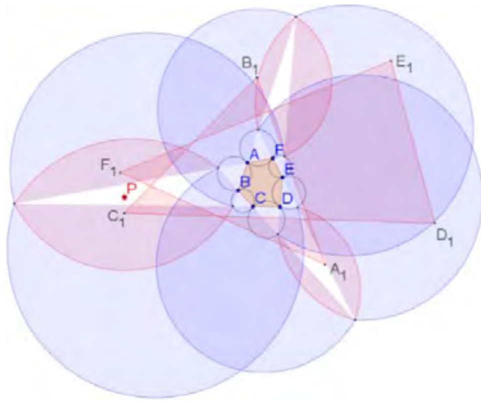
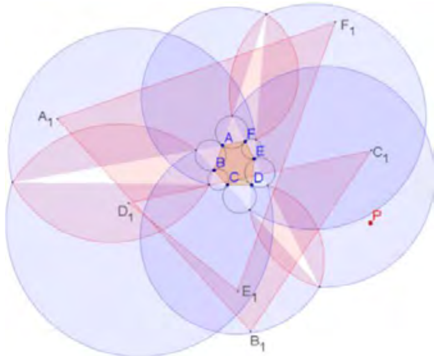
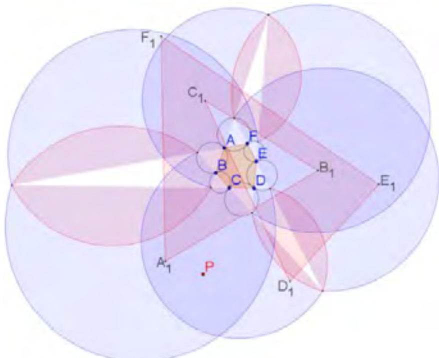
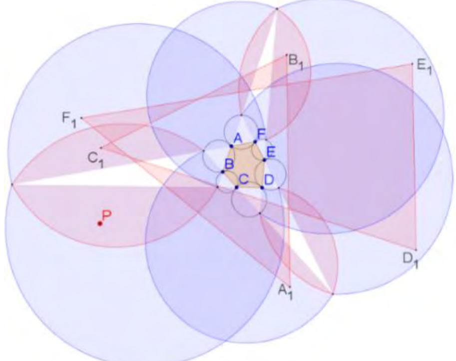
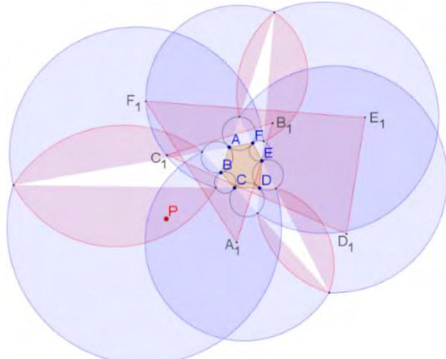
重疊邊：此弓形弦上兩交點延長線所作第三頂點兩鄰邊，各作下一層頂點之連線

性質四：當任意點位於邊界圓外、二階邊界弓形所形成之不同區域上時會產生不同疊作圖形。(二階邊界弓形分為兩種：弦會包含原圖形邊長之藍色弓形區域、弦不會包含原圖形邊長之紅色弓形區域)：

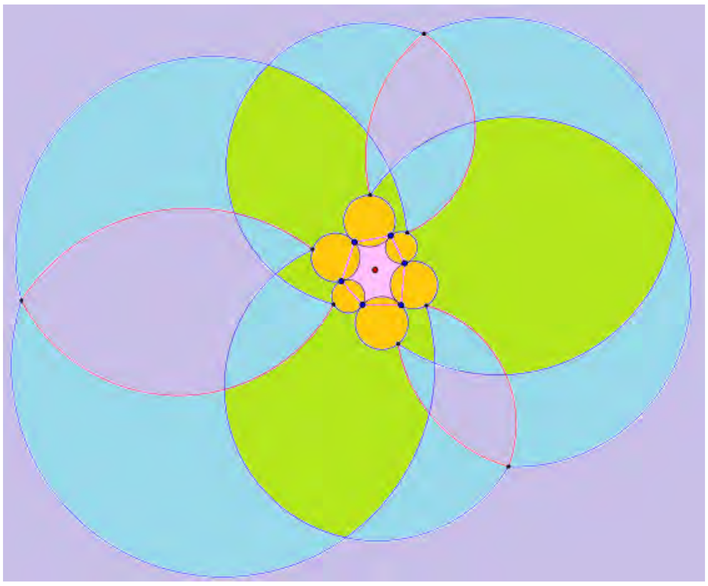
1. 重疊 0 層(任意點在弓形外)：零優角五交叉六邊形
2. 重疊 0 層(任意點在弓形內)：零優角五交叉六邊形
3. 重疊 1 層藍色：一優角三交叉六邊形
4. 重疊 2 層藍色：二優角一交叉六邊形
5. 重疊 1 層藍色、1 層紅色：零優角五交叉六邊形
6. 重疊 2 層藍色、1 層紅色：一優角三交叉六邊形

(表中括號內色塊對應性質五各區域)

邊界圓上()	兩邊界圓交點
	
圖形內邊界圓外 ( )	重疊一層邊界圓 ( )
	

圖形內、重疊兩層邊界圓	圖形外、重疊兩層邊界圓
	
重疊零層二階邊界弓形（弓形外）( )	重疊零層二階邊界弓形（弓形內）( )
	
重疊一層藍色二階弓形（ ）	重疊兩層藍色二階弓形（ ）
	
重疊一層藍色二階弓形、一層紅色弓形	重疊兩層藍色二階弓形、一層紅色弓形
 ( )	 ( )

$\boxed{\text{性質五}}$：



任意點位於圖中相同顏色區域，會產生相同形狀疊作圖形(對應上表各圖)：

深藍色弧線：五邊形

粉紅色區域：凸六邊形

橘色區域：單凹六邊形

綠色區域：兩優角一交叉六邊形

藍色區域：一優角三交叉六邊形

紫色區域：零優角五交叉六邊形

(四) 重複疊作頂圓七邊形區域分布性質：

$\boxed{\text{性質一}}$：當任意點位於原圖形邊界圓上時，所畫出的下一層圖形出現降邊

$\boxed{\text{性質二}}$：當任意點位於邊界圓所形成之不同區域上時會產生不同疊作圖形：

1. 邊界圓上：六邊形
2. 兩邊界圓交點：五邊形
3. 圖形內邊界圓外：凸七邊形
4. 重疊一層邊界圓：凹七邊形
5. 圖形內、重疊兩層邊界圓：單交叉七邊形

$\boxed{\text{性質三}}$：當任意點位於一階、二階邊界弓形弧上時，出現點重疊邊：

重疊點：此邊界弓形弦上兩頂點所作之下一層頂點

重疊邊：此弓形弦上兩交點延長線所作第三頂點兩鄰邊，各作下一層頂點之連線

$\boxed{\text{性質四}}$：當任意點位於邊界圓外、二階邊界弓形所形成之不同區域上時會產生不同疊作圖形。(二階邊界弓形分為兩種：弦會包含原圖形邊長之藍色弓形區域、弦不會包含原圖形邊長之紅色弓形區域)：

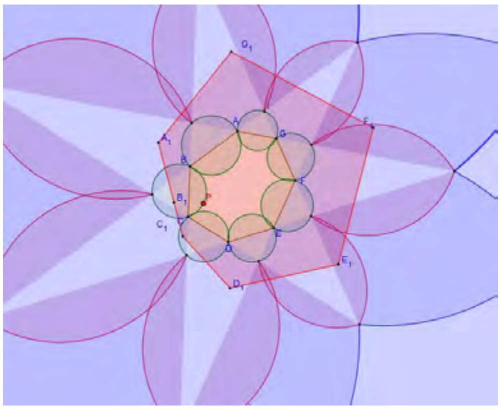
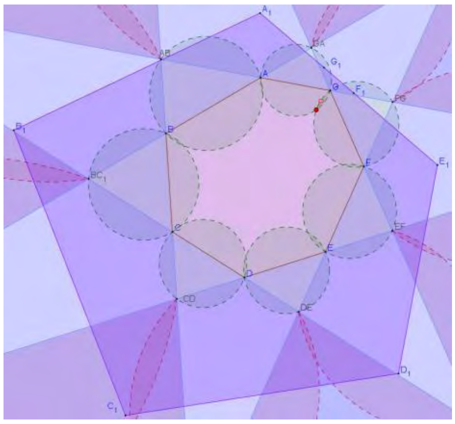
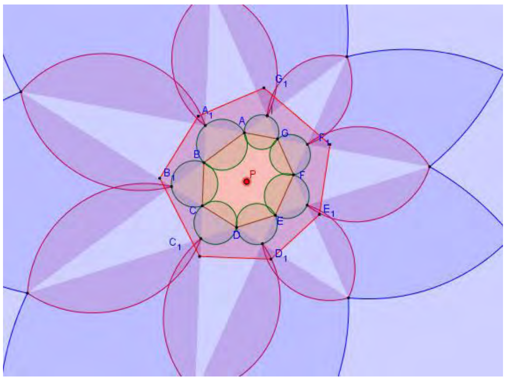
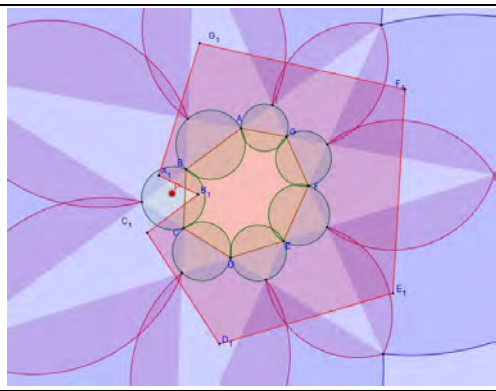
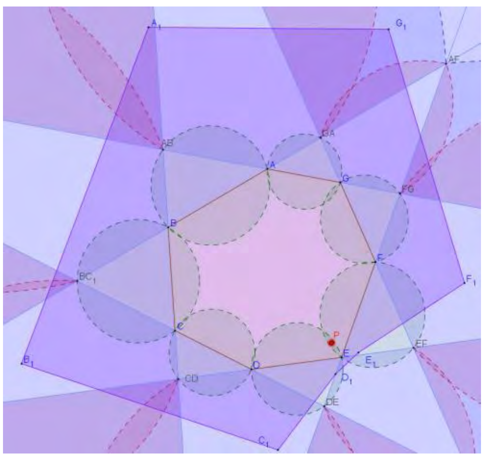
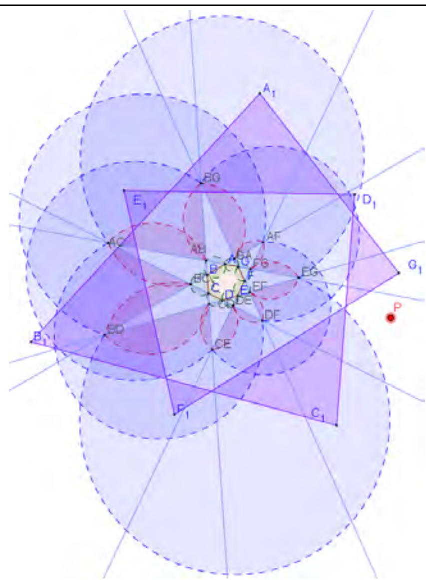
1. 重疊 0 層：零優角七交叉七邊形
2. 重疊 1 層藍色：一優角五交叉七邊形
3. 重疊 2 層藍色：二優角三交叉七邊形

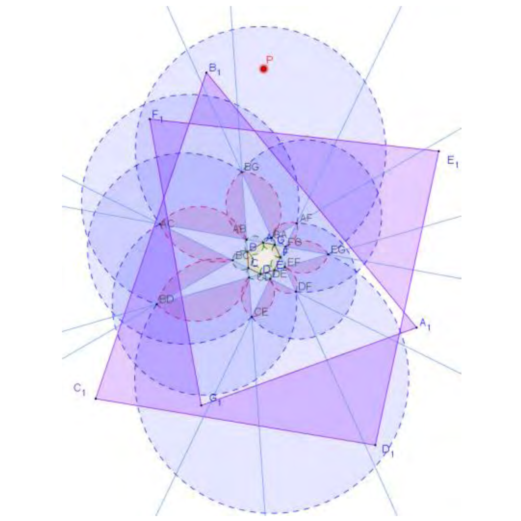
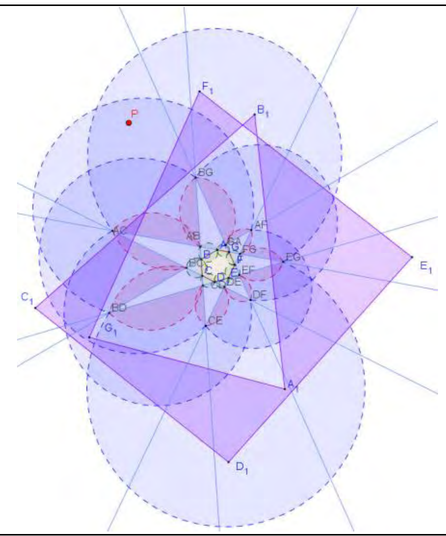
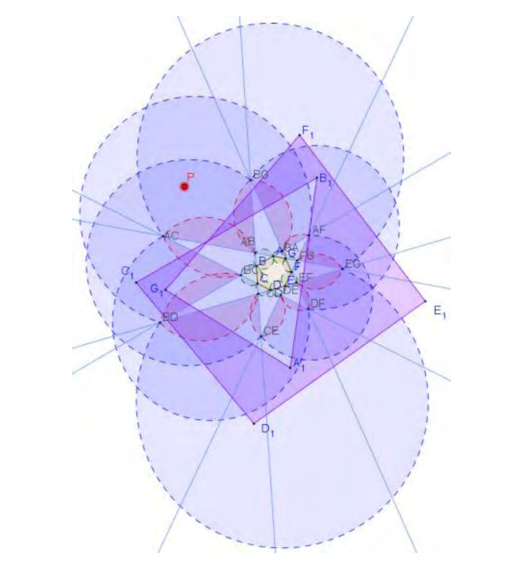
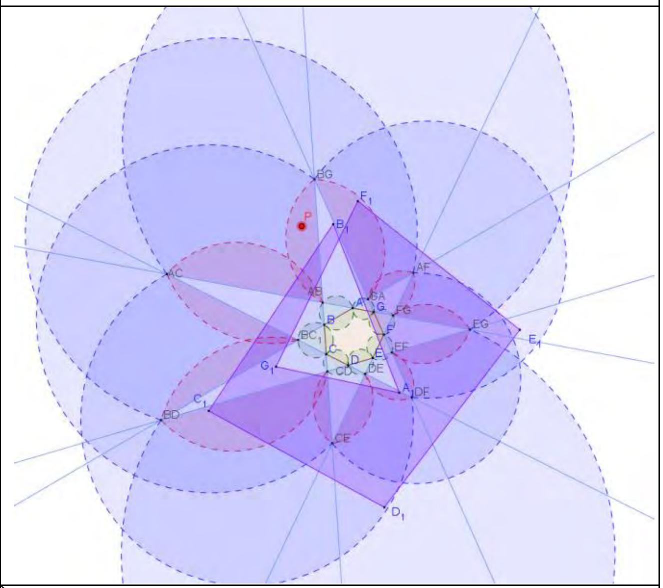
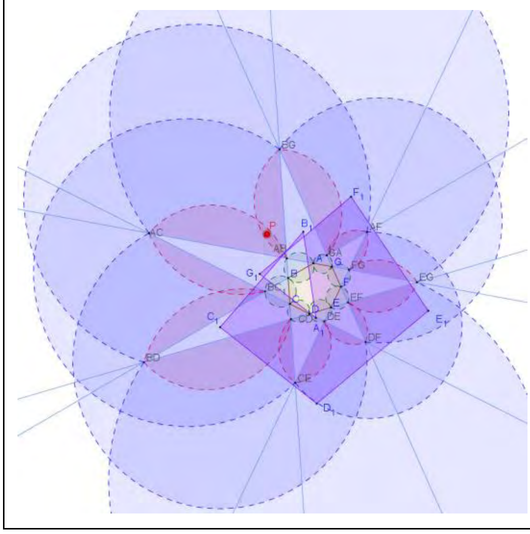
4. 重疊 3 層藍色：三優角一交叉七邊形

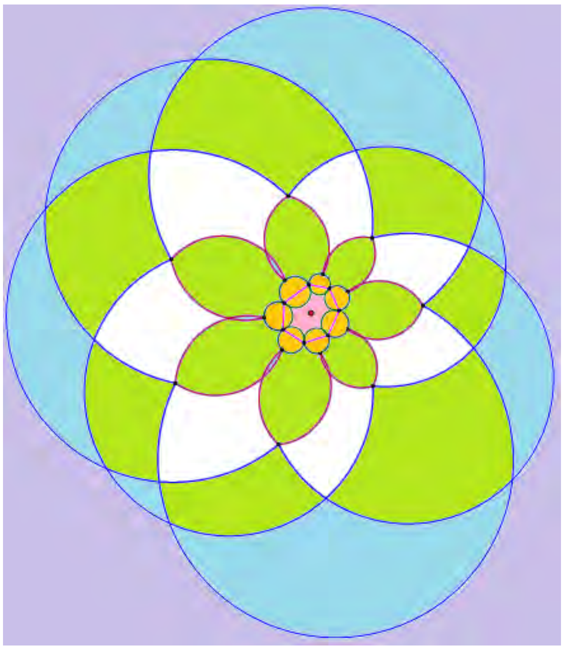
5. 重疊 3 層藍色、1 層紅色：二優角三交叉七邊形

6. 重疊 3 層藍色、2 層紅色：一優角五交叉七邊形

(表中括號內色塊對應性質五各區域)

邊界圓上(━━)	兩邊界圓交點
	
圖形內邊界圓外(　)	重疊一層邊界圓(　)
	
圖形內、重疊兩層邊界圓	重疊 0 層邊界弓形(　)
	

重疊 1 層藍色弓形( )	重疊 2 層藍色弓形( )
	
重疊 3 層藍色弓形( )	重疊 3 層藍色、1 層紅色弓形( )
	
重疊 3 層藍色、2 層紅色弓形( )	
	



性質五：任意點位於圖中相同顏色區域，會產生相同形狀疊作圖形(對應上表各圖)：

綠色弧線：六邊形

粉紅色區域：凸七邊形

橘色區域：單凹七邊形

白色區域：三優角一交叉七優形

綠色區域：兩優角三交叉七邊形

藍色區域：一優角五交叉七邊形

紫色區域：零優角七交叉七邊形

(五) 重複疊作頂圓多邊形之通用性質：

性質一：任意點位於邊界圓上降一邊

性質二：位於兩邊界圓交點上降兩邊

性質三：任意點位於兩頂點 L,M 所作直線上 L,M 所作下一層頂點與任意點共點

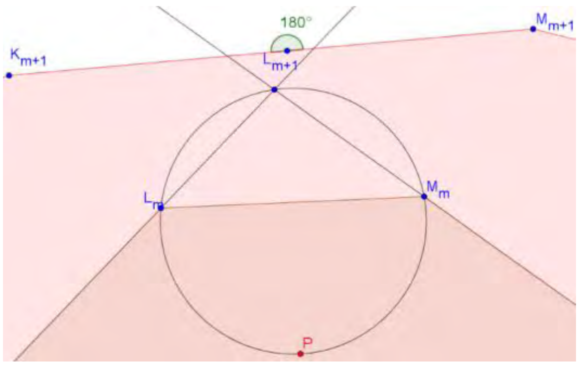
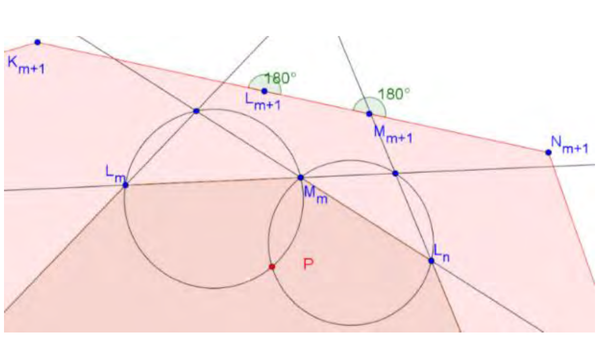
性質四：任意點位於頂點上降兩邊

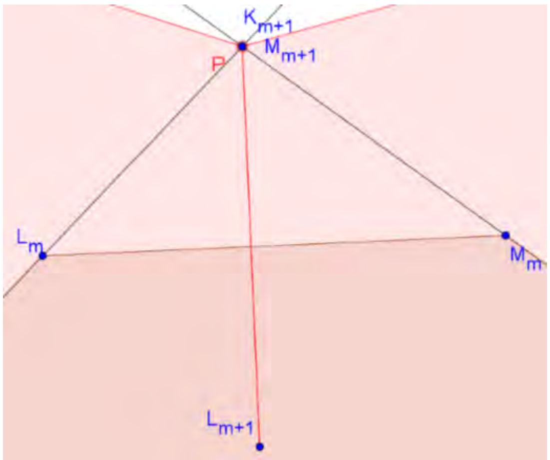
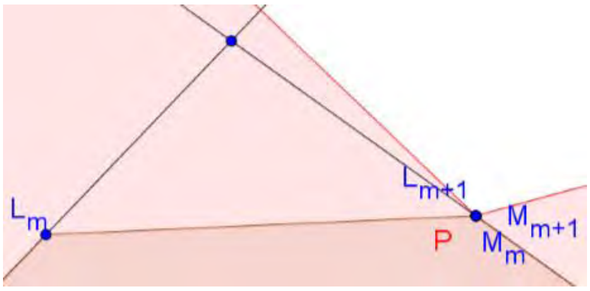
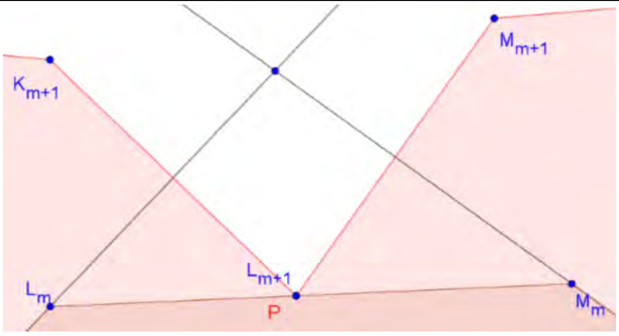
性質五：任意點位於一階交點上降兩邊

性質六：當任意點位於任意邊界弓形弧上時，出現點重疊邊：

重疊點：此邊界弓形弦上兩頂點所作之下一層頂點

重疊邊：此弓形弦上兩交點延長線所作第三頂點兩鄰邊，各作下一層頂點之連線

任意點位於邊界圓上降一邊	位於兩邊界圓交點上降兩邊
	

<table>
<tr><td>任意點位於一階交點上降兩邊</td><td>任意點位於頂點上降兩邊</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>任意點位於兩頂點 L,M 所作直線上 L,M 所作下一層頂點與任意點共點</td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
</table>

(六) 五邊形以上圖形分布規律之探討：

1. 優角規律：

規則：

(1) A ：弦會包含原圖形邊長的藍色弓形區域

(2) B ：弦不會包含原圖形邊長的紅色弓形區域

(3) 優角數：圖形內優角數量

結論：

從此表格可以發現，1 個 A 區域跟 1 個 B 區域可以抵銷，抵銷後的弓形數量會為圖形內優角數量

優角數	五邊形	六邊形	七邊形	八邊形
0A0B	0	0	0	0
1A0B	1	1	1	1
1A1B		0		
2A0B	2	2	2	2
2A1B		1		1
3A0B			3	3
3A1B			2	2
3A2B			1	1

2. 交叉規律：

定義：

(1)設原圖形為 n 邊形，重疊層數為xAyB，交叉數為 k

(2) k_0 為 n 邊形 0A0B 時的交叉數，

則 $k_0 = 2\left[\frac{n+1}{2}\right] - 1$

(3) x_m 為 n 邊形 x 的最大值，

則 $x_m = \left[\frac{n+1}{2}\right] - 1$

已知：$0 \leqq y \leqq 2$、$x \geqq y$

結論：n 邊形重疊xAyB層，

$k = k_0 - 2x + 2\times\left[\frac{y}{2}\right]$

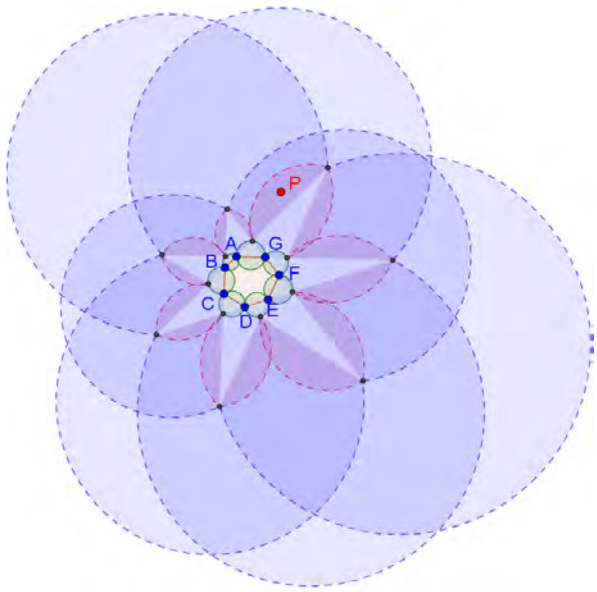
交叉數	五邊形	六邊形	七邊形	八邊形	九邊形
0A0B	5	5	7	7	9
1A0B	3	3	5	5	7
1A1B		3			
2A0B	1	1	3	3	5
2A1B		3	3	3	5
3A2B			3	3	5
3A0B			1	1	3
3A1B			1	1	3
4A2B					3
4A0B					1
4A1B					1

例：

如圖，任意點 P 位於七邊形3A1B區域，

則優角數為 $3 - 1 = 2$，

交叉數為 $2\times\left[\frac{7+1}{2}\right] - 1 - 2\times3 + 2\times\left[\frac{1}{2}\right] = 1$



陸、 結論

一、 重複疊作頂圓 n 邊形第 m 層圖形~第(m+n)層圖形。

二、 任意多邊形所作出的疊作圖形，其形狀區域分布成規律。

三、 由任意點位置之邊界弓形重疊層數推出第一層圖形形狀之規則。

柒、 未來展望

一、 探討重疊點、全等線性質。

二、 探討降邊性質及證明。

捌、 參考資料與其他

中華民國第 54 屆中小學科學展覽　多邊形與其中重、頂重多邊形之性質探討

取自 http：//science.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?cat=&a=0&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=52&sid=12108

【評語】030422

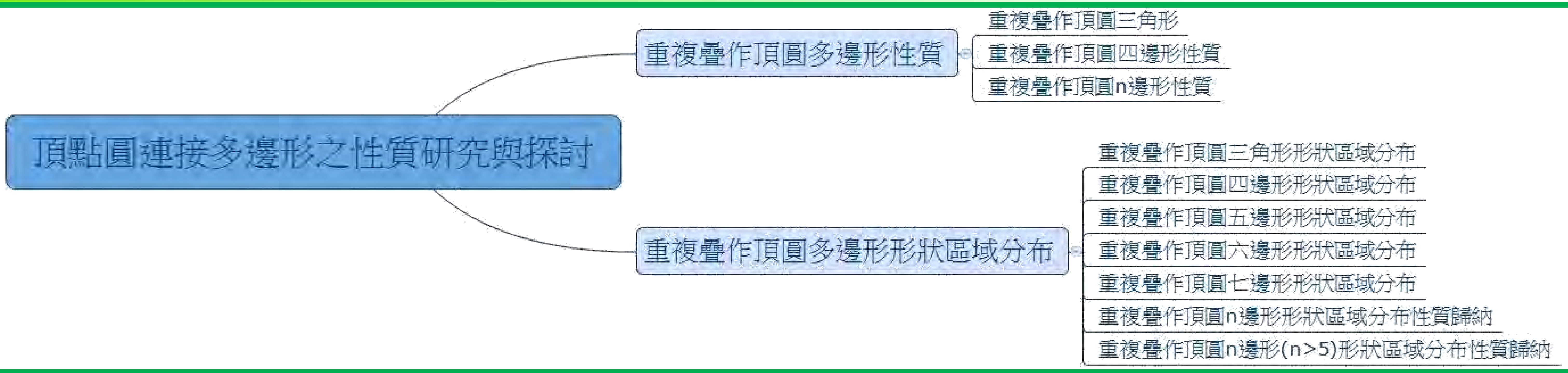
由重覆疊作頂圓三角形出發，依序說明重覆疊作頂圓四、五、六、七邊形的性質，最後敘述疊作頂圓 n 邊形的一些性質，並無詳加證明。作者討論對一多邊形重複進行某相同步驟時所成的形狀及角度分析。處理的手法和思考方式都有數學精神，是值得鼓勵的。然而內容細分成許多主題加以探討，定義太多容易搞混，且許多推論過於快速。所得的圖形並沒有特別優美或令人驚異的性質，導致這個推廣較為缺少數學上的必要性，是不足之處。

作品海報

壹、研究動機

在參考第 54 屆全國科展第一名作品「多邊形與其中重、頂重多邊形之性質探討」後，發現頂重三角形疊做有一些特別的結論，就想：「如果把重心換成任意點呢？」於是我們就展開了這個研究。

貳、研究架構



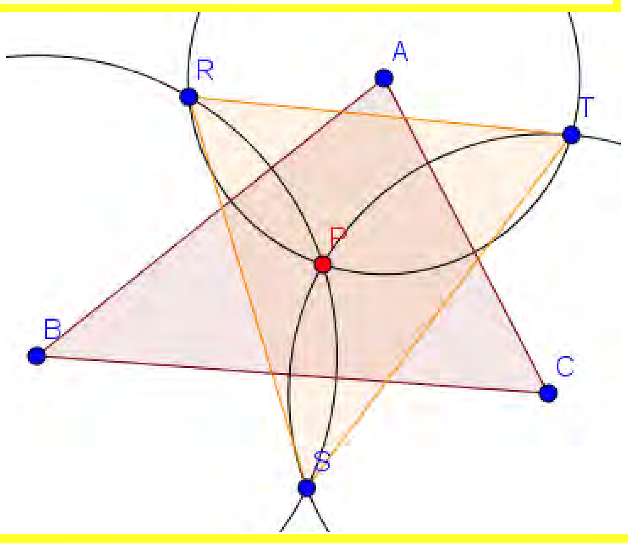
參、研究過程和方法

一、頂圓三角形性質

(一)頂圓三角形

以原三角形的頂點為圓心，頂點到任意點 P 的距離為半徑做三圓，將三圓交點連接線段行成三角形即為頂圓三角形。

如右圖(圓形省略)，原三角形 ABC 之頂圓三角形即為△ RST。

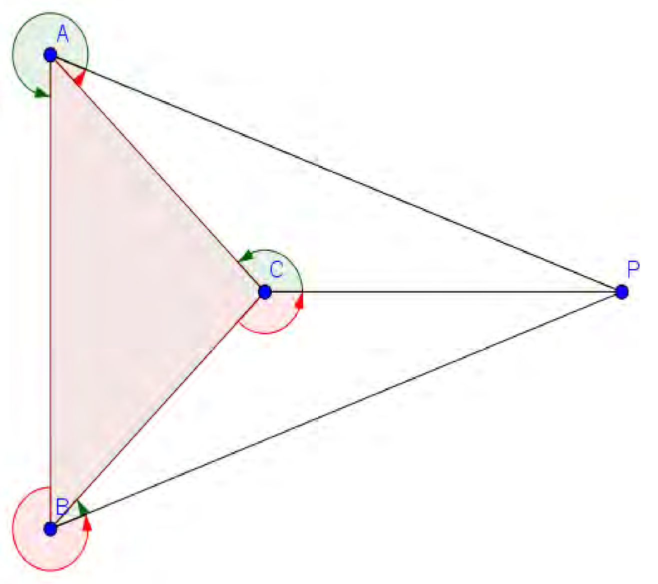


(二)點角線

以任意點至各頂點連線，稱為點角線

(三)邊線角

一任意多邊形的點角線，以邊(三角形各邊)到線(點角線)，或線(點角線)到邊(三角形各邊)逆時針方向旋轉的夾角即為邊線角

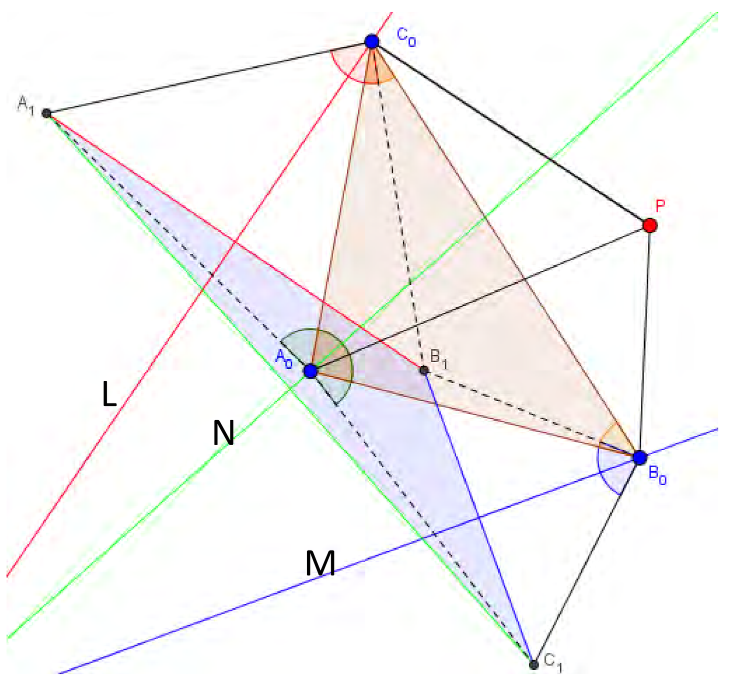


(四)頂圓三角形性質

性質一：第(m+1)層圖形之中垂線過第 m 層圖形頂點

L 為 $\overline{A_1B_1}$ 之中垂線，M 為 $\overline{B_1C_1}$ 之中垂線，N 為 $\overline{C_1A_1}$ 之中垂線

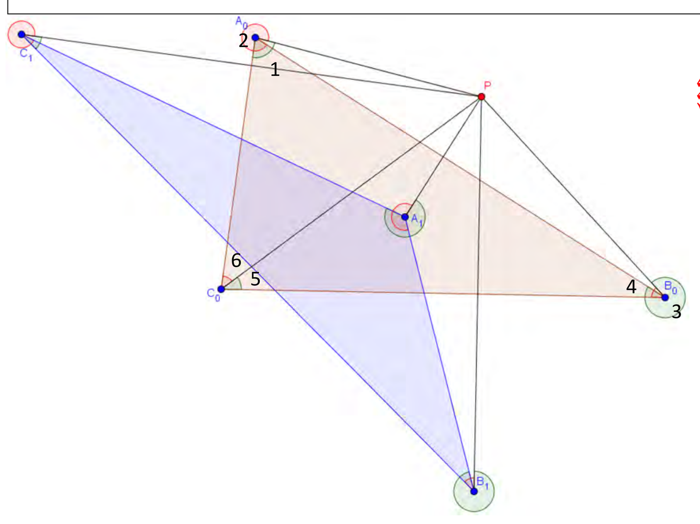
性質二：第(m+1)層圖形任意邊的兩個點與其中垂線所通過的點畫出的角度會為原圖形該頂點內角的兩倍。



性質四：三角形第 m 層與第(m+3)層之邊長成比例

經過運算整理後如下表

第 m 層	m=0	m=1	m=2	m=3
$\overline{A_mB_m}$	a cos∠2 +b cos∠3	2b sin(∠3+∠4)	4c sin(∠3+∠6) sin∠5	-8a sin(∠3+∠2) sin∠5 sin∠1
$\overline{B_mC_m}$	b cos∠4 +c cos∠5	2c sin(∠5+∠6)	4a sin(∠5+∠2) sin∠1	-8b sin(∠5+∠4) sin∠1 sin∠3
$\overline{C_mA_m}$	c cos∠6 +a cos∠1	2a sin(∠1+∠2)	-4b sin(∠1+∠4) sin∠3	-8c sin(∠1+∠6) sin∠3 sin∠5
$x_3 = \sin\angle 1 \sin\angle 3 \sin\angle 5 = \sin\angle 2 \sin\angle 4 \sin\angle 6$				

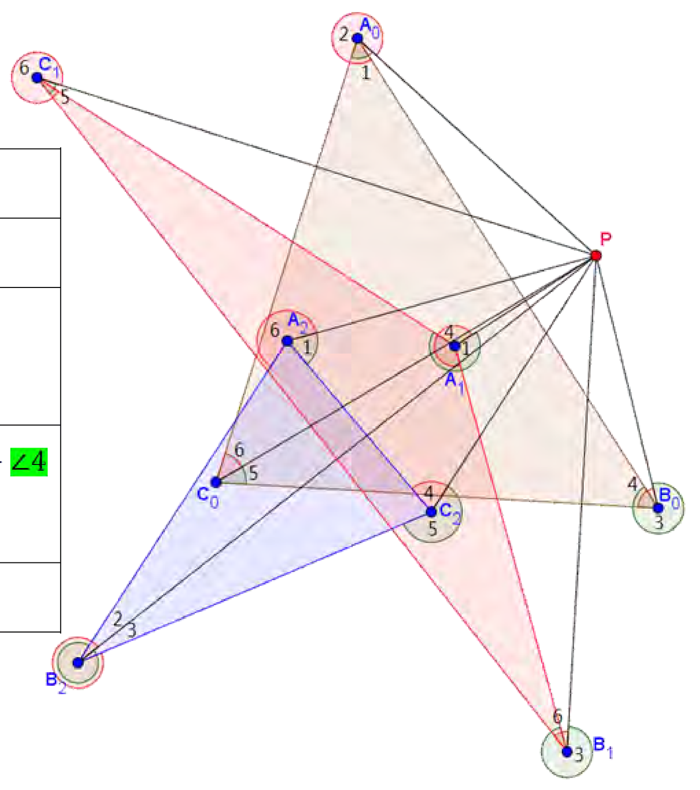


經運算可得 $\frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{A_0B_0}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{B_0C_0}} = \frac{\overline{C_3A_3}}{\overline{C_0A_0}} = -8x_3$

性質三：重複疊作頂圓三角形角度成規律

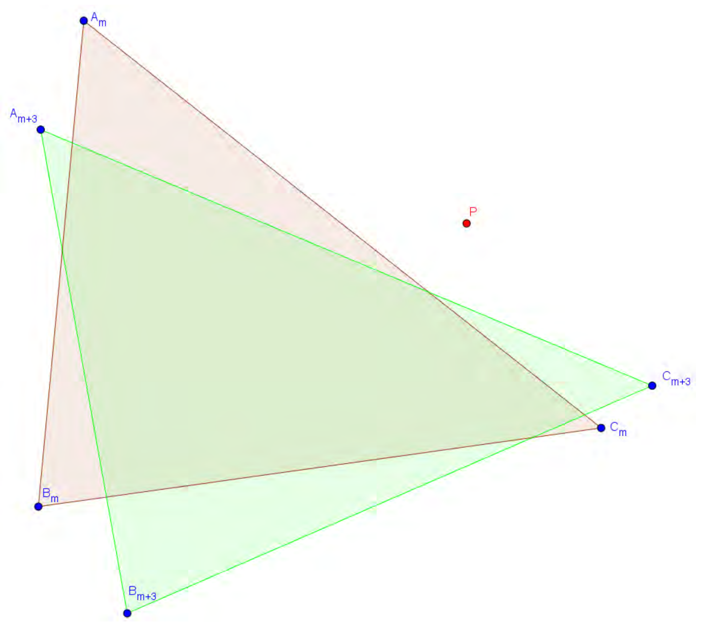
重複疊作頂圓三角形角度規律如下表

第 n 層	內角$\angle A_n$	內角$\angle B_n$	內角$\angle C_n$
第 n+0 層	$\angle A_0 = \angle 1 + \angle 2$	$\angle B_0 = \angle 3 + \angle 4$	$\angle C_0 = \angle 5 + \angle 6$
第 n+1 層	$\angle A_1=(\angle 1+180^\circ)+(\angle 4+180^\circ)$ 之同界角	$\angle B_1 = \angle 3 + \angle 6$	$\angle C_1 = \angle 5 + \angle 2$
第 n+2 層	$\angle A_2 = \angle 1 + (\angle 6 + 180°)$ 之同界角	$\angle B_2 = \angle 3 + \angle 2$	$\angle C_2 = (\angle 5 + 180°) + \angle 4$ 之同界角
第 n+3 層	$\angle A_0 = \angle 1 + \angle 2$	$\angle B_0 = \angle 3 + \angle 4$	$\angle C_0 = \angle 5 + \angle 6$



性質五：第 m 層圖形與第(m+3)層圖形相似

如下圖，$\triangle A_mB_mC_m \sim \triangle A_{m+3}B_{m+3}C_{m+3}$

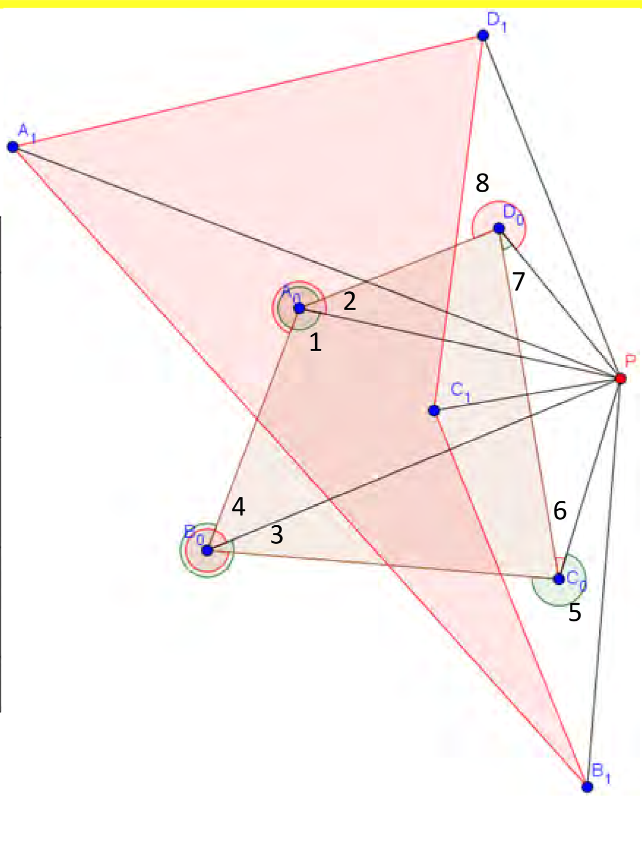


(二)頂圓四邊形性質

性質一：重複疊作頂圓四邊形角度成規律

重複疊作頂圓四邊形角度規律如下表

第 m 層	內角$\angle A_n$	內角$\angle B_n$	內角$\angle C_n$	內角$\angle D_n$
第 m+0 層	$\angle A_0=\angle 1+\angle 2$	$\angle B_0 = \angle 3 + \angle 4$	$\angle C_0 = \angle 5 + \angle 6$	$\angle D_0 = \angle 7 + \angle 8$
第 m+1 層	$\angle A_1=\angle 1+\angle 4$	$\angle B_1 = \angle 3 + \angle 6$	$\angle C_1=(\angle 5-180^\circ)+(\angle 8-180^\circ)$ 之同界角	$\angle D_1 = \angle 7 + \angle 2$
第 m+2 層	$\angle A_2=\angle 1+\angle 6$	$\angle B_2=(\angle 3-180^\circ)+(\angle 8-180^\circ)$ 之同界角	$\angle C_2=(\angle 5-180^\circ)+(\angle 2-180^\circ)$ 之同界角	$\angle D_2 = \angle 7 + \angle 4$
第 m+3 層	$\angle A_3=\angle 1+\angle 8$	$\angle B_3=(\angle 3-180^\circ)+(\angle 2-180^\circ)$ 之同界角	$\angle C_3=(\angle 5-180^\circ)+(\angle 4-180^\circ)$ 之同界角	$\angle D_3=(\angle 7+180^\circ)+(\angle 6+180^\circ)$ 之同界角
第 m+4 層	$\angle A_4=\angle 1+\angle 2$	$\angle B_4 = \angle 3 + \angle 4$	$\angle C_4 = \angle 5 + \angle 6$	$\angle D_4 = \angle 7 + \angle 8$



性質二：重複疊作頂圓四邊形第 m 層與第(m+4)層之邊長成比例

經運算整理邊長推導如下表：

	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	…
A_mB_m	b cos∠3 +a cos∠2	-2b sin(∠3+∠4)	4c sin(∠3+∠6) sin∠5	8d sin(∠3+∠8) sin∠5 sin∠7	-16a sin(∠3+∠2) sin∠5 sin∠7 sin∠1	…
B_mC_m	c cos∠5 +b cos∠4	-2c sin(∠5+∠6)	4d sin(∠5+∠8) sin∠7	-8a sin(∠5+∠2) sin∠7 sin∠1	-16b sin(∠5+∠4) sin∠7 sin∠1 sin∠3	…
C_mD_m	d cos∠7 +c cos∠6	-2d sin(∠7+∠8)	4a sin(∠7+∠2) sin∠1	8b sin(∠7+∠4) sin∠1 sin∠3	-16c sin(∠7+∠6) sin∠1 sin∠3 sin∠5	…
D_mA_m	a cos∠1+d cos∠8	-2a sin(∠1+∠2)	4b sin(∠1+∠4) sin∠3	-8c sin(∠1+∠6) sin∠3 sin∠5	-16d sin(∠1+∠8) sin∠3 sin∠5 sin∠7	…
設$x_4 = \sin\angle 1 \sin\angle 3 \sin\angle 5 \sin\angle 7 = \sin\angle 2 \sin\angle 4 \sin\angle 6 \sin\angle 8$						

經整理可得 : $\frac{\overline{A_4B_4}}{\overline{A_0B_0}} = \frac{\overline{B_4C_4}}{\overline{B_0C_0}} = \frac{\overline{C_4D_4}}{\overline{C_0D_0}} = \frac{\overline{D_4A_4}}{\overline{D_0A_0}} = -16x_4$

性質三：重複疊作頂圓四邊形第 m 層~第(m+4)層圖形

由性質一、性質二可得第 m 層圖形相似於第(m+4)層圖形

(三)重複疊作頂圓多邊形性質探討

1.定義：重複疊作頂圓 n 邊形

(1)作一任意 n 邊形及任意點 P，分別以各頂點為圓心，點角線為半徑畫圓，將相鄰的兩圓之交點連線，即為原圖形之頂圓 n 邊形，也為第一層圖形。

(2)重複步驟 1 即為重複疊作頂圓多邊形。

2.角度：以 n 邊形第 m 層圖形第(m+n)層圖形邊線角成規律

(第 m 層圖形與第(m+n)層圖形內角相等)

3.邊長：第 m 層與第 m+n 層頂圓 n 邊形邊長成比例 $\left(\frac{\overline{P_{m+n}Q_{m+n}}}{\overline{P_mQ_m}} = 2^n x_n\right)$

$x_n = \sin(\angle 1)\sin(\angle 3)...\sin(\angle 2n-1) = \sin(\angle 2)\sin(\angle 4)...\sin(\angle 2n)$

4.根據 2.、3.，所以第 m 層與第 m+n 層頂圓 n 邊形相似

肆、研究分析與討論

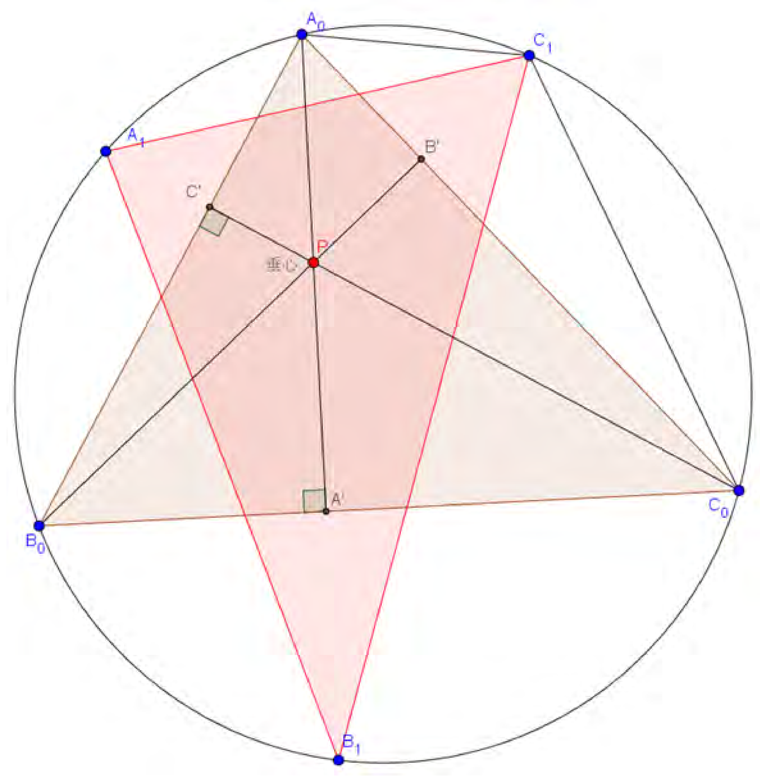
一、重複疊作頂圓三角形的其他性質

性質一：如右圖，當任意點為垂心時，原圖形與第一層圖形外接圓共圓。

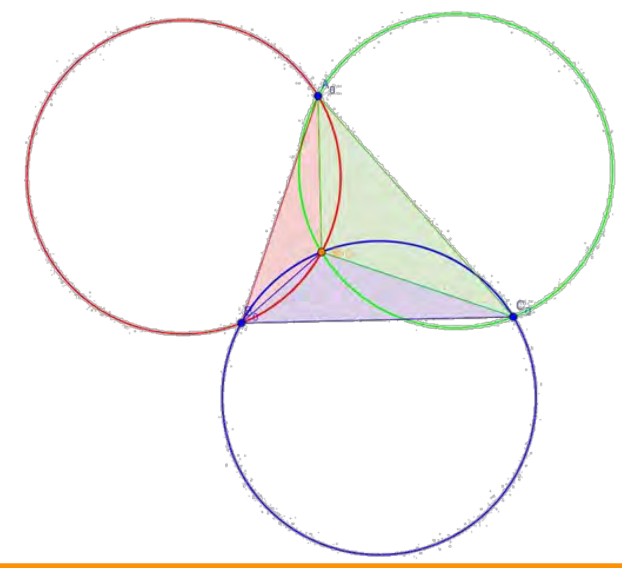
若 $\triangle A_0B_0C_0$ 為原圖形，

$\triangle A_1B_1C_1$ 為第一層圖形，

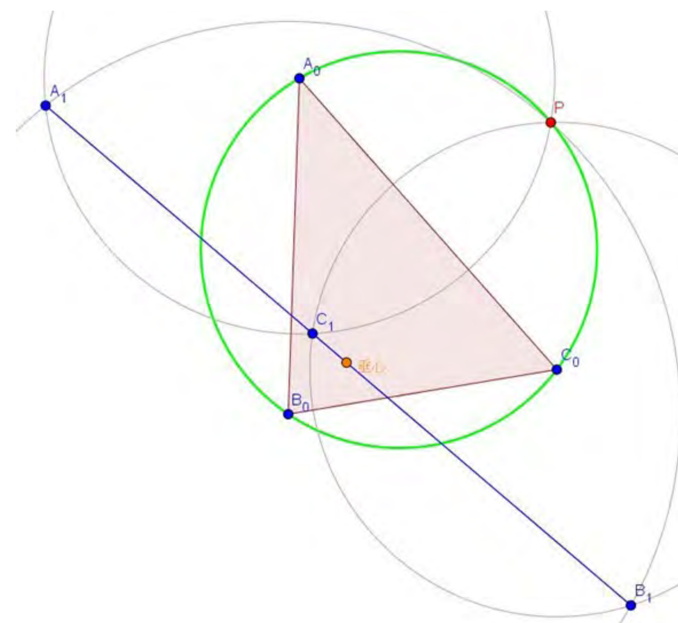
則 $\triangle A_0B_0C_0$ 與 $\triangle A_1B_1C_1$ 外心共點



性質二：如下圖，任意點位於垂心，連接 $\overline{AP}$、$\overline{BP}$、$\overline{CP}$ 可將 $\triangle$ ABC 分割為三個小三角形，這三個小三角形的外接圓必為等圓。



性質三：如下圖，當任意點 P 在原三角形外接圓上時，其第一層重複疊作圖形降邊成一線段，且此線段必過原三角形之垂心



二、重複疊作頂圓 n 邊形形狀邊界性質之探討

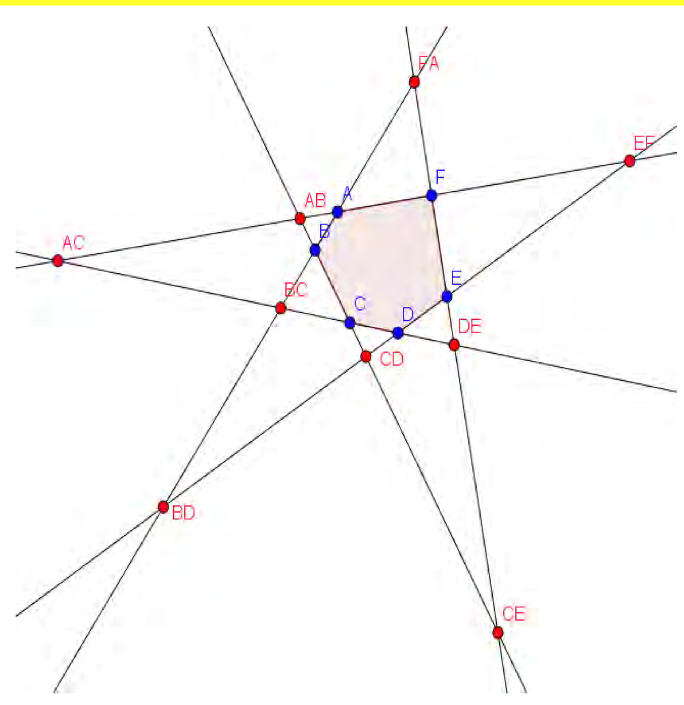
(一)名詞解釋

1.N 階交點：

任意兩邊延長線交點內的夾邊數為 n，則稱此交點為 n 階交點

如右圖，點 AB 夾邊為 $\overline{AB}$ 一線段，故點 AB 為一階交點

而頂點即為 0 階交點



2.邊界圓：

以兩頂點與其延長線上一階交點作圓，即為邊界圓；當任意點位於邊界圓上降一邊

3.n 階邊界弓形：

任意邊界弓形畫法：取一延長線上兩交點，各延長線交於第三點，三點作圓後取交點延長線向圖形外之弓形，即為邊界弓形。階數為較高階數交點之階數。

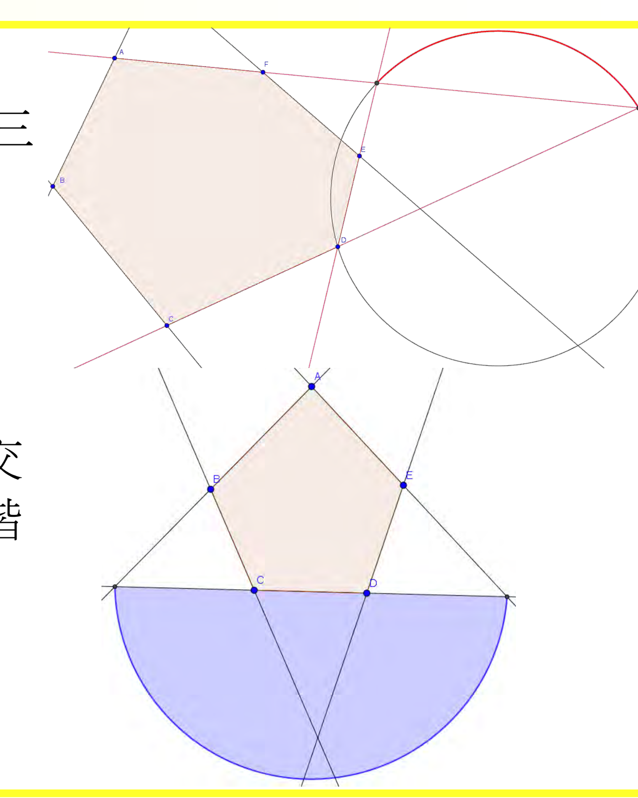
取交點方法：

A ：取任一邊延長線上兩端交點，並以邊界弓形畫法畫出。

B ：以原圖形邊分為兩側，取任一邊延長線上一側最高 k 階交點及同側(k-1)階交點，並以邊界弓形畫法畫出；在取此(k-1)階交點，及同側(k-2)階交點，並以邊界弓形畫法畫出。

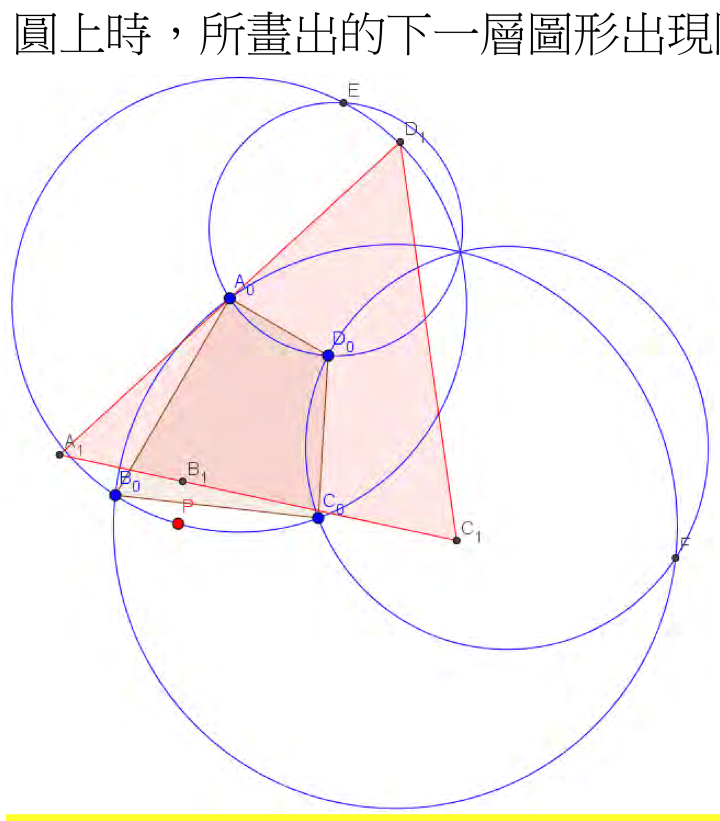
以五邊形為例，最高僅會有 $\frac{(n-3)}{2}$ 階→一階交點

以六邊形為例，最高僅會有 $\frac{n-2}{2}$ 階→二階交點

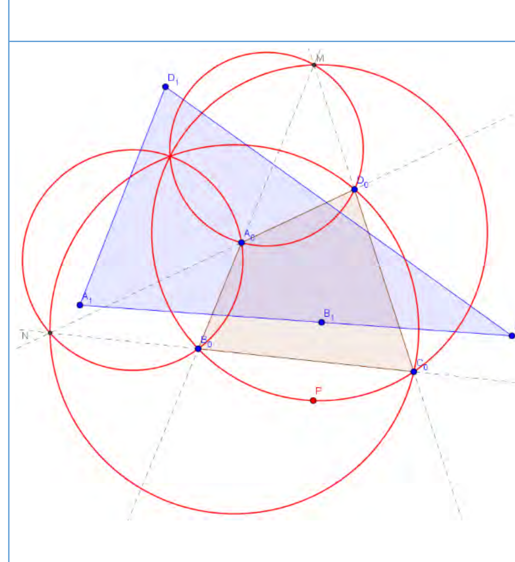
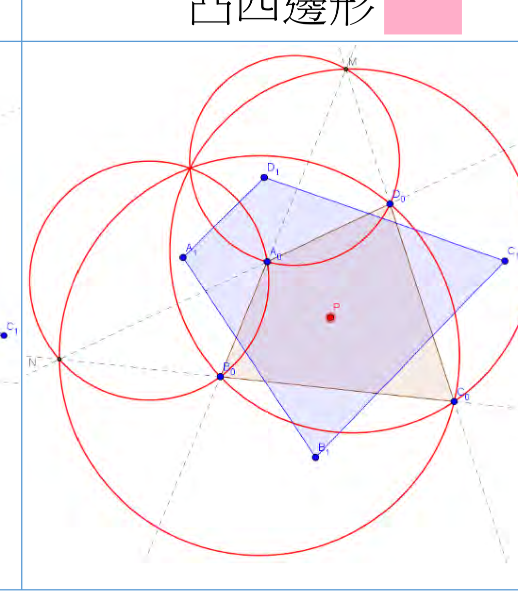
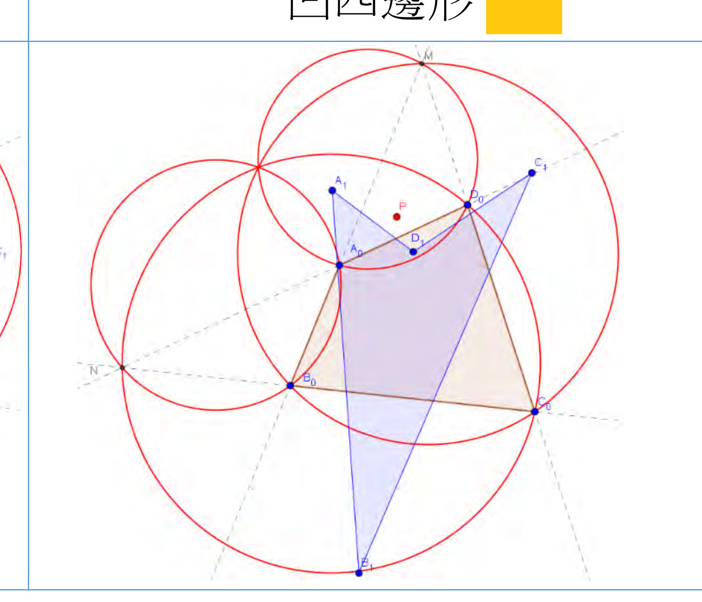
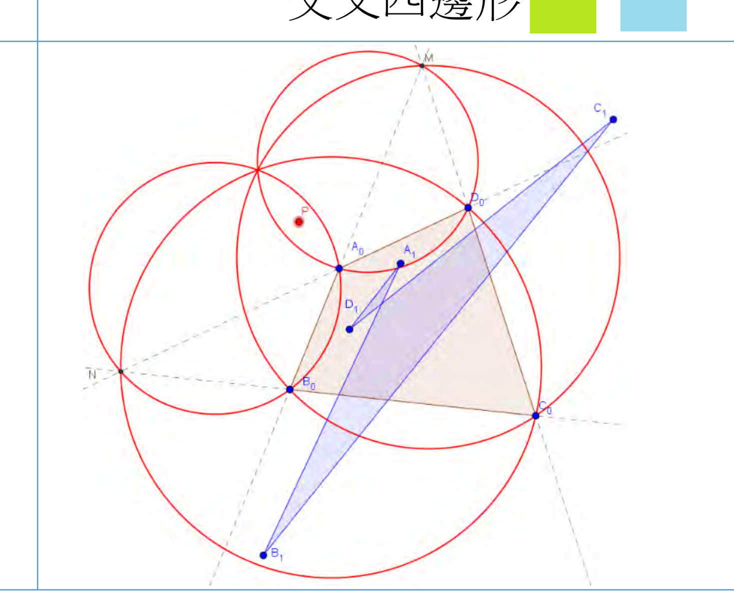


(二)重複疊作頂圓四邊形

性質一：如下圖，當任意點位於原圖形邊界圓上時，所畫出的下一層圖形出現降邊

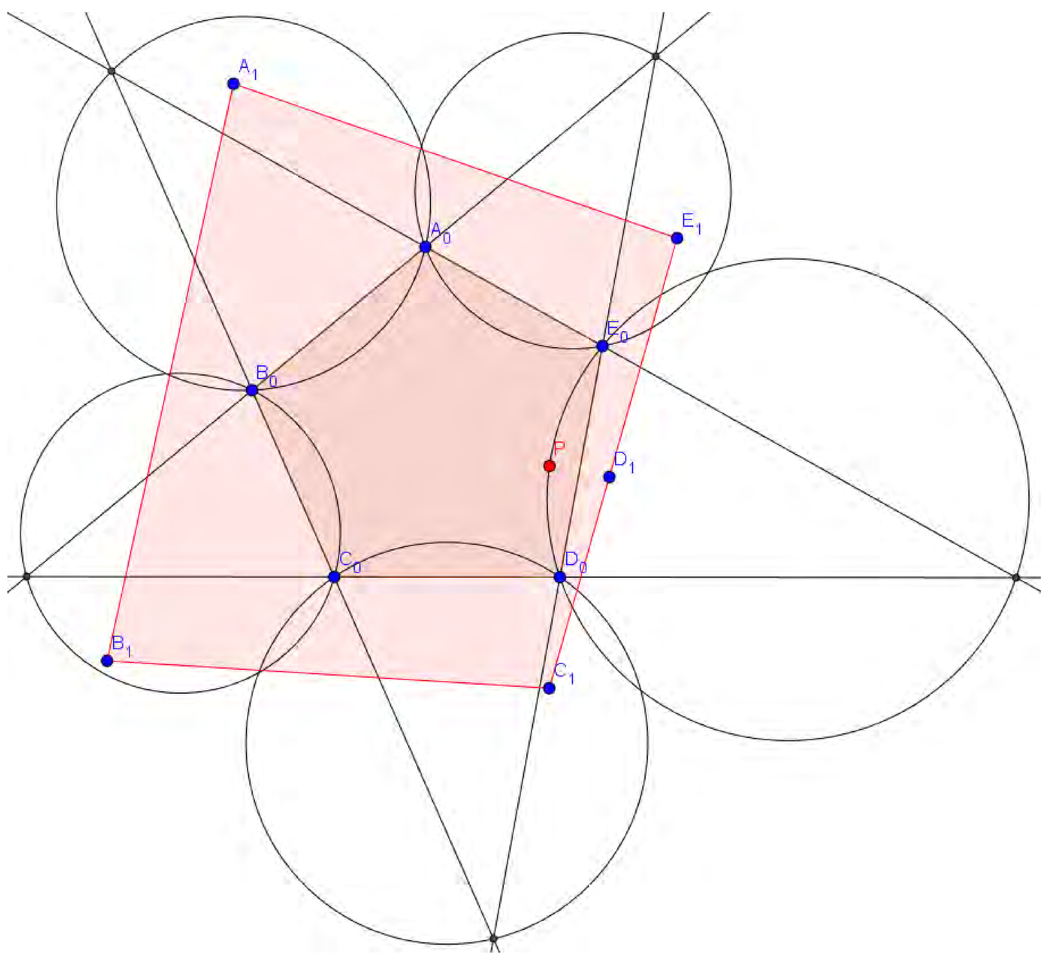


性質二：當任意點 P 位於四個邊界圓所形成之不同區域上時，會產生不同疊作圖形，如下表：

P 在圓上：三角形(弧線)	P 在原圖形內交疊：凸四邊形	P 在圖形外且圓交疊次數為奇數：凹四邊形	P 在圖形外且圓交疊次數為偶數：交叉四邊形
			
(任意點位於四圓共點第一層圖形為一直線)			

(三)重複疊作頂圓五邊形

性質一：如下圖，當任意點位於原圖形邊界圓上時，所畫出的下一層圖形出現降邊

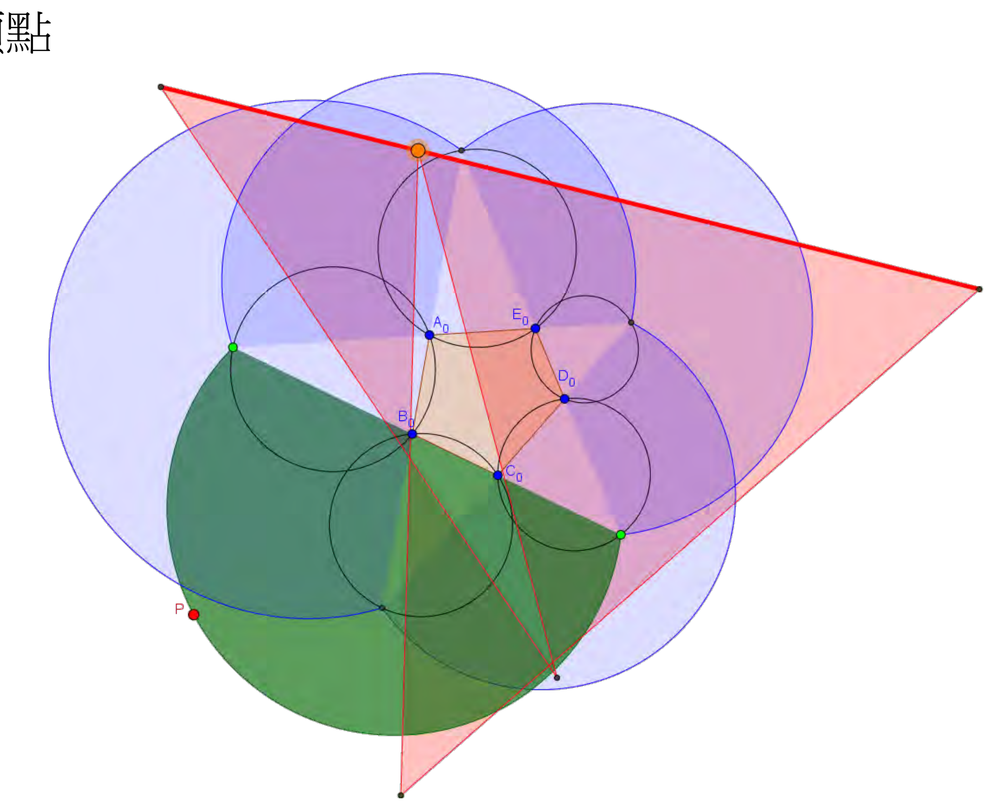


性質二：如下圖，當任意點位於原圖形任一邊界弓形弧上時，其第一層疊作圖形出現點重疊邊

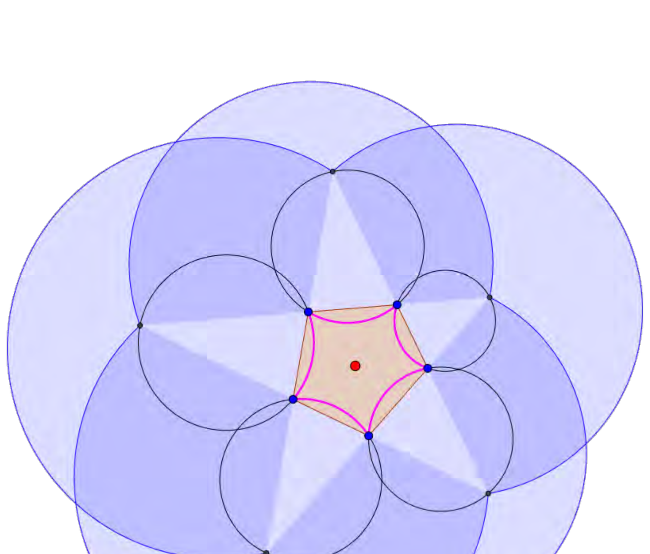
橘點為重疊點，紅色粗邊為重疊邊

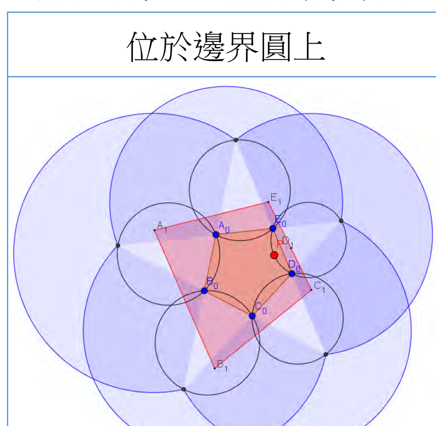
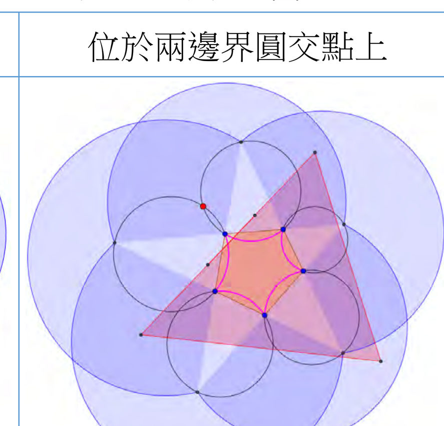
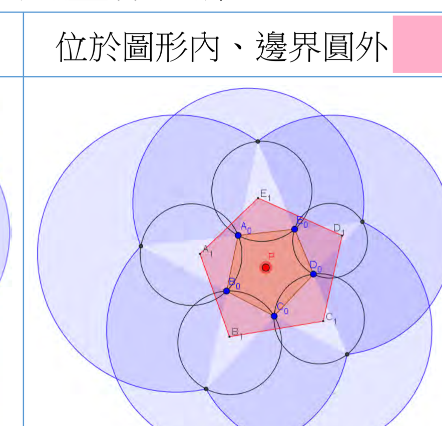
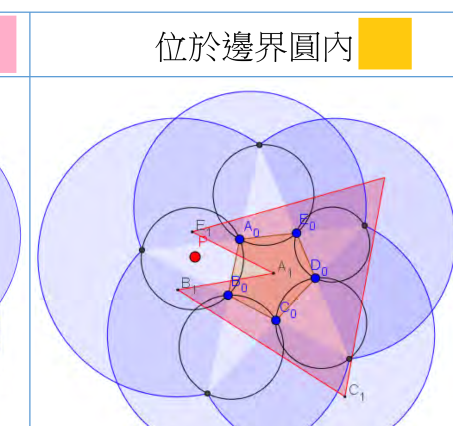
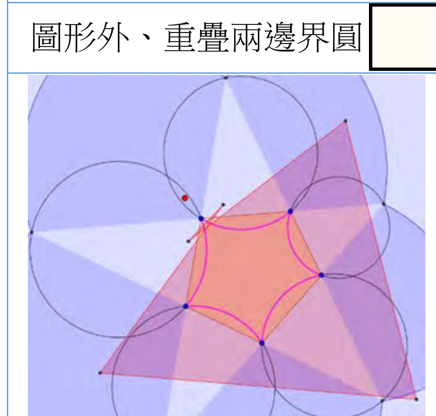
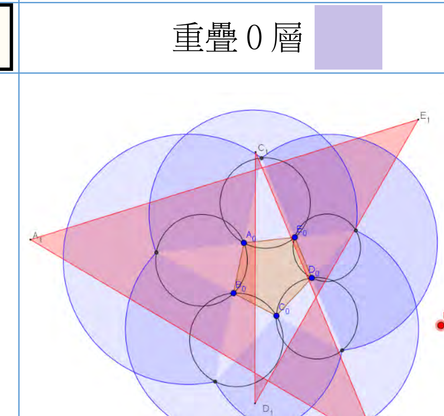
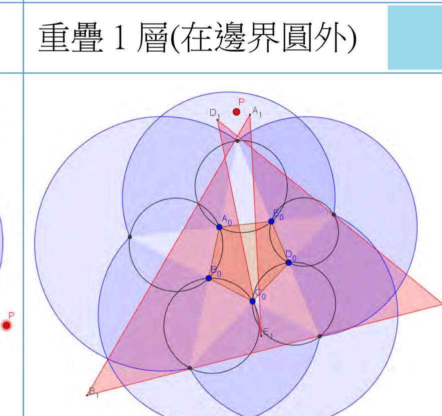
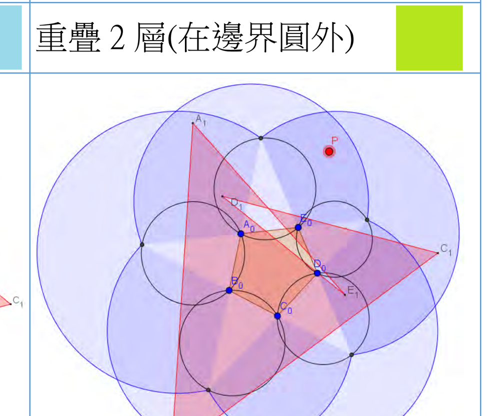
重疊點為邊界弓形弦上兩頂點所作下一層頂點

重疊邊為邊界弓形兩交點之延長線所交於第三點(頂點)之鄰邊分別所作頂點



性質三：如右表，任意點位於一階弓形重疊所形成之不同區域，會產生不同疊作圖形：



位於邊界圓上	位於兩邊界圓交點上	位於圖形內、邊界圓外	位於邊界圓內
			
圖形外、重疊兩邊界圓	重疊 0 層	重疊 1 層(在邊界圓外)	重疊 2 層(在邊界圓外)
			

(四)重複疊作頂圓六邊形

性質一：當任意點位於原圖形邊界圓上時，所畫出的下一層圖形出現降邊

性質二：如下圖，當任意點位於原圖形任一邊界弓形弧上時，其第一層疊作圖形出現點重疊邊

性質三：將二階邊界弓形，且把它區分成 2 種：

1.弦會包含原圖形邊長之藍色弓形區域

2.弦不會包含原圖形邊長之紅色弓形區域

重疊 0 層(任意點在弧外)：零優角三交叉六邊形

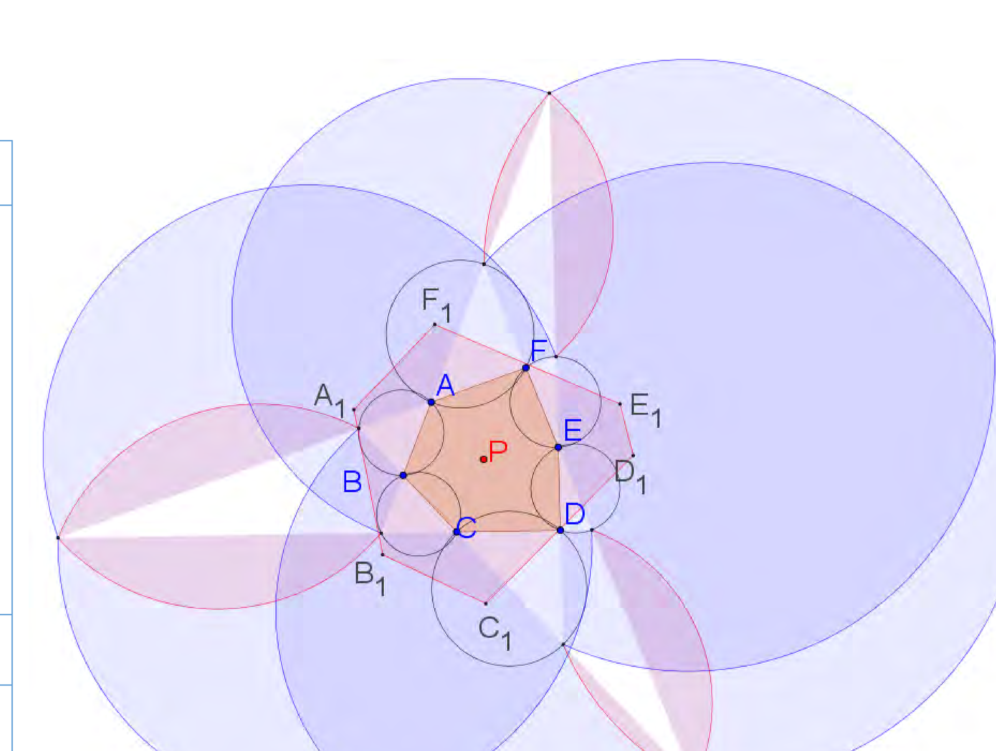
重疊 0 層(任意點在弧內)：零優角五交叉六邊形

重疊 1 層藍色：一優角三交叉六邊形

重疊 2 層藍色：兩優角一交叉六邊形

重疊 1 層藍色、1 層紅色：零優角五交叉六邊形

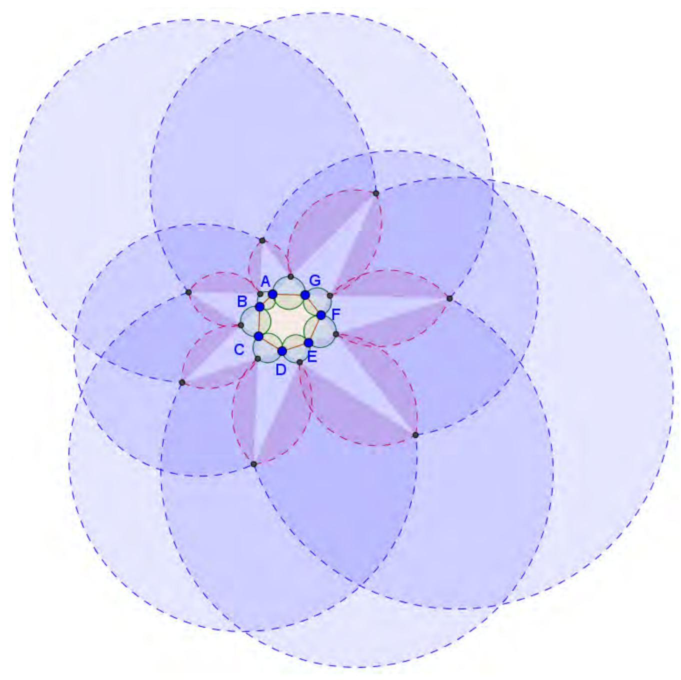
重疊 2 層藍色、1 層紅色：一優角三交叉六邊形



(五)重複疊作頂圓七邊形

性質一：當任意點位於原圖形邊界圓上時，所畫出的下一層圖形出現降邊

性質二：如下圖，當任意點位於原圖形任一邊界弓形弧上時，其第一層疊作圖形出現點重疊邊



性質三：將邊界弓形區分成2種：

1.弦會包含原圖形邊長之藍色弓形區域

2.弦不會包含原圖形邊長之紅色弓形區域

重疊0層：零優角七交叉七邊形

重疊1層藍色：一優角五交叉七邊形

重疊2層藍色：兩優角三交叉七邊形

重疊3層藍色：三優角一交叉七邊形

重疊3層藍色、1層紅色：兩優角三交叉七邊形

重疊3層藍色、2層紅色：一優角五交叉七邊形

(七)五邊形以上疊作圖形形狀規律觀察

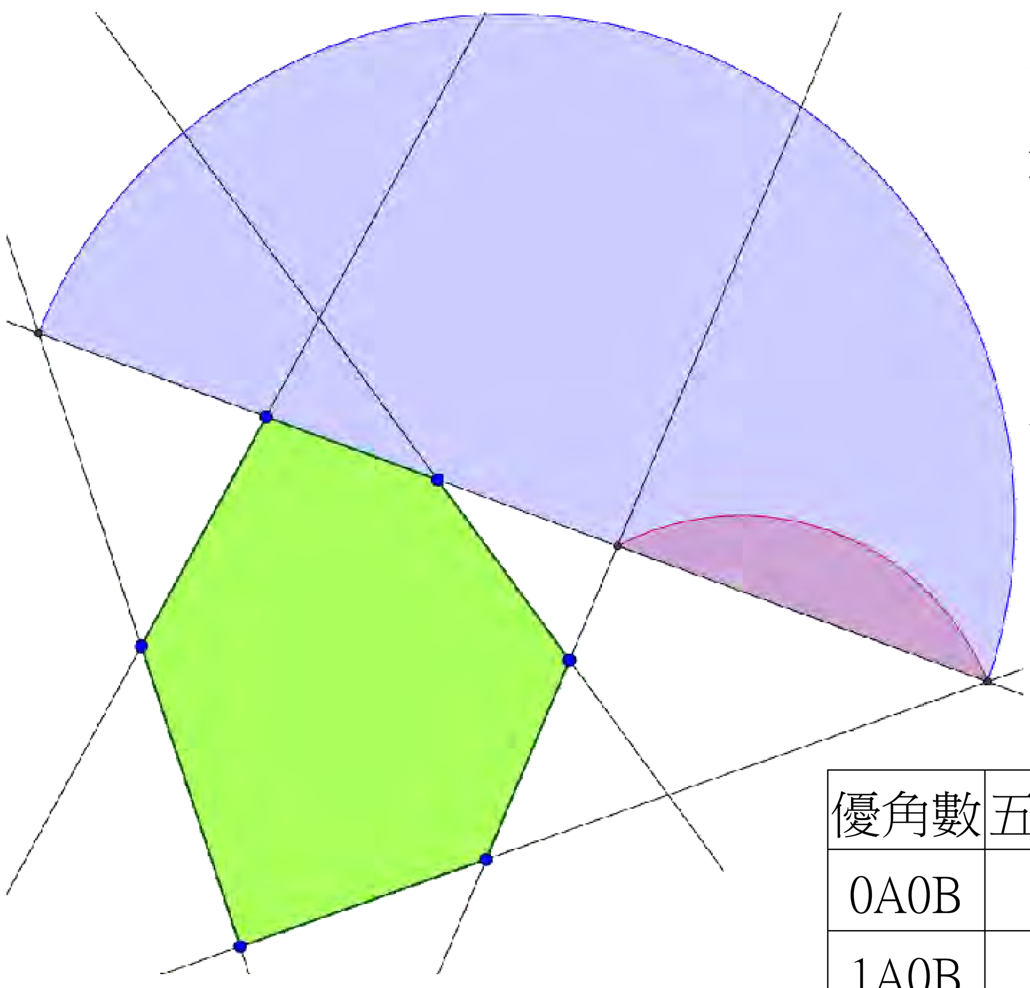
規則：

A：為弦會包含原圖形邊的藍色弓形區域

B：弦不會包含原圖形邊的紅色弓形區域

例：1A1B即為各重疊一層藍色及紅色區域

形狀藉由圖形的優角數及交叉數來區別



假設：

n邊形

重疊A弓形的層數為x

重疊B弓形的層數為y

優角數為m

交叉數為k

則優角數及交叉數為：

優角數	五邊形	六邊形	七邊形	八邊形
0A0B	0	0	0	0
1A0B	1	1	1	1
1A1B	X	0	X	X
2A0B	2	2	2	2
2A1B	X	1	X	1
3A0B	X	X	3	3
3A1B	X	X	2	2
3A2B	X	X	1	1

優角數：

從右方表格可以發現，1個A區域跟1個B區域可以抵銷，抵銷後的弓形數量會為圖形內優角數量

即m=x-y

交叉數：

令k_0為n邊形0A0B時的交叉數， $k_0 = 2\left[\frac{n+1}{2}\right] - 1$

x_m為n邊形x的最大值,

$x_m = \left[\frac{n+1}{2}\right] - 1$

條件：$0 \leqq y \leqq 2$、$x \geqq y$

結論：$k = k_0 - 2x + 2 \times \left[\frac{y}{2}\right]$

$= 2\left[\frac{n+1}{2}\right] - 1 - 2x + 2 \times \left[\frac{y}{2}\right]$

交叉數	五邊形	六邊形	七邊形	八邊形	九邊形
0A0B	5	5	7	7	9
1A0B	3	3	5	5	7
1A1B	X	3	X	X	X
2A0B	1	1	3	3	5
2A1B	X	3	3	3	5
3A2B	X	X	3	3	5
3A0B	X	X	1	1	3
3A1B	X	X	1	1	3
4A2B	X	X	X	X	3
4A0B	X	X	X	X	1
4A1B	X	X	X	X	1

(六)重複疊作頂圓N邊形之通用性質

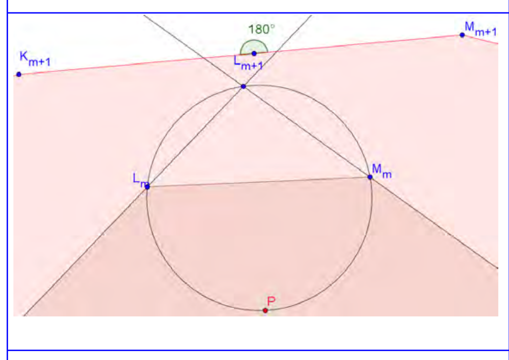
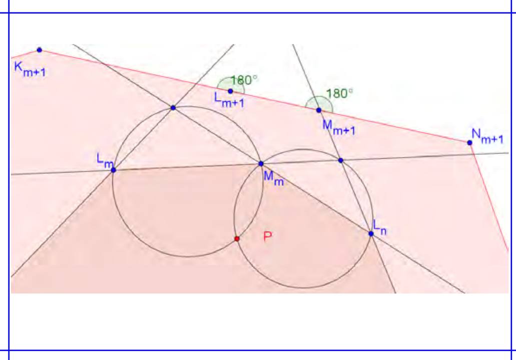
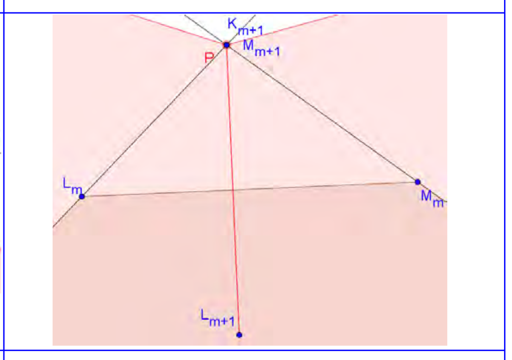
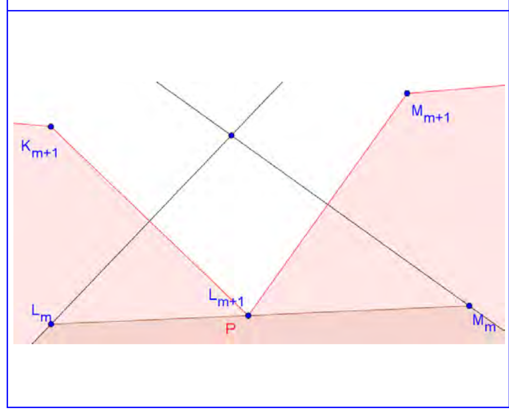
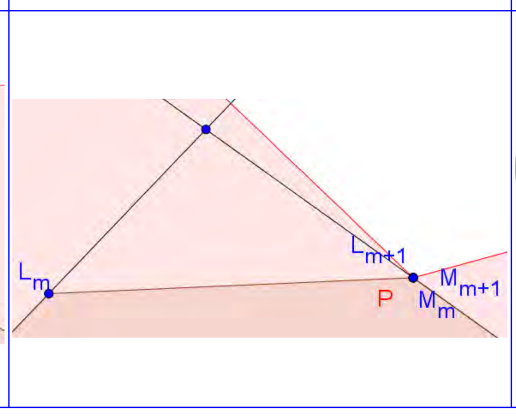
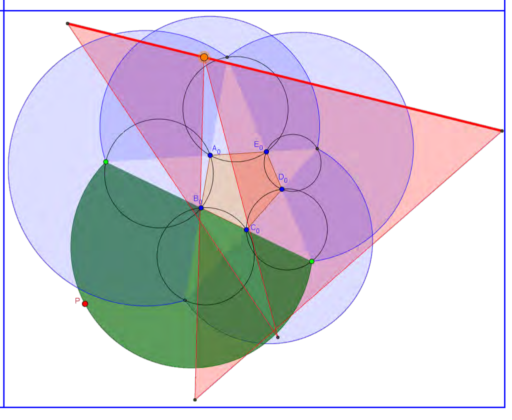
性質一：任意點位於一個一階交點&兩線上頂點所作圓上降一邊

性質二：任意點位於任意兩邊延長線交點上降兩邊

性質三：任意點位於兩頂點L,M所作直線上L,M所作下一層頂點與任意點共點

性質四：位於一交點&兩線上頂點所作兩圓交點上降兩邊

性質五：當任意點位於任意邊界弓形上時，疊作圖形出現點重疊邊

任意點位於一個一階交點與兩延長線上頂點所作圓上降一邊	位於一個一階交點&兩線上頂點所作兩圓交點上降兩邊	任意點位於任意兩邊延長線交點上降兩邊
		
任意點位於兩頂點L,M所作直線上L,M所作下一層頂點與任意點共點	任意點位於任意兩邊延長線交點上降一邊(頂點)	當任意點位於任意邊界弓形弧上時，疊作圖形出現點重疊邊
		

※多邊形內部定義：以任意兩邊交點，會產生兩組對頂角，對頂角所對兩區域為同類區域，如果兩區域皆為封閉區域，則為多邊形內部；反之亦然

※邊界弓形過渡期：

1. 當任意點位於任意邊界弓形弧上時，出現點重疊邊
2. 對於A邊界弓形：
   當任意點向邊界弓形內移動，對應之重疊點向圖形內移動；反之亦然
3. 對於B邊界弓形：
   當任意點向邊界弓形內移動，對應之重疊點向圖形外移動；反之亦然

※對於一邊外有一個頂點的圖形：

由A邊界弓形過弧進到內部：+1優角 -2交叉，進到外部相反

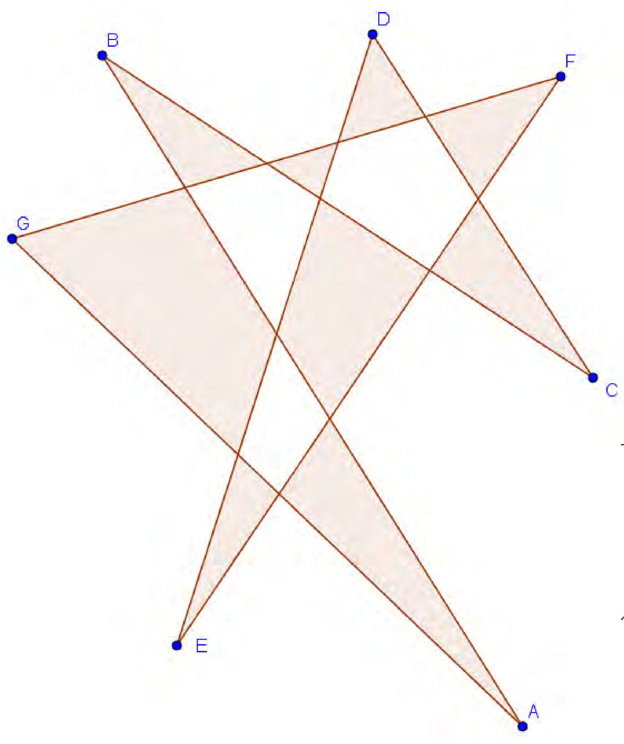
由0B->1B：-1優角、1B->2B：-1優角 +2交叉

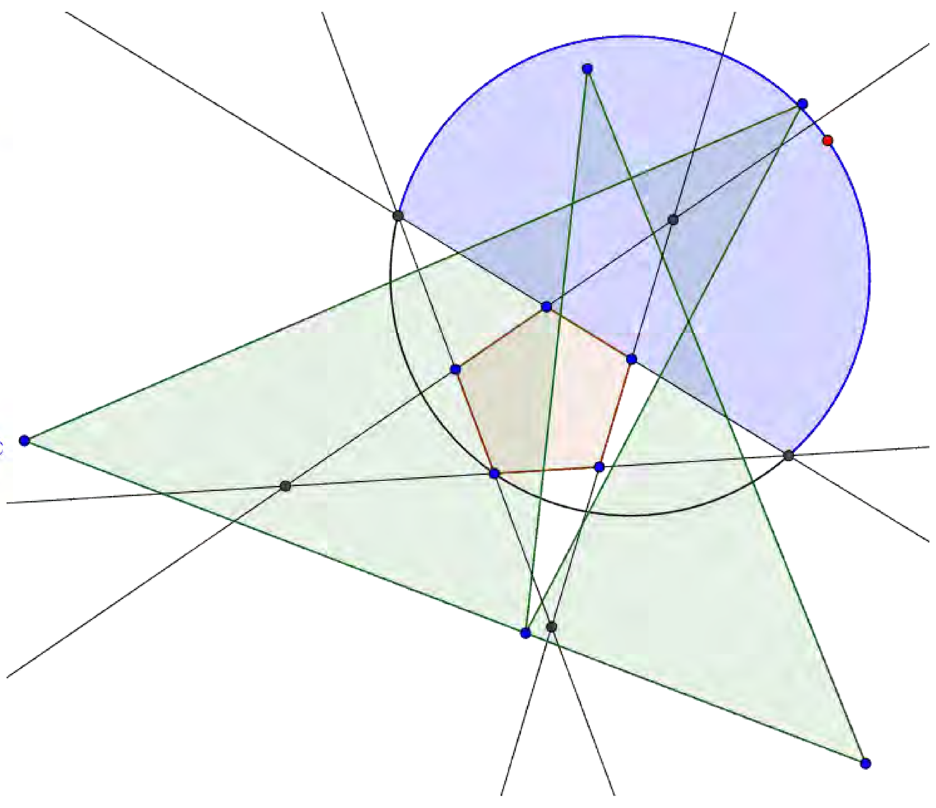
※對於一邊外有兩個頂點的圖形(六邊形)：

0A->1A：+1優角；1A->2A：+1優角-2交叉

0B->1B：-1優角 +2交叉

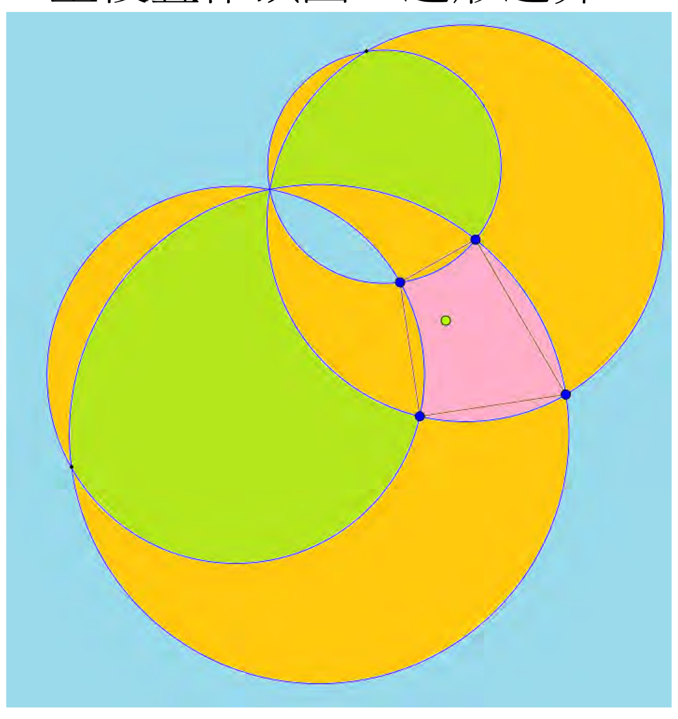
由以上可得知在任意延長線向圖形內的交集區域較非此區域相同層數之區域交叉數+2



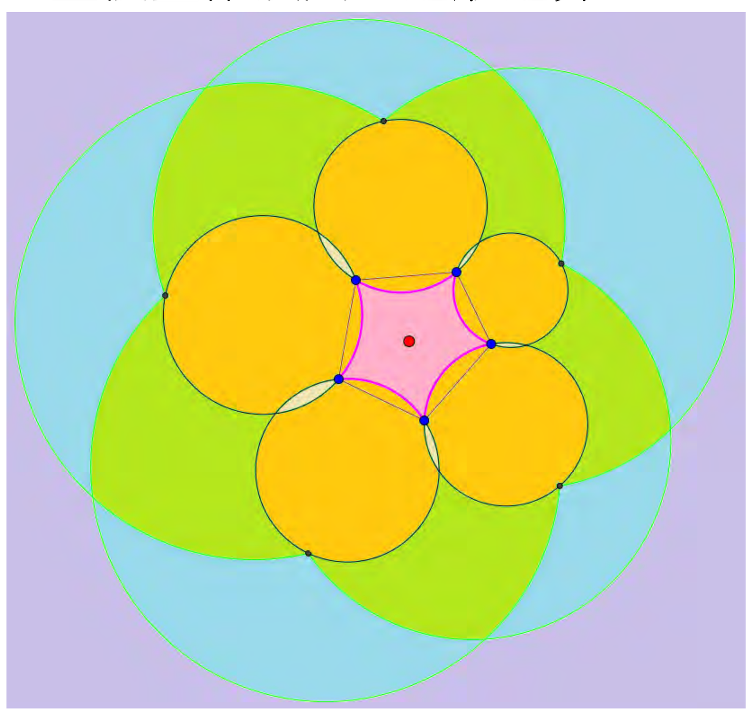


(八)頂圓n邊形區域觀察歸納

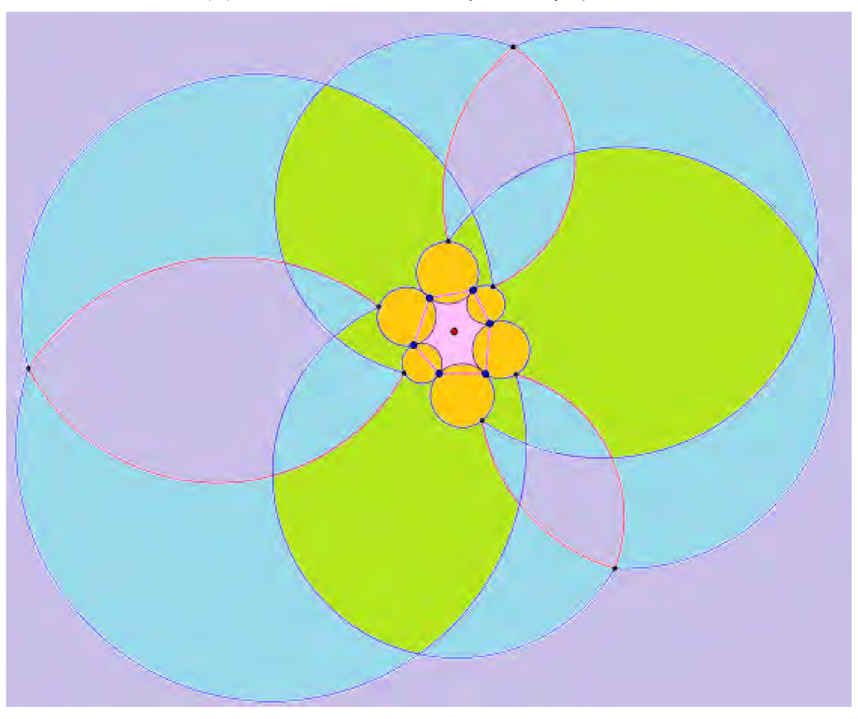
1.重複疊作頂圓四邊形邊界



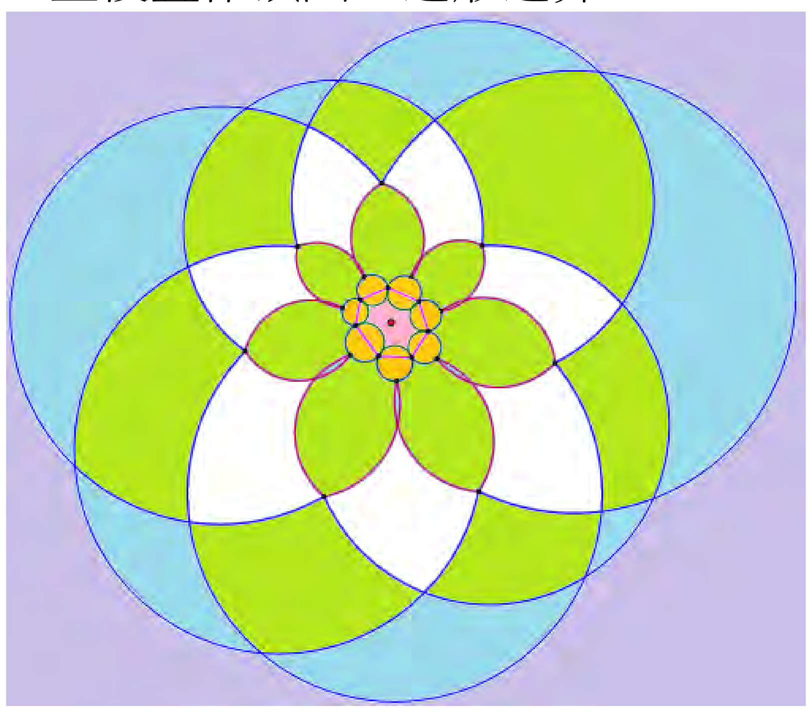
2.重複疊作頂圓五邊形邊界



3.重複疊作頂圓六邊形邊界



4.重複疊作頂圓七邊形邊界



伍、研究結論

一、 重複疊作頂圓n邊形第m層圖形相似於第(m+n)層圖形

二、在三角形中， 任意點為垂心時，原圖形與第一層圖形外接圓共圓

三、 任意點位於原圖形一階交點圓上時，所畫出的下一層圖形出現降邊

四、 任意多邊形所作出的疊作圖形，其形狀區域分布成規律

陸、未來展望

一、探討全等點性質

二、利用尺規作圖作出全等點位置

三、藉由全等點及任一層圖形逆推原圖形

四、繼續探討降邊性質及證明

柒、參考資料及其他

1. 中華民國第54 屆中小學科學展覽多邊形與其中重、頂重多邊形之性質探討
   取自http://science.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?cat=&a=0&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=52&sid=12108
2. Johnson's Theorem -- from Wolfram MathWorld
   取自http://mathworld.wolfram.com/JohnsonsTheorem.html