中華民國第57屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

佳作

030421

圓外切四邊形的多「圓」發展

學校名稱：新竹縣立自強國民中學

作者：	指導老師：
國二 黃建澄	鄭芬如
國二 姚　瀚	吳雅韻

關鍵詞：圓外切四邊形、圓的切線段長性質、相似三角形

摘要

1. 對於任意三角形都會有一個內切圓，但不是每個四邊形都會有內切圓。具有一個內切圓的圓外切四邊形其兩組對邊長度和是相等的關係；此圓外切四邊形的面積也是該四邊形半周長與內切圓半徑的乘積。
2. 本研究藉由原本可能沒有內切圓的四邊形的一組較長對邊上的點，連接成一條對邊連線段，將四邊形分成兩個有內切圓的小四邊形，或是推廣分成三個、四個甚至更多個具有內切圓的小四邊形，嘗試找出這樣分割的對邊連線段長與原四邊形的四邊長的規律關係。
3. 只要有內切圓存在的四邊形，不管該四邊形分割成一個或兩個或更多個，則此原四邊形面積與諸個小四邊形半周長和內切圓半徑之間的關係式也有一定的規律存在。

壹、 研究動機

有一次上數學課時，老師和我們提到了一個四邊形有內切圓(圓外切四邊形)的性質，也帶我們看了許多相關的科展作品及文獻，在學習的過程中，我們知道了有關於三圓外切於三角形內部的性質關係（鄒黎明[1]），基於好奇心的驅使我們也在想會不會有一個四邊形內部也有兩個內切圓、三個內切圓、或者更多內切圓，又或者會有不一樣的性質存在。於是我們開始這個方向的研究。

貳、 研究目的

由國中數學第五冊[3]學到的一圓外切四邊形，所得到的四個邊長的關係式和該四邊形面積與半周長、內切圓半徑之間的關係式，本研究進一步探討出下列四項多圓外切四邊形內部的幾何性質：

一、 探討多圓外切四邊形中對邊連線段長與原四邊形的邊長關係。

二、 在多圓外切四邊形中，找出各組對邊的對邊連線段與兩組對邊和的關係與其對應的性質探討。

三、 在特定的四圓、九圓、十六圓或 n^2 圓外切四邊形中，特定的對邊連線段和之關係探討。

四、 探討多圓外切四邊形中，所有內切圓半徑與四邊形的面積關係。

参、研究設備與器材

紙、筆、電腦、*GSP* 動態幾何繪圖軟體

肆、研究過程或方法

一、已知性質與名詞定義

二、(一)多圓外切四邊形中各種對邊連線段與原四邊形邊長關係的探討

(二) 多圓外切四邊形中，各組對邊的對邊連線段與兩組對邊和的關係與其對應的性質探討

(三) 特定的 n^2 圓外切四邊形 $(n\times n)$ 中特定的對邊連線段和之關係探討

三、多圓外切四邊形中，諸條對邊連線段所分割出來的小四邊形之內切圓半徑與四邊形面積的關係

四、推廣到圓外切五邊形的初步結果

一、已知的性質[5]：如圖 1

性質 1. 圓外切四邊形 *ABCD* 中，對邊之和 $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$

性質 2. 圓外切四邊形 *ABCD* 中，內切圓半徑為 r，則四邊形 *ABCD* 的面積

$$=\frac{1}{2}\times S\times r \text{，其中 } S=\text{四邊形}ABCD\text{的周長}$$

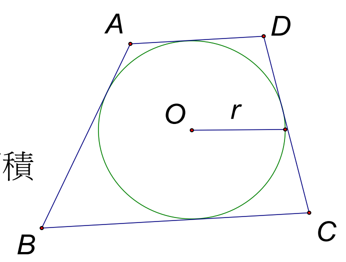


圖 1：圓外切四邊形

由性質 1 及 2 的基礎下，我們又閱讀了數學傳播季刊第 40 卷第 1 期中的一篇文章，由鄒黎明老師所寫「涉及三個內切圓的一個有趣結論」[1]，其中寫著

命題：$\triangle ABC$ 中，D、E、F 分別在 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 相交於 Z，則存在唯一的點 Z 使得四邊形 $AEZF$、四邊形 $BDZF$、四邊形 $CEZD$ 都有內切圓。如圖 2 所示。

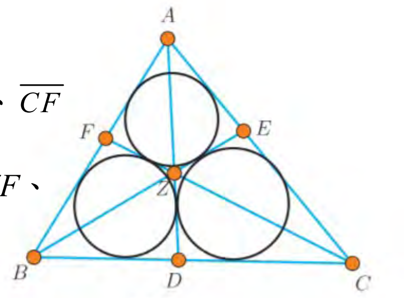


圖 2

基於此命題分割三角形成三個圓外切四邊形的概念，本研究推廣到四邊形中由定義的對邊連線段來分割四邊形成二個、三個、甚至多個圓外切四邊形，再以性質 1 及 2 為基礎，探討這些對邊連線段與原四邊形的邊長關係，以及原四邊形面積與分割出的小內切圓半徑的關係。為了讓接下來的討論更清楚簡潔，我們用以下的名詞定義表示各種不同情況的排列圖形。

名詞定義

1、對邊連線段：如圖 3 所示，四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 為較長的一組對邊，$\overline{AD}$ 和 $\overline{BC}$ 則為較短的對邊，其中 E、F 分別為 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 上的點，我們在此稱 $\overline{EF}$ 為對邊連線段。

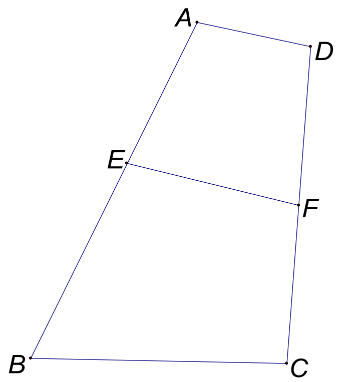


圖 3：$\overline{EF}$ 為對邊連線段

2、$\mathrm{G}_{C(l_1,l_2,\cdots,l_n)}^{L,N}$：左上字母 L 表示圓外切四邊形層數，右上字母 N 表示對邊連線段數，左下字母 C 表示內切圓總數，右下字母 $(l_1,l_2,\cdots,l_n)$ 表示不同每層排列內切圓數。例如 $\mathrm{G}_{3(1,1,1)}^{3,2}$ 代表三層，兩條對邊連線段，共包含三個內切圓，每層各有一個內切圓。三圓外切四邊形包含 $\mathrm{G}_{3(1,1,1)}^{3,2}$ 和 $\mathrm{G}_{3(1,2)}^{2,2}$ (與 $\mathrm{G}_{3(2,1)}^{2,2}$ 同)三種排列方式。

二、首先以性質 1 為基礎探討多圓外切四邊形中各種對邊連線段與四邊形四個邊長的關係：

(一)兩圓外切四邊形內部的情形，以下是我們的探討。

定理 1：四邊形 $ABCD$ 中，對邊連線段 $\overline{EF}$ 將原四邊形分成兩個具有內切圓的小四邊形。則 $\overline{EF}$ 與四邊形 $ABCD$ 兩組對邊長的關係為 $\overline{EF}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{CD}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$，

如圖 4 所示，可用 $\left(\mathrm{G}_{2(1,1)}^{2,1}\right)$ 表示。

證明：如圖 4，在圓外切四邊形 *AEFD* 和 *EBCF* 中，可由性質 1 得

$$\begin{array}{rl} & \overline{AD}+\overline{EF}=\overline{AE}+\overline{DF} \\ +) & \overline{BC}+\overline{EF}=\overline{BE}+\overline{FC} \\ \hline & \overline{AD}+2\overline{EF}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{DC} \end{array}$$

$$\Rightarrow 2\overline{EF}=\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)$$

$$\Rightarrow \overline{EF}=\frac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$$

故得證■

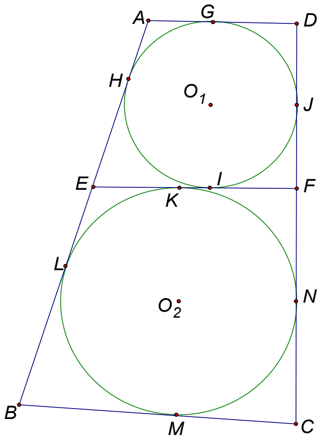


圖 4：兩圓外切四邊形

對於圖 4 中的對邊連線段$\overline{EF}$，就是兩圓外離時的其中一條內公切線段，還有另一條內公切線段$\overline{E'F'}$，如圖 5，也是對邊連線段，一樣滿足定理 1 的等式關係，也就是$\overline{E'F'}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$，可以證得$\overline{EF}=\overline{E'F'}$。亦或是圖 4 中的 I、K 為同一點時的兩圓外切關係，其內公切線段只有一條即 $E=E'$、$F=F'$，也就是說，在同一組對邊上可能最多會有兩條對邊連線段與兩圓相切，所以二圓外切四邊形的對邊連線段不是唯一的。其他多圓外切四邊形的多條對邊連線段可依是否為內、外公切線段來判斷是否是唯一的，後面還有進階的討論。

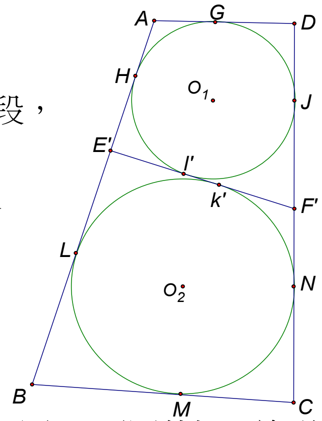


圖 5：兩圓外切四邊形的另一條對邊連線段

(二)三圓外切四邊形內部的情形：我們觀察到三個內切圓有下列兩種排列情形，

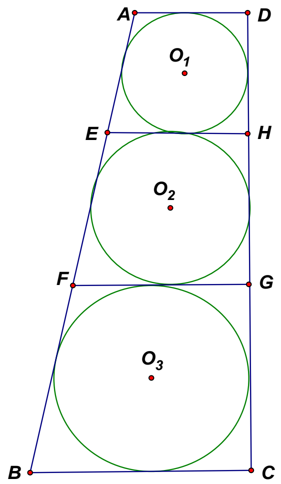


圖 6：三圓外切四邊形，可用 $G^{3,2}_{3(1,1,1)}$ 表示

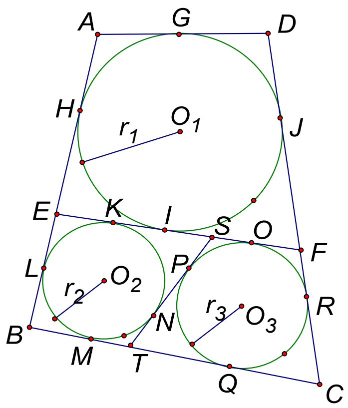


圖 7：三圓外切四邊形，可用 $G^{2,2}_{3(1,2)}$ 表示

仿照定理 1 的證法，得到以下的結論，

推論 1-1：四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{EH}$ 、$\overline{FG}$ 為對邊連線段，$\overline{EH}$ 與 $\overline{FG}$ 將原四邊形分成三個具有內切圓的小四邊形。則 $\overline{EH}$ 、$\overline{FG}$ 與四邊形 $ABCD$ 兩組對邊長的關係為 $\overline{EH}+\overline{FG}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{CD}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$，如圖 6 所示，可用 $\left(G_{3(1,1,1)}^{3,2}\right)$ 表示。

證明：同定理 1 的證明。

推論 1-2：四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{EF}$ 為對邊連線段，$\overline{ST}$ 為四邊形 $EBCF$ 的對邊連線段，$\overline{EF}$ 與 $\overline{ST}$ 將原四邊形分成三個具有內切圓的小四邊形。則 $\overline{EF}$ 、$\overline{ST}$ 與四邊形 $ABCD$ 兩組對邊長的關係為 $\overline{EF}-\overline{ST}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{CD}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$，如圖 7 所示，可用 $\left(G_{3(1,2)}^{2,2}\right)$ 表示。

證明：由定理 1 與性質 1 可同理可證。

(三) **四圓外切四邊形內部的情形**：四個內切圓有多種排列方式，經整理及分析為七種排列方式。四圓外切四邊形包含 $G_{4(1,3)}^{2,3}$ (與 $G_{4(3,1)}^{2,3}$ 同)、$G_{4(2,2)}^{2,2}$ 、$G_{4(1,2,1)}^{3,3}$ (與 $G_{4(2,1,1)}^{3,3}$ 、$G_{4(1,1,2)}^{3,3}$ 同) 和 $G_{4(1,1,1,1)}^{4,3}$。其中（1，3）和（3，1）情況相同，（1，2，1）、（2，1，1）和（1，1，2）情況相同，則不重複討論。我們得到如下的推論：

推論 2-1：四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{EG}$ 、$\overline{HF}$ 分別為 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 、$\overline{AD}$ 和 $\overline{BC}$ 的對邊連線段，$\overline{EG}$ 與 $\overline{HF}$ 將原四邊形分成四個具有內切圓的小四邊形。則 $\overline{EG}$ 、$\overline{HF}$ 與四邊形 $ABCD$ 兩組對邊長的關係為 $\overline{AB}+\overline{CD}+2\overline{HF}=\overline{AD}+\overline{BC}+2\overline{EG}$，如圖 8 所示，可用 $\left(G_{4(2,2)}^{2,2}\right)$ 表示。

證明：如圖 8，由定理 1 可得在二圓外切四邊形 $AEGD$ 中

$$\overline{AE}+2\overline{OH}+\overline{DG}=\overline{AD}+\overline{EG}\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

同理，在二圓外切四邊形 $EBCG$ 中

$$\overline{BE}+2\overline{OF}+\overline{CG}=\overline{EG}+\overline{BC}\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

①+②得

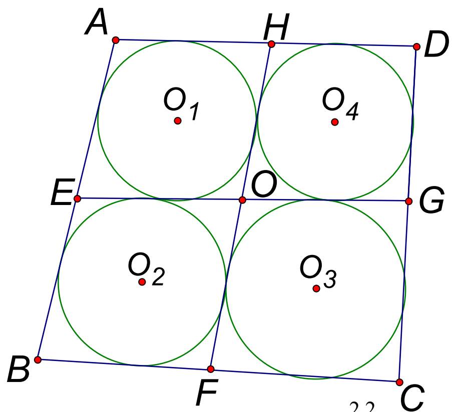


圖 8：四圓外切四邊形，可用 $G_{4(2,2)}^{2,2}$ 表示

$$\overline{AE}+\overline{BE}+\overline{DG}+\overline{CG}+2\left(\overline{OH}+\overline{OF}\right)=\overline{AD}+2\overline{EG}+\overline{BC}\Rightarrow\overline{AB}+\overline{CD}+2\overline{HF}=\overline{AD}+\overline{BC}+2\overline{EG}\ ■$$

推論 2-2：四圓外切四邊形 *ABCD* 中，排列方式如 $G_{4(1,3)}^{2,3}$ (與 $G_{4(3,1)}^{2,3}$ 同)、$G_{4(1,2,1)}^{3,3}$ (與 $G_{4(2,1,1)}^{3,3}$、$G_{4(1,1,2)}^{3,3}$ 同)與 $G_{4(1,1,1,1)}^{4,3}$。

在 $G_{4(1,3)}^{2,3}$ 排列中 $\overline{EF}-\overline{GH}-\overline{IJ}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{CD}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$；

在 $G_{4(1,2,1)}^{3,3}$ 排列中 $\overline{EF}+\overline{GH}-\overline{IJ}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{CD}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$；

在 $G_{4(1,1,1,1)}^{4,3}$ 排列中 $\overline{EF}+\overline{GH}+\overline{IJ}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{CD}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$。如圖 9、10、11 所示。

證明：同推論 2-1 的證明。

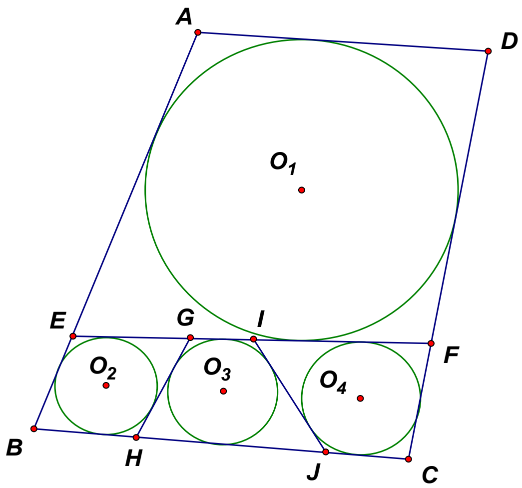


圖 9：四圓外切四邊形，可用 $G_{4(1,3)}^{2,3}$ 表示

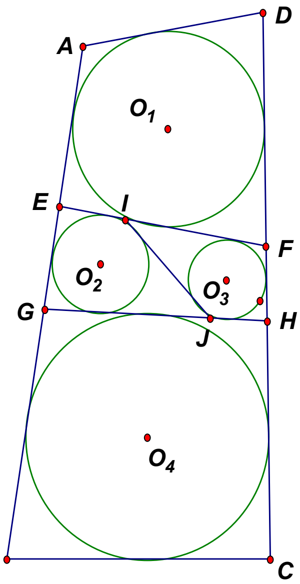


圖 10：四圓外切四邊形，可用 $G_{4(1,2,1)}^{3,3}$ 表示

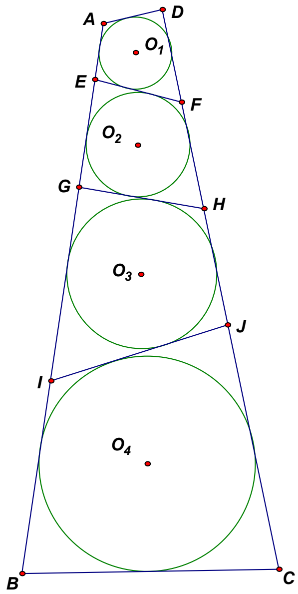


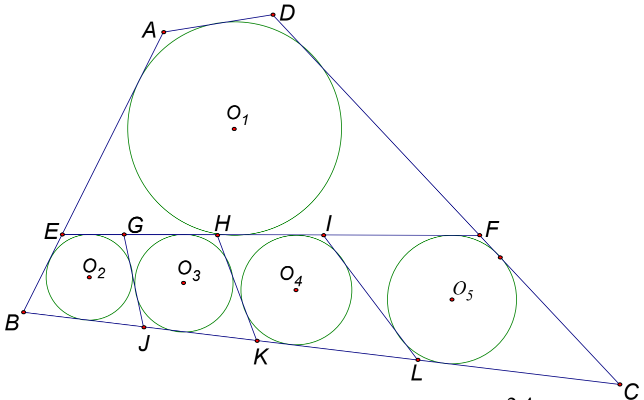
圖 11：四圓外切四邊形，可用 $G_{4(1,1,1,1)}^{4,3}$ 表示

(四)五圓外切四邊形內部的情形：我們觀察到五個內切圓有多種排列方式，經整理及分析為九種排列方式，包含 $G_{5(1,4)}^{2,4}$、$G_{5(2,3)}^{2,4}$、$G_{5(1,1,3)}^{3,4}$ (與 $G_{5(1,3,1)}^{3,4}$ 同)、$G_{5(1,2,2)}^{3,3}$、$G_{5(2,1,2)}^{3,4}$、$G_{5(1,1,1,2)}^{4,4}$ (與 $G_{5(1,1,2,1)}^{4,4}$ 同)、和 $G_{5(1,1,1,1,1)}^{5,4}$。將上述各排列方式逐一在下面推論中作探討。

推論 3-1：四邊形 *ABCD* 中，$\overline{EF}$、$\overline{JG}$、$\overline{KH}$ 和 $\overline{LI}$ 為對邊連線段，將原四邊形分成五個具有內切圓的小四邊形。則該四條對邊連線段與四邊形 *ABCD* 兩組對邊長的關係為

$\overline{EF}-\left(\overline{IL}+\overline{HK}+\overline{GJ}\right)=\dfrac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$，如圖 12 所示，可用 $\left(G_{5(1,4)}^{2,4}\right)$ 表示。

證明：由性質 1 同理可證。



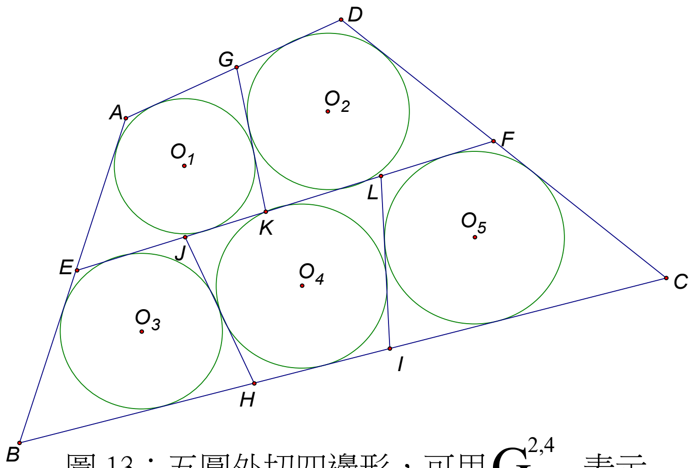


圖 12：五圓外切四邊形，可用 $G_{5(1,4)}^{2,4}$ 表示

圖 13：五圓外切四邊形，可用 $G_{5(2,3)}^{2,4}$ 表示

推論 3-2：四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{GK}$、$\overline{JH}$、$\overline{LI}$ 和 $\overline{EF}$ 為對邊連線段，將原四邊形分成五個具有內切圓的小四邊形。則該四條對邊連線段與四邊形 $ABCD$ 兩組對邊長的關係為

$\overline{EF}-\left(\overline{GK}+\overline{LI}+\overline{JH}\right)=\dfrac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$，如圖 13 所示，可用 $\left(G_{5(2,3)}^{2,4}\right)$ 表示。

證明：由定理 1 及推論 1-1 同理可證

推論 3-3：四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{EF}$、$\overline{GH}$、$\overline{IJ}$ 和 $\overline{KL}$ 為對邊連線段，將原四邊形分成五個具有內切圓的小四邊形。則該四條對邊連線段與四邊形 $ABCD$ 兩組對邊長的關係為

$\overline{EF}+\overline{GH}-\left(\overline{KL}+\overline{IJ}\right)=\dfrac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$，如圖 14 所示，可用 $\left(G_{5(1,3,1)}^{3,4}\right)$ 表示。

證明：由推論 1-1 與性質 1 同理可證

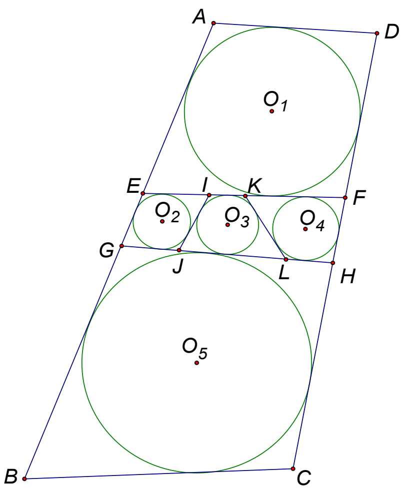


圖 14：五圓外切四邊形，可用 $G_{5(1,3,1)}^{3,4}$ 表示

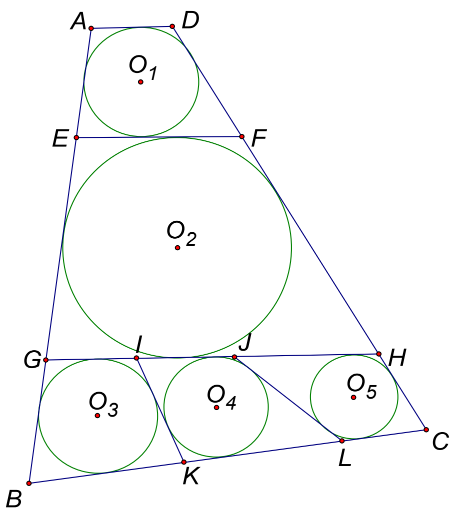


圖 15：五圓外切四邊形，可用 $G_{5(1,1,3)}^{3,4}$ 表示

推論 3-4：五圓外切四邊形 $ABCD$ 中，其他排列方式還有：

在 $G_{5(1,2,2)}^{3,3}$ 排列中 $\overline{EF}+\overline{GH}-\overline{IJ}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$；

在 $G_{5(2,1,2)}^{3,4}$ 排列中 $\overline{EF}+\overline{GH}-\left(\overline{IJ}+\overline{KL}\right)=\dfrac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$；

在 $G_{5(1,1,1,2)}^{4,4}$ 與 $G_{5(1,1,2,1)}^{4,4}$ 排列中 $\overline{EF}+\overline{GH}+\overline{IJ}-\overline{KL}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$；

在 $G_{5(1,1,1,1,1)}^{5,4}$ 排列中 $\overline{EF}+\overline{GH}+\overline{KL}+\overline{IJ}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$，如圖 16、17、18、19 所示。

證明：參考性質 1 與定理 1 同理可證。

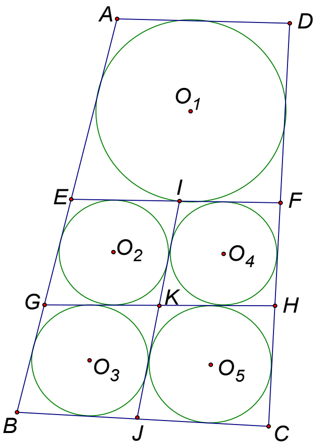


圖 16：五圓外切四邊形，可用 $G_{5(1,2,2)}^{3,3}$ 表示

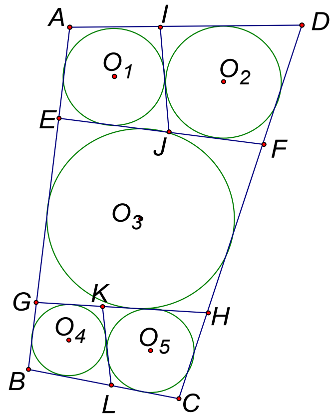


圖 17：五圓外切四邊形，可用 $G_{5(2,1,2)}^{3,4}$ 表示

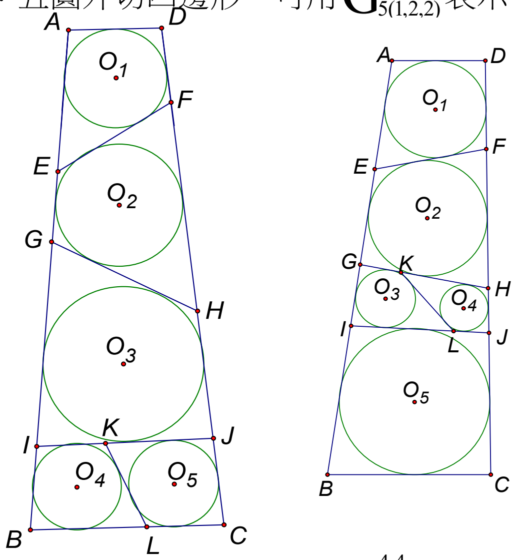


圖 18：五圓外切四邊形，可用 $G_{5(1,1,1,2)}^{4,4}$ 與 $G_{5(1,1,2,1)}^{4,4}$ 表示

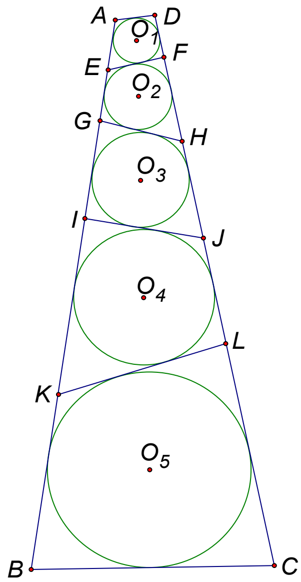


圖 19：五圓外切四邊形，可用 $G_{5(1,1,1,1,1)}^{5,4}$ 表示

從定理 1 的結果中反向思考，如果一個具有一組較長對邊、另一組較短對邊的四邊形，一組較長對邊上有一條對邊連線段長滿足定理 1 的關係式，是否此對邊連線段能將原四邊形

分成兩個各自有內切圓的小圓外切四邊形，本研究發現單是定理 1 的關係式是不夠的，於是我們得到如下的結論：

定理 2：任意四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 為一組較長的對邊，$\overline{AD}$ 和 $\overline{BC}$ 為一組較短的對邊，且 $\overline{AB}+\overline{CD}>\overline{AD}+\overline{BC}$。若可在 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 上分別找到兩點 E 和 F，使得此對邊連線段滿足(1) $\overline{EF}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$ 且(2) $\overline{AE}+\overline{DF}=\dfrac{S}{2}-\overline{BC}$，$S$ 為四邊形 $ABCD$ 的周長，則 $\overline{EF}$ 將原四邊形 $ABCD$ 分成的兩個四邊形 $AEFD$ 和 $EBCF$ 為圓外切四邊形，如圖 20 所示。

證明：參考圖 20，

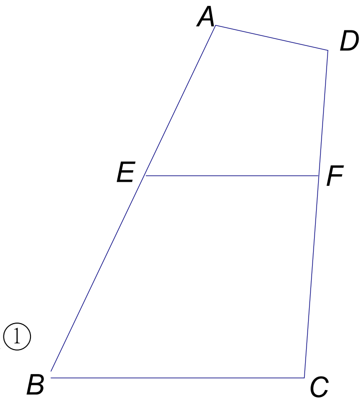


圖 20：具有一組較長對邊的四邊形 $ABCD$，$\overline{EF}$ 為對邊連線段。

1.$\because \overline{AE}+\overline{DF}=\dfrac{S}{2}-\overline{BC}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}}{2}-\dfrac{2\overline{BC}}{2}$

$$=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{AD}-\overline{BC}}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

又 $\overline{EF}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}\Rightarrow \overline{AB}+\overline{DC}=2\overline{EF}+\overline{AD}+\overline{BC}\cdots②$代入①

則① $=\dfrac{2\overline{EF}+\overline{AD}+\overline{BC}+\overline{AD}-\overline{BC}}{2}=\dfrac{2\overline{EF}+2\overline{AD}}{2}=\overline{EF}+\overline{AD}\cdots\cdots\cdots③$

$\therefore$ 四邊形 $AEFD$ 是一個圓外切四邊形

2.在四邊形 $EBCF$ 中，$\overline{EB}+\overline{CF}=\overline{AB}-\overline{AE}+\overline{CD}-\overline{DF}=\overline{AB}+\overline{CD}-\left(\overline{AE}+\overline{DF}\right)$

$$=2\overline{EF}+\overline{AD}+\overline{BC}-\left(\overline{AD}+\overline{EF}\right) \quad (\text{由②及③式})$$

$$=\overline{EF}+\overline{BC}$$

$\therefore$ 四邊形 $EBCF$ 也是一個圓外切四邊形　　　　故得證■

從定理 2 的結果可知，只要一個具有一組較長對邊的四邊形，其對邊連線段長滿足定理 2 中的兩個關係式，則此對邊連線段可將原四邊形分割成兩個小圓外切四邊形，這可視為二圓外切四邊形的判別性質，與幾何學辭典中提到的圓外切四邊形的判別性質[4, p.114]一樣。

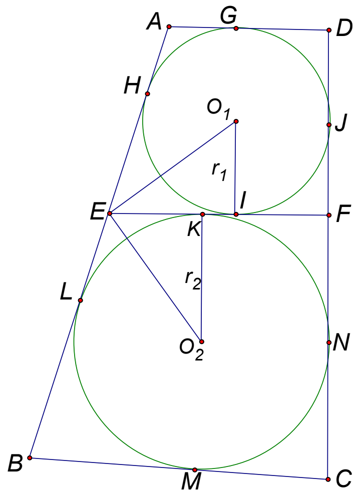
另外在推論 2-1 的研究結果中，我們對四圓外切四邊形 $\mathrm{G}_{4(2,2)}^{2,2}$ 的兩條對邊連線段，$\overline{EG}$ 和

$\overline{HF}$，有頗大的好奇心，觀察到好像兩條線段似乎一樣長，心想如果這兩條對邊線段一樣長，的話，則推論 2-1 中的關係式就會變成 $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$，就可以推導出四圓外切四邊形 $ABCD(\mathrm{G}_{4(2,2)}^{2,2})$內部也有一個與四邊均相切的內切圓，再進而推導得到 n^2 圓外切四邊形內部也有一個大內切圓。以下是我們進一步的探討。

在推導下一個定理 3 的證明前，我們需要先得到一個引理如下

> 引理：四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{EF}$ 為對邊連線段，圓 O_1 與圓 O_2 分別與四邊形 $AEFD$、四邊形 $EBCF$ 相切，切點為 H、G、J、I 與 K、L、M、N。若圓 O_1 的半徑為 r_1，圓 O_2 的半徑為 r_2，則 (1) $\overline{IE}\times\overline{EK}=\overline{IF}\times\overline{FK}=r_1r_2$ ； (2) $\overline{EL}=\overline{JF}$ 且 $\overline{HE}=\overline{FN}$ 。如右圖所示

證明：1. 參考右圖



$\because \Delta EO_1I \sim \Delta O_2EK\,(AA)$

$\therefore \dfrac{\overline{IE}}{\overline{O_2K}}=\dfrac{\overline{O_1I}}{\overline{EK}} \Rightarrow \overline{IE}\times\overline{EK}=\overline{O_1I}\times\overline{O_2K}=r_1r_2$

同理可證 $\Delta O_1IF \sim \Delta FKO_2\,(AA)$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{IF}}{r_2}=\dfrac{\overline{IF}}{\overline{KO_2}}=\dfrac{\overline{O_1I}}{\overline{FK}}=\dfrac{r_1}{\overline{FK}} \quad \Rightarrow \overline{IF}\times\overline{FK}=r_1r_2$

$\therefore \overline{IE}\times\overline{EK}=\overline{IF}\times\overline{FK}=r_1r_2$

2. 由 1 的結果可得 $\Rightarrow \dfrac{\overline{IF}\times\overline{FK}}{\overline{IE}\times\overline{EK}}=\dfrac{r_1r_2}{r_1r_2}=1 \Rightarrow \dfrac{\overline{IF}}{\overline{IE}}\times\dfrac{\overline{FK}}{\overline{EK}}=1 \Rightarrow \dfrac{\overline{IF}}{\overline{IE}}=\dfrac{\overline{EK}}{\overline{FK}}$

令 $\overline{IF}=z$ ，$\overline{KI}=y$ ，$\overline{EK}=x$ ，$\because \overline{IF}\times\overline{FK}=r_1r_2=\overline{IE}\times\overline{EK}$

$\Rightarrow z(y+z)=x(x+y) \Rightarrow z^2+yz=x^2+xy$

$\Rightarrow x^2-z^2=y(z-x) \Rightarrow (x+z)(x-z)=-y(x-z)$

$\Rightarrow (x+z)(x-z)+y(x-z)=0$

$\Rightarrow (x-z)(x+z+y)=0 \Rightarrow x=z$ 或 $x+y+z=0$ (不合)

$\therefore x=z \Rightarrow \overline{EK}=\overline{IF} \Rightarrow \overline{EL}=\overline{JF}$ （圓外一點對圓作兩條切線段會等長[3]）

又 $\overline{IE}=\overline{IK}+\overline{EK}=x+y=z+y=\overline{IF}+\overline{IK}=\overline{KF} \Rightarrow \overline{HE}=\overline{FN}$ 　　　　故得證■

接著我們利用引理推導定理 3 如下，本研究採用數學歸納法來推導證明 n^2 個圓外切四邊形 $\mathrm{G}_{n^2\underbrace{(n,\cdots,n)}_{n}}^{n,2(n-1)}$ 的情形。

定理 3： n^2 個圓外切四邊形($\mathrm{G}_{n^2\underbrace{(n,\cdots,n)}_{n}}^{n,2(n-1)}$)， $n\geq 2$ ，內部有一個與四邊均相切的大內切圓。

證明：1. n=2，參考圖 21，由引理及圓的切線段性質[3]可得，

$$\overline{iE}=\overline{Or}=\overline{FS}=\overline{Ft}\ ,\ \overline{pE}=\overline{Ol}=\overline{Hk}=\overline{Hy}$$

$$\overline{xG}=\overline{Os}=\overline{Fr}=\overline{qF}\ ,\ \overline{Gu}=\overline{Ok}=\overline{lH}=\overline{Hj}$$

$$\therefore \overline{AB}+\overline{CD}=\left(\overline{Ai}+\overline{iE}+\overline{pE}+\overline{Bp}\right)+\left(\overline{Dx}+\overline{xG}+\overline{Gu}+\overline{uC}\right)$$

$$=\overline{Aj}+\overline{Ft}+\overline{Hy}+\overline{Bq}+\overline{Dy}+\overline{qF}+\overline{Hj}+\overline{Ct}$$

$$=\left(\overline{Aj}+\overline{jH}+\overline{Hy}+\overline{yD}\right)+\left(\overline{Bq}+\overline{qF}+\overline{Ft}+\overline{Ct}\right)=\overline{AD}+\overline{BC}$$

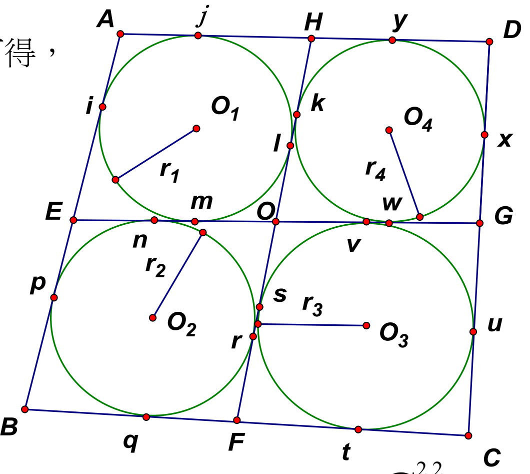


圖 21：四圓外切四邊形 $\mathrm{G}_{4(2,2)}^{2,2}$

由推論 2-1 的關係式， $\overline{AB}+\overline{CD}+2\overline{HF}=\overline{AD}+\overline{BC}+2\overline{EG}$ ，我們可得到 $\overline{HF}=\overline{EG}$

也就是兩條對邊連線段等長，則原四邊形 $ABCD$ 必為內部具有一個和四邊均相切的圓外切四邊形，如圖 21-1，故得證■

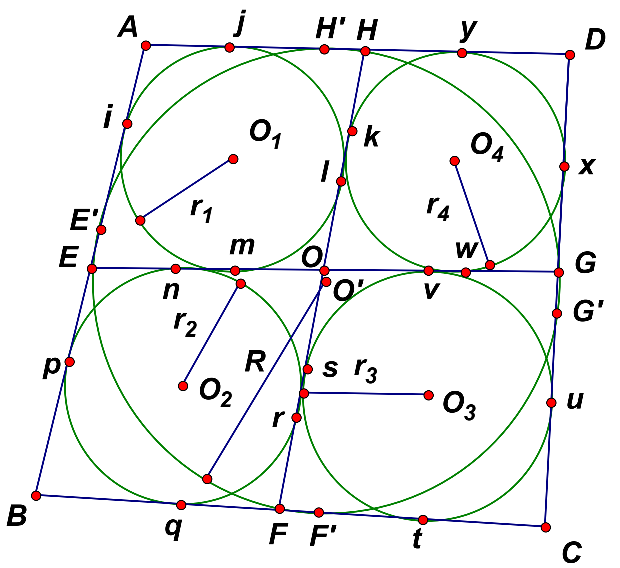
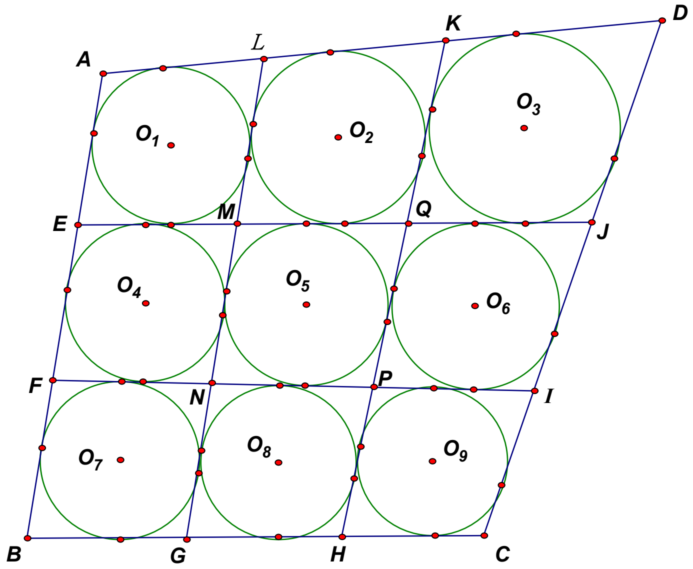


圖 21-1：具有內切圓的四圓外切四邊形 $\mathrm{G}_{4(2,2)}^{2,2}$

2. n=3，(九圓外切四邊形)，如右圖



(1) 在四邊形 $AFPK$ 中，

$\overline{LN}=\overline{EQ}\Rightarrow\overline{LM}+\overline{MN}=\overline{EM}+\overline{MQ}$ ……①

在四邊形 $LNID$ 中，

$\overline{KP}=\overline{MJ}\Rightarrow\overline{KQ}+\overline{QP}=\overline{MQ}+\overline{QJ}$ ……②

在四邊形 $EBHQ$ 中，

$\overline{MG}=\overline{FP}\Rightarrow\overline{MN}+\overline{NG}=\overline{FN}+\overline{NP}$ ……③

在四邊形 $MGCJ$ 中，$\overline{QH}=\overline{NI}\Rightarrow\overline{QP}+\overline{PH}=\overline{NP}+\overline{PI}$ ……④

①+②+③+④ 可得

$\left(\overline{LM}+2\overline{MN}+\overline{NG}\right)+\left(\overline{KQ}+2\overline{QP}+\overline{PH}\right)=\left[\overline{EM}+2\overline{MQ}+\overline{QJ}\right]+\left[\overline{FN}+2\overline{NP}+\overline{PI}\right]$ ……⑤

又四邊形 $MNPQ$ 中，$\overline{MN}+\overline{QP}=\overline{MQ}+\overline{NP}$

⑤式變成$\left(\overline{LM}+\overline{MN}+\overline{NG}\right)+\left(\overline{KQ}+\overline{QP}+\overline{PH}\right)=\left[\overline{EM}+\overline{MQ}+\overline{QJ}\right]+\left[\overline{FN}+\overline{NP}+\overline{PI}\right]$

$\Rightarrow\overline{LG}+\overline{KH}=\overline{EJ}+\overline{FI}$ …………⑥

(2) 在四邊形 $AFPK$ 中，由推論 2-1 可得 $\overline{AF}+2\overline{LN}+\overline{KP}=\overline{AK}+2\overline{EQ}+\overline{FP}$ ……⑦

在四邊形 $KPID$ 中，由定理 1 可得 $\overline{KP}+\overline{DI}=\overline{KD}+2\overline{QJ}+\overline{PI}$ ……⑧

同理 在四邊形 $FBHP$ 中，$\overline{FB}+2\overline{NG}+\overline{PH}=\overline{FP}+\overline{BH}$ ……⑨

在四邊形 $PHCI$ 中，由性質 1 可得 $\overline{PH}+\overline{IC}=\overline{PI}+\overline{HC}$ ……⑩

⑦+⑧+⑨+⑩可得

$$\overline{AF}+2\overline{LN}+\overline{KP}+\overline{KP}+\overline{DI}+\overline{FB}+2\overline{NG}+\overline{PH}+\overline{PH}+\overline{IC}$$
$$=\overline{AK}+2\overline{EQ}+\overline{FP}+\overline{KD}+2\overline{QJ}+\overline{PI}+\overline{FP}+\overline{BH}+\overline{PI}+\overline{HC}$$

$\Rightarrow\overline{AB}+2\left(\overline{LN}+\overline{NG}\right)+2\left(\overline{KP}+\overline{PH}\right)+\overline{DC}=\overline{AD}+2\left(\overline{EQ}+\overline{QJ}\right)+2\left(\overline{FP}+\overline{PI}\right)+\overline{BC}$

$\Rightarrow\overline{AB}+2\overline{LG}+2\overline{KH}+\overline{DC}=\overline{AD}+2\overline{EJ}+2\overline{FI}+\overline{BC}$，又由⑥式$\Rightarrow\overline{AB}+\overline{DC}=\overline{AD}+\overline{BC}$

故 3×3 九圓外切四邊形內有一個與四邊均相切的內切圓(如圖 22 所示) ■

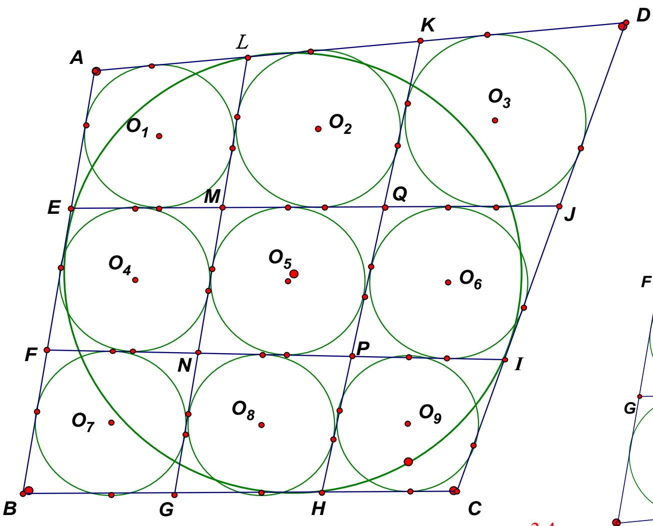


圖 22：九圓外切四邊形，可用表示 $G_{9(3,3,3)}^{3,4}$

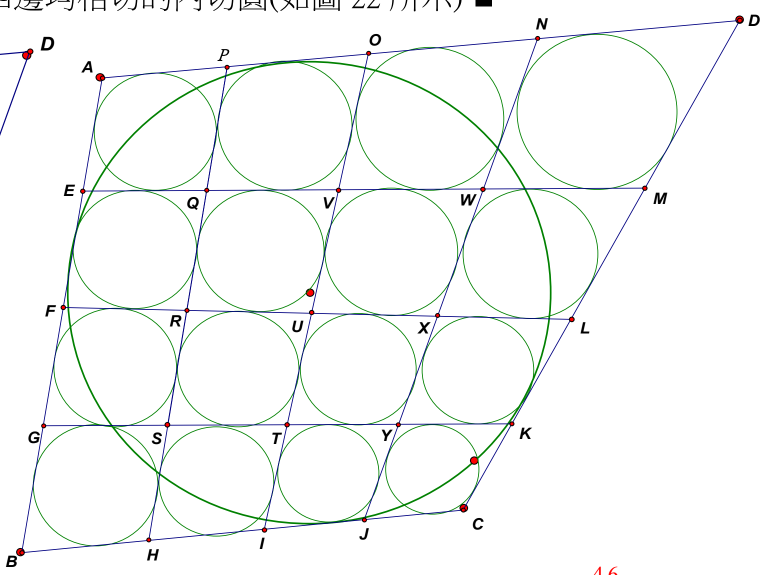


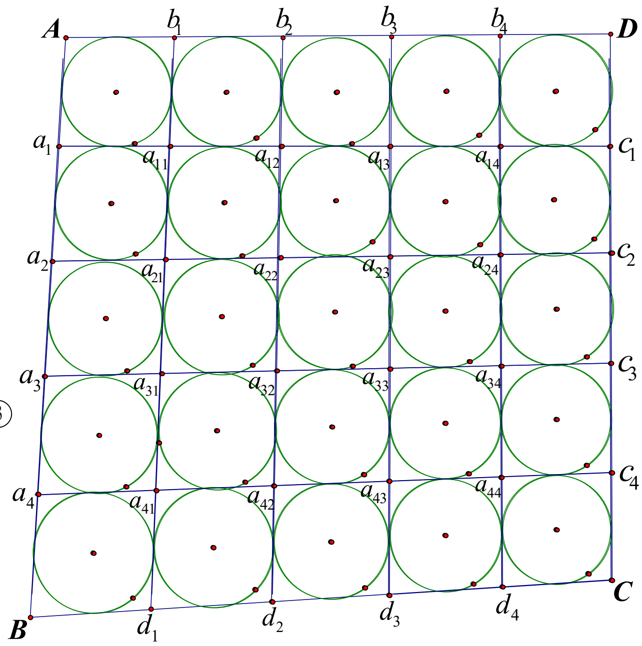
圖 23：十六圓外切四邊形，可用表示 $G_{16(4,4,4,4)}^{4,6}$

如圖 23，n=4，十六圓外切四邊形中同理可證得 $\overline{PH}+\overline{OI}+\overline{NJ}=\overline{EM}+\overline{FL}+\overline{GK}$ 且

$\overline{AB}+2\overline{PH}+2\overline{OI}+2\overline{NJ}+\overline{DC}=\overline{AD}+2\overline{EM}+2\overline{FL}+2\overline{GK}+\overline{BC}\Rightarrow\overline{AB}+\overline{DC}=\overline{AD}+\overline{BC}$ 。

3. n=5，二十五圓外切四邊形，如右圖

(1)在四邊形 $Aa_4a_{44}b_4$ 中，$\overline{b_1a_{41}}+\overline{b_2a_{42}}+\overline{b_3a_{43}}=\overline{a_1a_{14}}+\overline{a_2a_{24}}+\overline{a_3a_{34}}$ ……① 且 $\overline{b_2a_{42}}=\overline{a_2a_{24}}$ ……⑤



在四邊形 $b_1a_{41}c_4D$ 中，

$\overline{b_2a_{42}}+\overline{b_3a_{43}}+\overline{b_4a_{44}}=\overline{a_{11}c_1}+\overline{a_{21}c_2}+\overline{a_{31}c_3}$ ……②

且 $\overline{b_3a_{43}}=\overline{a_{21}c_2}$ ……⑥

在四邊形 $a_1Bd_4a_{14}$ 中，

$\overline{a_{11}d_1}+\overline{a_{12}d_2}+\overline{a_{13}d_3}=\overline{a_2a_{24}}+\overline{a_3a_{34}}+\overline{a_4a_{44}}$ ……③

且 $\overline{a_{12}d_2}=\overline{a_3a_{34}}$ ……⑦

在四邊形 $a_{11}d_1Cc_1$ 中，

$\overline{a_{12}d_2}+\overline{a_{13}d_3}+\overline{a_{14}d_4}=\overline{a_{21}c_2}+\overline{a_{31}c_3}+\overline{a_{41}c_4}$ ……④ 且 $\overline{a_{13}d_3}=\overline{a_{31}c_3}$ ……⑧

①+②+③+④ 可得

$$\begin{aligned}&\left(\overline{b_1a_{11}}+2\overline{a_{11}a_{41}}+\overline{a_{41}d_1}\right)+\left(\overline{b_2a_{12}}+2\overline{a_{12}a_{42}}+\overline{a_{42}d_2}\right)+\left(\overline{b_3a_{13}}+2\overline{a_{13}a_{43}}+\overline{a_{43}d_3}\right)+\left(\overline{b_4a_{14}}+2\overline{a_{14}a_{44}}+\overline{a_{44}d_4}\right)\\&\qquad+\left(\overline{b_2a_{12}}+2\overline{a_{12}a_{42}}+\overline{a_{42}d_2}\right)+\left(\overline{b_3a_{13}}+2\overline{a_{13}a_{43}}+\overline{a_{43}d_3}\right)=\\&\left[\overline{a_1a_{11}}+2\overline{a_{11}a_{14}}+\overline{a_{14}c_1}\right]+\left[\overline{a_2a_{21}}+2\overline{a_{21}a_{24}}+\overline{a_{24}c_2}\right]+\left[\overline{a_3a_{31}}+2\overline{a_{31}a_{34}}+\overline{a_{34}c_3}\right]+\left[\overline{a_4a_{41}}+2\overline{a_{41}a_{44}}+\overline{a_{44}c_4}\right]\\&\qquad+\left[\overline{a_2a_{21}}+2\overline{a_{21}a_{24}}+\overline{a_{24}c_2}\right]+\left[\overline{a_3a_{31}}+2\overline{a_{31}a_{34}}+\overline{a_{34}c_3}\right]\end{aligned}\quad\cdots⑨$$

且⑤+⑥+⑦+⑧

$$\Rightarrow\left(\overline{b_2a_{12}}+2\overline{a_{12}a_{42}}+\overline{a_{42}d_2}\right)+\left(\overline{b_3a_{13}}+2\overline{a_{13}a_{43}}+\overline{a_{43}d_3}\right)=\left[\overline{a_2a_{21}}+2\overline{a_{21}a_{24}}+\overline{a_{24}c_2}\right]+\left[\overline{a_3a_{31}}+2\overline{a_{31}a_{34}}+\overline{a_{34}c_3}\right]$$

又四邊形 $a_{11}a_{41}a_{44}a_{14}$（3×3 九圓外切四邊形）中，

$\overline{a_{11}a_{41}}+\overline{a_{14}a_{44}}=\overline{a_{11}a_{14}}+\overline{a_{41}a_{44}}$ 且 $\overline{a_{12}a_{42}}+\overline{a_{13}a_{43}}=\overline{a_{21}a_{24}}+\overline{a_{31}a_{34}}$

所以⑨式變成

$$\begin{aligned}&\left(\overline{b_1a_{11}}+\overline{a_{11}a_{41}}+\overline{a_{41}d_1}\right)+\left(\overline{b_2a_{12}}+\overline{a_{12}a_{42}}+\overline{a_{42}d_2}\right)+\left(\overline{b_3a_{13}}+\overline{a_{13}a_{43}}+\overline{a_{43}d_3}\right)+\left(\overline{b_4a_{14}}+\overline{a_{14}a_{44}}+\overline{a_{44}d_4}\right)=\\&\quad\left[\overline{a_1a_{11}}+\overline{a_{11}a_{14}}+\overline{a_{14}c_1}\right]+\left[\overline{a_2a_{21}}+\overline{a_{21}a_{24}}+\overline{a_{24}c_2}\right]+\left[\overline{a_3a_{31}}+\overline{a_{31}a_{34}}+\overline{a_{34}c_3}\right]+\left[\overline{a_4a_{41}}+\overline{a_{41}a_{44}}+\overline{a_{44}c_4}\right]\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\overline{b_1d_1}+\overline{b_2d_2}+\overline{b_3d_3}+\overline{b_4d_4}=\overline{a_1c_1}+\overline{a_2c_2}+\overline{a_3c_3}+\overline{a_4c_4}\cdots\cdots⑩$$

(2)在四邊形 $Aa_4a_{44}b_4$ 中，

$$\overline{Aa_4}+2\overline{b_1a_{41}}+2\overline{b_2a_{42}}+2\overline{b_3a_{43}}+\overline{b_4a_{44}}=\overline{Ab_4}+2\overline{a_1a_{14}}+2\overline{a_2a_{24}}+2\overline{a_3a_{34}}+\overline{a_4a_{44}}\cdots⑪$$

在四邊形 $a_4Bd_4a_{44}$ 中， $\overline{a_4B}+2\overline{a_{41}d_1}+2\overline{a_{42}d_2}+2\overline{a_{43}d_3}+\overline{a_{44}d_4}=\overline{a_4a_{44}}+\overline{Bd_4}\cdots⑫$

同理 在四邊形 $b_4a_{44}c_4D$ 中，$\overline{b_4a_{44}}+\overline{Dc_4}=\overline{b_4D}+2\overline{a_{14}c_1}+2\overline{a_{24}c_2}+2\overline{a_{34}c_3}+\overline{a_{44}c_4}\cdots⑬$

在四邊形 $a_{44}d_4Cc_4$ 中， $\overline{a_{44}d_4}+\overline{c_4C}=\overline{a_{44}c_4}+\overline{d_4C}\cdots\cdots⑭$

⑪+⑫+⑬+⑭整理後可得

$$\begin{aligned}&\left(\overline{Aa_4}+\overline{a_4B}\right)+2\left(\overline{b_1a_{41}}+\overline{a_{41}d_1}\right)+2\left(\overline{b_2a_{42}}+\overline{a_{42}d_2}\right)+2\left(\overline{b_3a_{43}}+\overline{a_{43}d_3}\right)+2\left(\overline{b_4a_{44}}+\overline{a_{44}d_4}\right)+\left(\overline{Dc_4}+\overline{c_4C}\right)\\&\quad=\left[\overline{Ab_4}+\overline{b_4D}\right]+2\left[\overline{a_1a_{14}}+\overline{a_{14}c_1}\right]+2\left[\overline{a_2a_{24}}+\overline{a_{24}c_2}\right]+2\left[\overline{a_3a_{34}}+\overline{a_{34}c_3}\right]+2\left[\overline{a_4a_{44}}+\overline{a_{44}c_4}\right]+\left[\overline{Bd_4}+\overline{d_4C}\right]\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\overline{AB}+2\overline{b_1d_1}+2\overline{b_2d_2}+2\overline{b_3d_3}+2\overline{b_4d_4}+\overline{CD}=\overline{AD}+2\overline{a_1c_1}+2\overline{a_2c_2}+2\overline{a_3c_3}+2\overline{a_4c_4}+\overline{BC}\cdots\cdots⑮$$

又由⑩式，⑮式可變成 $\Rightarrow\overline{AB}+\overline{DC}=\overline{AD}+\overline{BC}$

故 5×5 二十五圓外切四邊形內有一個與四邊均相切的內切圓(如圖 24 所示) ■

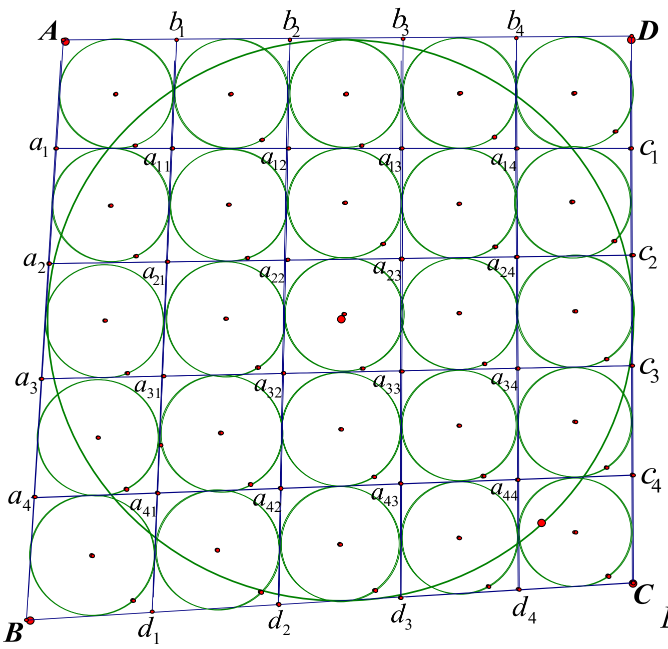


圖 24：二十五圓外切四邊形，

可用表示 $\mathbf{G}^{5,8}_{25(5,5,5,5,5)}$

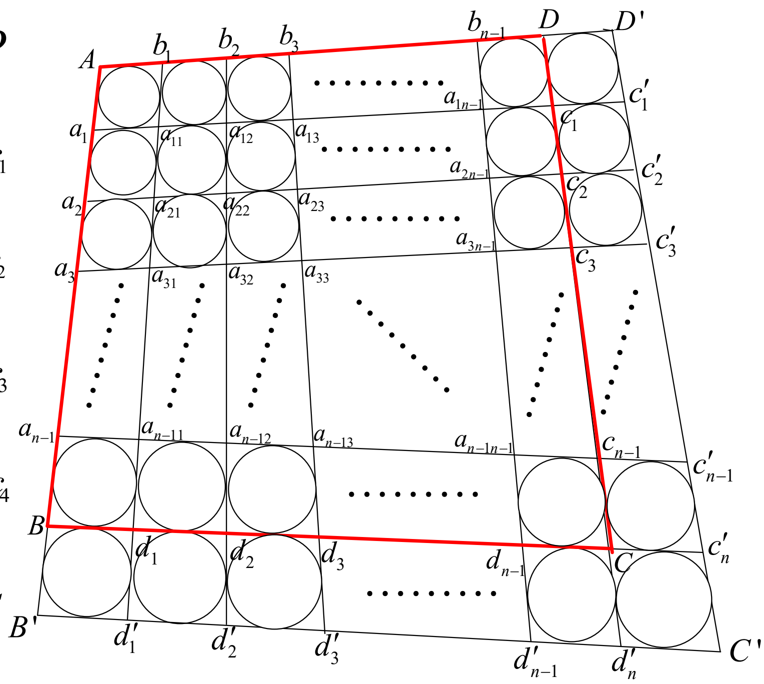


圖 25： n^2 圓外切四邊形，可用 $\mathbf{G}^{n,2(n-1)}_{n^2\underbrace{(n,\cdots,n)}_{n}}$ 表示

4. $n\times n$ (n^2 個圓外切四邊形)，請參考圖 25 之示意圖

若四邊形 $ABCD$ 中有左右方向對邊線段 $\overline{a_1c_1}$ 、 $\overline{a_2c_2}$ 、……. 、 $\overline{a_{n-1}c_{n-1}}$ 及上下方向對邊線段 $\overline{b_1d_1}$ 、 $\overline{b_2d_2}$ 、……、 $\overline{b_{n-1}d_{n-1}}$ 將此四邊形分割成 $n\times n$ 個具有內切圓的小四邊形，則四邊形 $ABCD$ 內部必有一個與四邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{AD}$ 均相切的內切圓的假設成立，則在四邊形 $AB'C'D'$ 中有左右方向對邊線段 $\overline{a_1c_1'}$ 、 $\overline{a_2c_2'}$ 、……. 、 $\overline{Bc_n'}$ 及上下方向對邊線段 $\overline{b_1d_1'}$ 、 $\overline{b_2d_2'}$ 、……、 $\overline{Dd_n'}$ 將此四邊形分割成 $(n+1)\times(n+1)$ 個具有內切圓的小四邊形。由成立的假設可知

在四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{b_1d_1}+\overline{b_2d_2}+\cdots+\overline{b_{n-1}d_{n-1}}=\overline{a_1c_1}+\overline{a_2c_2}+\cdots+\overline{a_{n-1}c_{n-1}}$ ……①

在四邊形 $a_1B'd_n'c_1$ 中， $\overline{a_{11}d_1'}+\overline{a_{12}d_2'}+\cdots+\overline{a_{1n-1}d_{n-1}'}=\overline{a_2c_2}+\overline{a_3c_3}+\cdots+\overline{BC}$ ……②

在四邊形 $b_1d_1c_n'D'$ 中， $\overline{b_2d_2}+\overline{b_3d_3}+\cdots+\overline{DC}=\overline{a_{11}c_1'}+\overline{a_{21}c_2'}+\cdots+\overline{a_{n-11}c_{n-1}'}$ ……③

在四邊形 $a_{11}d_1'C'c_1'$ 中， $\overline{a_{12}d_2'}+\overline{a_{13}d_3'}+\cdots+\overline{c_1d_n'}=\overline{a_{21}c_2'}+\overline{a_{31}c_3'}+\cdots+\overline{d_1c_n'}$ ……④

①+②+③+④ 可得

$$\left(\overline{b_1a_{11}}+2\overline{a_{11}d_1}+\overline{d_1d_1'}\right)+\left(\overline{b_2a_{12}}+2\overline{a_{12}d_2}+\overline{d_2d_2'}\right)+\cdots+\left(\overline{b_{n-1}a_{1n-1}}+2\overline{a_{1n-1}d_{n-1}}+\overline{d_{n-1}d_{n-1}'}\right)$$
$$+\left(\overline{b_2a_{12}}+2\overline{a_{12}d_2}+\overline{d_2d_2'}\right)+\left(\overline{b_3a_{13}}+2\overline{a_{13}d_3}+\overline{d_3d_3'}\right)+\cdots+\left(\overline{b_{n-1}a_{1n-1}}+2\overline{a_{1n-1}d_{n-1}}+\overline{d_{n-1}d_{n-1}'}\right)+\left(\overline{Dc_1}+2\overline{c_1C}+\overline{Cd_n'}\right)$$
$$=\left[\overline{a_1a_{11}}+2\overline{a_{11}c_1}+\overline{c_1c_1'}\right]+\left[\overline{a_2a_{21}}+2\overline{a_{21}c_2}+\overline{c_2c_2'}\right]+\cdots+\left[\overline{a_{n-1}a_{n-11}}+2\overline{a_{n-11}c_{n-1}}+\overline{c_{n-1}c_{n-1}'}\right] \quad \cdots⑤$$
$$+\left[\overline{a_2a_{21}}+2\overline{a_{21}c_2}+\overline{c_2c_2'}\right]+\left[\overline{a_3a_{31}}+2\overline{a_{31}c_3}+\overline{c_3c_3'}\right]+\cdots+\left[\overline{a_{n-1}a_{n-11}}+2\overline{a_{n-11}c_{n-1}}+\overline{c_{n-1}c_{n-1}'}\right]+\left[\overline{Bd_1}+2\overline{d_1C}+\overline{Cc_n'}\right]$$

(一) 若 n 為偶數，則四邊形 $AB'C'D'$ 內部有 $(n+1)\times(n+1)$ [奇×奇]個具有小內切圓的小四邊形，例如 3×3 、 5×5 、 7×7 圓外切四邊形。則

(1) $\overline{a_{11}d_1}+\overline{c_1C}=\overline{a_{11}c_1}+\overline{d_1C}$ 且 $\overline{a_{12}d_2}+\overline{a_{13}d_3}+\cdots+\overline{a_{1n-1}d_{n-1}}=\overline{a_{21}c_2}+\overline{a_{31}c_3}+\cdots+\overline{a_{n-11}c_{n-1}}$ 且

$$\begin{aligned}&\left(\overline{b_2a_{12}}+2\overline{a_{12}d_2}+\overline{d_2d_2'}\right)+\left(\overline{b_3a_{13}}+2\overline{a_{13}d_3}+\overline{d_3d_3'}\right)+\cdots+\left(\overline{b_{n-1}a_{1n-1}}+2\overline{a_{1n-1}d_{n-1}}+\overline{d_{n-1}d_{n-1}'}\right)\\&\quad=\left[\overline{a_2a_{21}}+2\overline{a_{21}c_2}+\overline{c_2c_2'}\right]+\left[\overline{a_3a_{31}}+2\overline{a_{31}c_3}+\overline{c_3c_3'}\right]+\cdots+\left[\overline{a_{n-1}a_{n-11}}+2\overline{a_{n-11}c_{n-1}}+\overline{c_{n-1}c_{n-1}'}\right]\end{aligned}$$

所以⑤式變成

$$\Rightarrow \overline{b_1d_1'}+\overline{b_2d_2'}+\overline{b_3d_3'}+\cdots+\overline{b_{n-1}d_{n-1}'}+\overline{Dd_n'}=\overline{a_1c_1'}+\overline{a_2c_2'}+\overline{a_3c_3'}+\cdots+\overline{a_{n-1}c_{n-1}'}+\overline{Bc_n'}\cdots\cdots⑥$$

(2)在四邊形 $ABCD$ 中，

$$\overline{AB}+2\overline{b_1d_1}+2\overline{b_2d_2}+\cdots+2\overline{b_{n-1}d_{n-1}}+\overline{DC}=\overline{AD}+2\overline{a_1c_1}+2\overline{a_2c_2}+\cdots+2\overline{a_{n-1}c_{n-1}}+\overline{BC}\cdots\cdots⑧$$

在四邊形 $BB'd_n'C$ 中， $\overline{BB'}+2\overline{d_1d_1'}+2\overline{d_2d_2'}+\cdots+2\overline{d_{n-1}d_{n-1}'}+\overline{Cd_n'}=\overline{BC}+\overline{B'd_n'}\cdots\cdots⑨$

在四邊形 $DCc_n'D'$ 中， $\overline{DC}+\overline{D'c_n'}=\overline{DD'}+2\overline{c_1c_1'}+2\overline{c_2c_2'}+\cdots+2\overline{c_{n-1}c_{n-1}'}+\overline{Cc_n'}\cdots\cdots⑩$

在四邊形 $Cd_n'C'c_n'$ 中， $\overline{Cd_n'}+\overline{c_n'C'}=\overline{Cc_n'}+\overline{d_n'C'}\cdots\cdots⑪$

⑧+⑨+⑩+⑪

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ &\overline{AB}+2\overline{b_1d_1}+2\overline{b_2d_2}+\cdots+2\overline{b_{n-1}d_{n-1}}+\overline{DC}+\overline{BB'}+2\overline{d_1d_1'}+2\overline{d_2d_2'}+\cdots+2\overline{d_{n-1}d_{n-1}'}+\overline{Cd_n'}+\overline{DC}+\overline{D'c_n'}\\&+\overline{Cd_n'}+\overline{c_n'C'}=\overline{AD}+2\overline{a_1c_1}+2\overline{a_2c_2}+\cdots+2\overline{a_{n-1}c_{n-1}}+\overline{BC}+\overline{BC}+\overline{B'd_n'}+\overline{DD'}+2\overline{c_1c_1'}+2\overline{c_2c_2'}+\cdots\\&+2\overline{c_{n-1}c_{n-1}'}+\overline{Cc_n'}+\overline{Cc_n'}+\overline{d_n'C'}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ &\overline{AB'}+2\overline{b_1d_1'}+2\overline{b_2d_2'}+\cdots+2\overline{b_{n-1}d_{n-1}'}+2\overline{Dd_n'}+\overline{D'C'}\\&=\overline{AD'}+2\overline{a_1c_1'}+2\overline{a_2c_2'}+\cdots+2\overline{a_{n-1}c_{n-1}'}+2\overline{Bc_n'}+\overline{B'C'}\end{aligned}\cdots\cdots⑫$$

由⑥式，⑫式可變成 $\overline{AB'}+\overline{D'C'}=\overline{AD'}+\overline{B'C'}$ ■

(二) 若 n 為奇數，則四邊形 $AB'C'D'$ 內部有 $(n+1)\times(n+1)$ [偶×偶]個具有小內切圓的小四邊形，例如 4×4 、 6×6 、 8×8 圓外切四邊形。則

$\overline{a_{11}d_1}+\overline{c_1C}=\overline{a_{11}c_1}+\overline{d_1C}$ 且 $\overline{a_{12}d_2}+\overline{a_{13}d_3}+\cdots+\overline{a_{1n-1}d_{n-1}}=\overline{a_{21}c_2}+\overline{a_{31}c_3}+\cdots+\overline{a_{n-11}c_{n-1}}\cdots\cdots⑬$

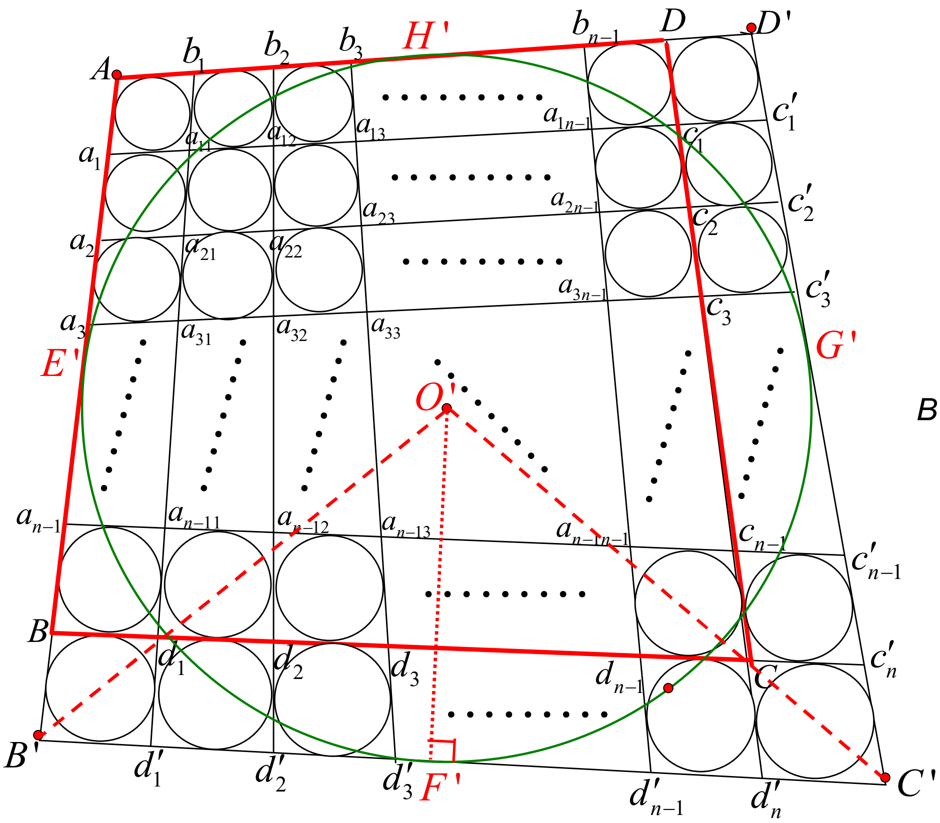
又 $\overline{b_2d_2'}+\overline{b_4d_4'}+\cdots+\overline{b_{n-1}d_{n-1}'}=\overline{a_2c_2'}+\overline{a_4c_4'}+\cdots+\overline{a_{n-1}c_{n-1}'}$ 且

$\overline{b_3d_3'}+\overline{b_5d_5'}+\cdots+\overline{b_{n-2}d_{n-2}'}=\overline{a_3c_3'}+\overline{a_5c_5'}+\cdots+\overline{a_{n-2}c_{n-2}'}\cdots\cdots⑭$

由⑬式，⑤可變成 $\overline{b_1d_1'}+2\overline{b_2d_2'}+\cdots+2\overline{b_{n-1}d_{n-1}'}+\overline{Dd_n'}=\overline{a_1c_1'}+2\overline{a_2c_2'}+\cdots+2\overline{a_{n-1}c_{n-1}'}+\overline{Bc_n'}$

又由⑭式，上式可變成 $\overline{b_1d_1'}+\overline{b_2d_2'}+\cdots+\overline{b_{n-1}d_{n-1}'}+\overline{Dd_n'}=\overline{a_1c_1'}+\overline{a_2c_2'}+\cdots+\overline{a_{n-1}c_{n-1}'}+\overline{Bc_n'}$ ……⑦

由⑦式，⑫式可變成 $\overline{AB'}+\overline{D'C'}=\overline{AD'}+\overline{B'C'}$ (如圖 26 所示) ■



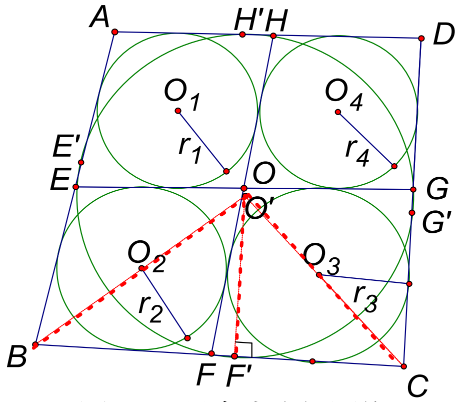


圖 21-1：具有大內切圓的四圓外切四邊形 $G^{2,2}_{4(2,2)}$

圖 26：內部有一大內切圓之 n^2 個圓外切四邊形 $G^{n,2(n-1)}_{n^2\underbrace{(n,\cdots,n)}_{n}}$ 示意圖

定理 3 推導出 n^2 圓外切四邊形($n\geq 2$)內部有一個與四邊均相切的內切圓之後，本研究進一步探討並得到(一)該內切圓與四邊相切的切點把各邊分割成兩段的長度與各內角是有關係的，且(二)內部多條對邊連線段也是唯一的，我們利用四圓外切四邊形為例分析說明如下：

說明：(一)如圖 21-1，四圓外切四邊形的大內切圓圓心為 O'，半徑為 $\overline{O'F'}=R$，與四邊的切點分別為 E'、F'、G'、H'，由高中數學第三冊正切函數定義[5]

令 $\tan\frac{A}{2}=t_A$、$\tan\frac{B}{2}=t_B$、$\tan\frac{C}{2}=t_C$、$\tan\frac{D}{2}=t_D$

因為 $\frac{R}{\overline{CF'}}=\tan\frac{C}{2}\Rightarrow\overline{CF'}=\frac{R}{\tan\frac{C}{2}}$ 且 $\frac{R}{\overline{BF'}}=\tan\frac{B}{2}\Rightarrow\overline{BF'}=\frac{R}{\tan\frac{B}{2}}$

$$\Rightarrow \overline{CF'}:\overline{BF'}=\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}:\frac{1}{\tan\frac{B}{2}}=\tan\frac{B}{2}:\tan\frac{C}{2}$$

$$\therefore \overline{CF'}=\frac{\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}}\times\overline{BC}=\frac{t_B}{t_B+t_C}\times\overline{BC} \text{ 且 } \overline{BF'}=\frac{t_C}{t_B+t_C}\times\overline{BC}$$

同理 $\overline{CG'}:\overline{DG'}=\tan\frac{D}{2}:\tan\frac{C}{2}\Rightarrow\overline{CG'}=\frac{t_D}{t_D+t_C}\times\overline{CD}$ 、 $\overline{DG'}=\frac{t_C}{t_D+t_C}\times\overline{CD}$

$\overline{DH'}:\overline{AH'}=\tan\frac{A}{2}:\tan\frac{D}{2}\Rightarrow\overline{DH'}=\frac{t_A}{t_D+t_A}\times\overline{AD}$ 、 $\overline{AH'}=\frac{t_A}{t_D+t_A}\times\overline{AD}$ 、

$\overline{AE'}:\overline{BE'}=\tan\frac{B}{2}:\tan\frac{A}{2}\Rightarrow\overline{AE'}=\frac{t_B}{t_B+t_A}\times\overline{AB}$ 、 $\overline{BE'}=\frac{t_A}{t_B+t_A}\times\overline{AB}$ ■

也就是，大內切圓之四個切點分別將原四邊形 $ABCD$ 四邊分別分割成兩段，其兩段的長度比為該邊所連接的對應兩內角之半角的正切函數倒數比，推廣到 n^2 圓外切四邊形亦是同理可證(參考圖 26 所示)。

(二) 1. 如圖 21-1，在圓 O_2 、 O_3 中， $\overline{EG}$ 是同時與圓 O_2 、 O_3 相切的切線， $\overline{nv}$ 為外公切線段

$\Rightarrow \overline{nv}=\sqrt{\overline{O_2O_3}^2-(r_2-r_3)^2}$ 且 $\overline{nv}$ 是在連心線段 $\overline{O_2O_3}$ 上方唯一的一條外公切線段。

同理 $\overline{mw}=\sqrt{\overline{O_1O_4}^2-(r_1-r_4)^2}$ 為圓 O_1 、 O_4 的外公切線段，也是在 $\overline{O_1O_4}$ 下方唯一的一條外公切線段。

$\therefore \overline{EG}$ 是唯一一條同時與圓 O_1 及 O_4 、圓 O_2 及 O_3 相切的外公切線。

2. 同理 $\overline{HF}$ 是唯一一條同時與圓 O_1 及 O_2 、圓 O_3 及 O_4 相切的外公切線

$\therefore O$ 為 $\overline{HF}$ 和 $\overline{EG}$ 的交點也是唯一的

同理可證 n^2 個圓外切四邊形 $\mathbf{G}^{n,2(n-1)}_{n^2,\underbrace{(n,n,\cdots,n)}_{n}}$ 中 $n-1$ 條上下方向的對邊連線段分別與 $n-1$ 條左右方向的對邊連線段相交的點也是唯一的。此結果與前面鄒黎明老師的命題[1]之結果是有同樣意義的。

四、在探討完兩圓、三圓、四圓與五圓外切四邊形中，諸條對邊連線段與四邊形四個邊長的關係後，我們進一步以性質 2 為基礎，繼續探討原四邊形的面積與對邊連線段分割出來的 2 個小四邊形的內切圓、3 個小四邊形的內切圓、4 個小四邊形或 5 個小四邊形的內切圓半徑關係，說明如下。

(一) 兩圓外切四邊形內部的情形，

> 定理 4：二圓外切四邊形 $ABCD$ 中，若圓 O_1 的半徑為 r_1 ，圓 O_2 的半徑為 r_2 ，則
>
> 四邊形$ABCD$面積$=\left(\frac{S}{2}-\overline{BC}\right)\times r_1+\left(\frac{S}{2}-\overline{AD}\right)\times r_2$，$S$ 為四邊形 $ABCD$ 的周長，如圖 27 所示

證明：如圖 27，

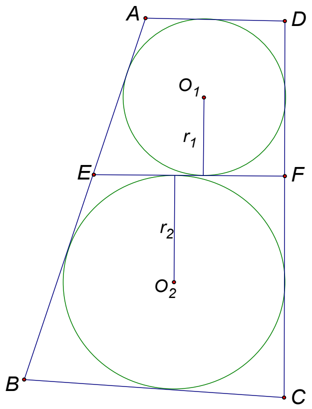


圖 27：二圓外切四邊形 $G_{2(1,1)}^{2,1}$

四邊形 $AEFD$ 面積$=\frac{1}{2}\left(\overline{AD}+\overline{AE}+\overline{EF}+\overline{DF}\right)\times r_1=\frac{1}{2}\left(\overline{AD}+\overline{EF}\right)\times 2\times r_1$

$$=\left(\overline{AD}+\overline{EF}\right)\times r_1$$

同理四邊形 $EBCF$ 面積$=\left(\overline{EF}+\overline{BC}\right)\times r_2$

所以，四邊形 $ABCD$ 面積 $=$ 四邊形$AEFD$ + 四邊形$EBCF$

$$=\left(\overline{AD}+\overline{EF}\right)\times r_1+\left(\overline{EF}+\overline{BC}\right)\times r_2=\left(\overline{AD}+\frac{\overline{AB}+\overline{DC}-\overline{AD}-\overline{BC}}{2}\right)\times r_1+\left(\overline{BC}+\frac{\overline{AB}+\overline{DC}-\overline{AD}-\overline{BC}}{2}\right)\times r_2$$

$$=\frac{\overline{AB}+\overline{DC}+\overline{AD}+\overline{BC}-2\overline{BC}}{2}\times r_1+\frac{\overline{AB}+\overline{DC}+\overline{BC}+\overline{AD}-2\overline{AD}}{2}\times r_2=\left(\frac{S}{2}-\overline{BC}\right)\times r_1+\left(\frac{S}{2}-\overline{AD}\right)\times r_2 \blacksquare$$

(二) 三圓外切四邊形內部的情形，

> 定理 5：三圓外切四邊形 $ABCD$ 中，圓 O_1 、圓 O_2 與圓 O_3 的半徑為 r_1 、 r_2 與 r_3 。
>
> 則四邊形 $ABCD$ 面積$=\left(\frac{S_1}{2}-\overline{FG}\right)\times r_1+\left(\frac{S_1}{2}-\overline{AD}\right)\times r_2+\frac{S_2}{2}\times r_3$ ，
>
> $S_1=$ 四邊形 $AFGD$ 周長、 $S_2=$ 四邊形 $FBCG$ 周長，如圖 28 所示。

證明：由定理 4 及性質 2 可同理證得此結果。

定理 6：三圓外切四邊形 $ABCD$ 中，r_1、r_2與r_3分別為圓O_1、圓O_2與圓O_3的半徑。

則四邊形 $ABCD$ 面積$=\frac{1}{2}\times S_1\times r_1+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{CF}\right)\times r_2+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{EB}\right)\times r_3$，其中

$S_1=$四邊形 $AEFD$ 周長、$S_2=$四邊形 $EBCF$ 周長，如圖 29 所示。

證明：由定理 4 及性質 2 可同理證得此結果。

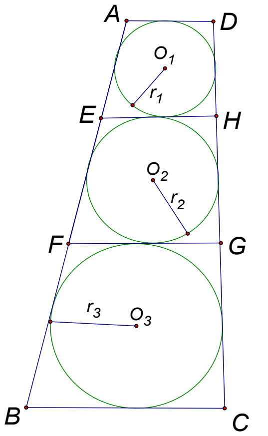


圖 28：三圓外切四邊形 $G^{3,2}_{3(1,1,1)}$

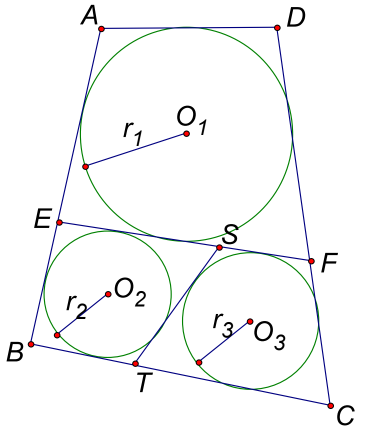


圖 29：三圓外切四邊形 $G^{2,2}_{3(1,2)}$

(三) **四圓外切四邊形內部的情形**，基於定理 4~定理 6 應用於七種內切圓排列方式的四圓外切四邊形，我們繼續發展如下的推論，首先是兩層的 $G^{2,2}_{4(2,2)}$ 排列：

推論 4-1：四圓外切四邊形 $ABCD$ 中，圓O_1、圓O_2、圓O_3與圓O_4的半徑分別為r_1、r_2、r_3與r_4。則四邊形 $ABCD$ 面積$=\left(\frac{S_1}{2}-\overline{BF}\right)\times r_1+\left(\frac{S_1}{2}-\overline{AH}\right)\times r_2+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{HD}\right)\times r_3+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{FC}\right)\times r_4$，

其中$S_1=$四邊形 $ABFH$ 周長、$S_2=$四邊形 $HFCD$ 周長，如圖 30 所示

證明：由定理 4 同理可證得此結果。

其他六種排列方式的結果如下所示：

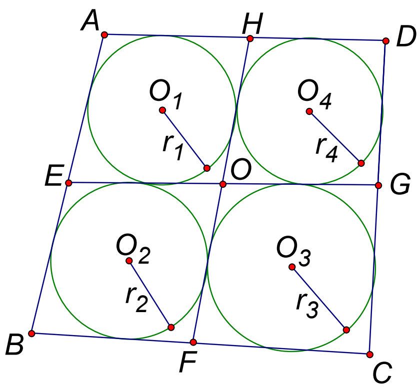


圖 30：四圓外切四邊形 $G^{2,2}_{4(2,2)}$

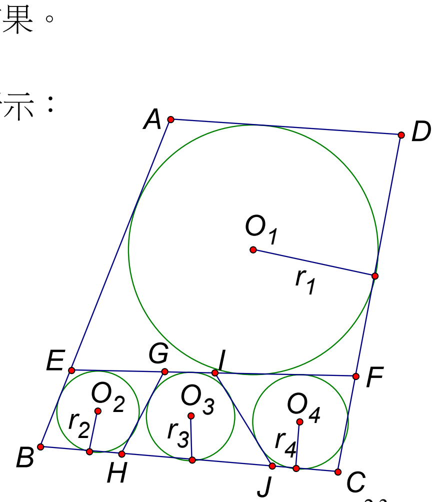


圖 31：四圓外切四邊形 $G^{2,3}_{4(1,3)}$

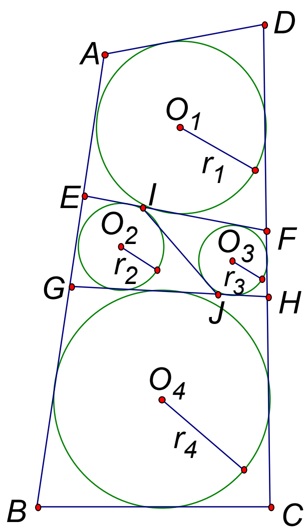


圖 32：四圓外切四邊形 $G^{3,3}_{4(1,2,1)}$

推論 4-2：如圖 31、32、33 所示

在 $G_{4(1,3)}^{2,3}$ 中四邊形 $ABCD$ 面積 $=\dfrac{S_1}{2}\times r_1+\left(\dfrac{S_2}{2}-\overline{IJ}\right)\times r_2+\left(\dfrac{S_2}{2}-\overline{EB}\right)\times r_3+\dfrac{S_3}{2}\times r_4$

$S_1=$ 四邊形 $AEFD$ 周長、$S_2=$ 四邊形 $EBJI$ 周長、$S_3=$ 四邊形 $IJCF$ 周長；

在 $G_{4(1,2,1)}^{3,3}$ 中四邊形 $ABCD$ 面積 $=\dfrac{S_1}{2}\times r_1+\left(\dfrac{S_2}{2}-\overline{FH}\right)\times r_2+\left(\dfrac{S_2}{2}-\overline{EG}\right)\times r_3+\dfrac{S_3}{2}\times r_4$

$S_1=$ 四邊形 $AEFD$ 周長、$S_2=$ 四邊形 $EGHF$ 周長、$S_3=$ 四邊形 $GBCH$ 周長；

在 $G_{4(1,1,1,1)}^{4,3}$ 中四邊形 $ABCD$ 面積

$$=\left[\frac{S_1}{2}-\overline{GH}\right]\times r_1+\left[\frac{S_1}{2}-\overline{AD}\right]\times r_2+\left[\frac{S_2}{2}-\overline{BC}\right]\times r_3+\left[\frac{S_2}{2}-\overline{GH}\right]\times r_4$$

$S_1=$ 四邊形 $AGHD$ 周長、$S_2=$ 四邊形 $GBCH$ 周長

證明：由定理 4 ~ 6 同理可證得上述結果。

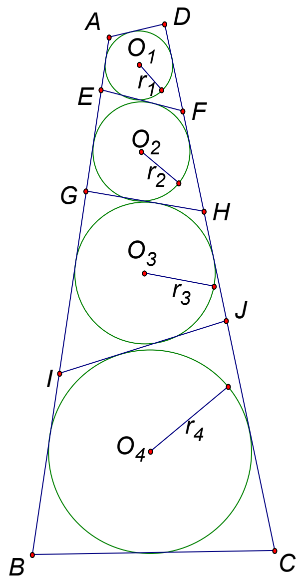


圖 33：四圓外切四邊形 $G_{4(1,1,1,1)}^{4,3}$

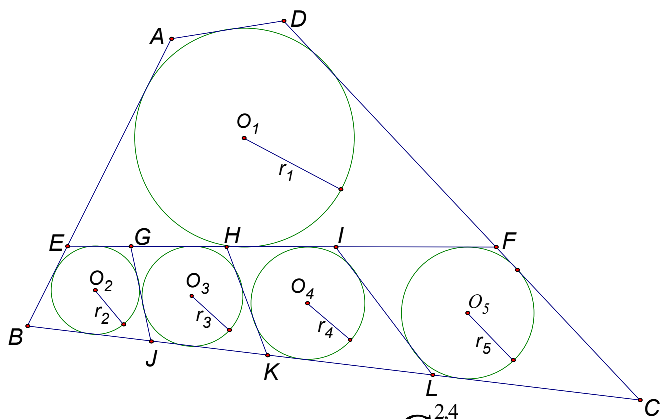


圖 34：五圓外切四邊形 $G_{5(1,4)}^{2,4}$

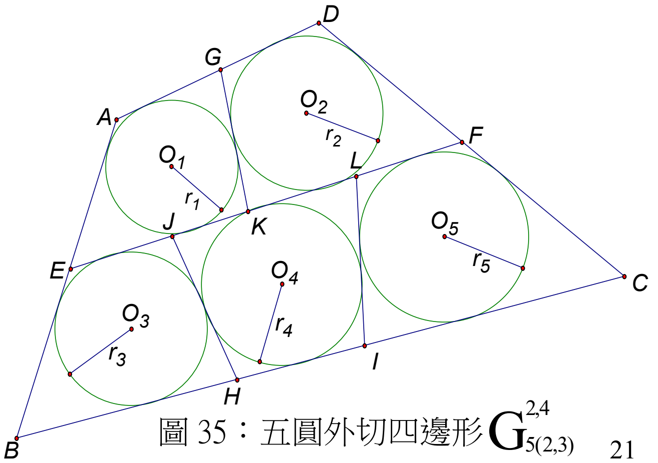


圖 35：五圓外切四邊形 $G_{5(2,3)}^{2,4}$

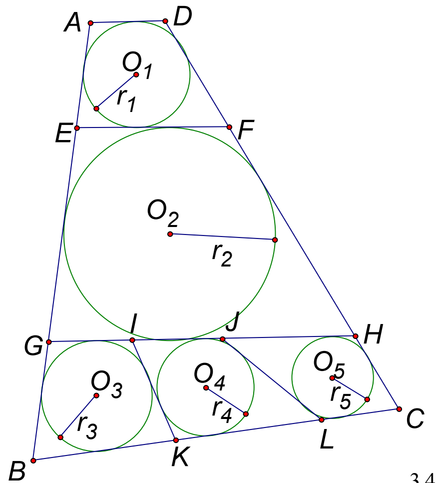


圖 36：五圓外切四邊形 $G_{5(1,1,3)}^{3,4}$

(四) **五圓外切四邊形內部的情形**：五個內切圓有多種排列方式，經整理及分析為九種排列方式，包含$G_{5(1,4)}^{2,4}$、$G_{5(2,3)}^{2,4}$、$G_{5(1,1,3)}^{3,4}$(與$G_{5(1,3,1)}^{3,4}$同)、$G_{5(1,2,2)}^{3,3}$、$G_{5(2,1,2)}^{3,4}$、$G_{5(1,1,1,2)}^{4,4}$(與$G_{5(1,1,2,1)}^{4,4}$同)、和$G_{5(1,1,1,1,1)}^{5,4}$。將上述各排列方式在定理 4 到定理 6 的基礎下，逐一在推論 5-1 至 5-4 中作探討。

推論 5-1：五圓外切四邊形 $ABCD$ 中，圓 O_1、圓 O_2、圓 O_3、圓 O_4、圓 O_5 的半徑分別為 r_1、r_2、r_3、r_4 與 r_5。則四邊形 $ABCD$ 面積

$$=\frac{S_1}{2}\times r_1+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{HK}\right)\times r_2+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{EB}\right)\times r_3+\left(\frac{S_3}{2}-\overline{FC}\right)\times r_4+\left(\frac{S_3}{2}-\overline{HK}\right)\times r_5\text{，}$$

其中 $S_1=$ 四邊形 $AEFD$ 周長、$S_2=$ 四邊形 $EBKH$ 周長、$S_3=$ 四邊形 $HKCF$ 周長，如圖 34 所示。

證明：由性質 2 及定理 4 同理可證得此結果。

推論 5-2：五圓外切四邊形 $ABCD$ 中，圓 O_1、圓 O_2、圓 O_3、圓 O_4、圓 O_5 的半徑分別為 r_1、r_2、r_3、r_4 與 r_5。則四邊形 $ABCD$ 面積

$$=\left(\frac{S_1}{2}-\overline{DF}\right)\times r_1+\left(\frac{S_1}{2}-\overline{AE}\right)\times r_2+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{LI}\right)\times r_3+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{BE}\right)\times r_4+\frac{S_3}{2}\times r_5\text{，}$$

其中 S_1=四邊形 $AEFD$ 周長、S_2=四邊形 $EBIL$ 周長、S_3=四邊形 $LICF$ 周長，如圖 35 所示。

證明：由定理 4、5 同理可證得此結果。

推論 5-3：五圓外切四邊形 $ABCD$ 中，圓 O_1、圓 O_2、圓 O_3、圓 O_4、圓 O_5 的半徑分別為 r_1、r_2、r_3、r_4 與 r_5。則四邊形 $ABCD$ 面積

$$=\left(\frac{S_1}{2}-\overline{GH}\right)\times r_1+\left(\frac{S_1}{2}-\overline{AD}\right)\times r_2+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{JL}\right)\times r_3+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{GB}\right)\times r_4+\frac{S_3}{2}\times r_5$$

，如圖 36 所示。

其中 $S_1=$ 四邊形 $AGHD$ 周長、$S_2=$ 四邊形 $GBLJ$ 周長、$S_3=$ 四邊形 $JLCH$ 周長，

證明：由定理 4、5 同理可證得此結果。

推論 5-4：如圖 37、38、39 所示

在 $G_{5(1,2,2)}^{3,3}$ 中，四邊形 $ABCD$ 面積

$$=\frac{S_1}{2}\times r_1+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{FH}\right)\times r_2+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{EG}\right)\times r_4+\left(\frac{S_3}{2}-\overline{HC}\right)\times r_3+\left(\frac{S_3}{2}-\overline{GB}\right)\times r_5$$

其中 $S_1=$四邊形 $AEFD$ 周長、 $S_2=$四邊形 $EGHF$ 周長、 $S_3=$四邊形 $GBCH$ 周長

在 $G_{5(1,3,1)}^{3,4}$ 中，四邊形 $ABCD$ 面積$=\frac{S_1}{2}\times r_1+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{KL}\right)\times r_2+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{EG}\right)\times r_3+\frac{S_3}{2}\times r_4+\frac{S_4}{2}\times r_5$

其中 $S_1=$四邊形 $AEFD$ 周長、 $S_2=$四邊形 $EGLK$ 周長、 $S_3=$四邊形 $KLHF$ 周長、

$S_4=$四邊形 $GBCH$ 周長

在 $G_{5(2,1,2)}^{3,4}$ 中，四邊形 $ABCD$ 面積

$$=\left(\frac{S_1}{2}-\overline{DF}\right)\times r_1+\left(\frac{S_1}{2}-\overline{AE}\right)\times r_2+\frac{S_2}{2}\times r_3+\left(\frac{S_3}{2}-\overline{HC}\right)\times r_4+\left(\frac{S_3}{2}-\overline{GB}\right)\times r_5 ，$$

其中 $S_1=$四邊形 $AEFD$ 周長、 $S_2=$四邊形 $EGHF$ 周長、 $S_3=$四邊形 $GBCH$ 周長

證明：由定理 4、5 同理可證得此結果。

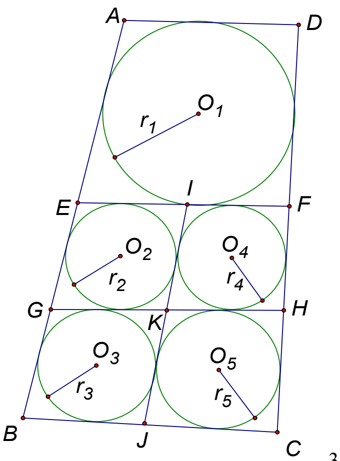


圖 37：五圓外切四邊形 $G_{5(1,2,2)}^{3,3}$

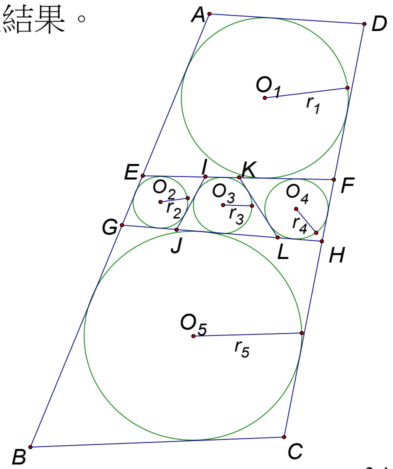


圖 38：五圓外切四邊形 $G_{5(1,3,1)}^{3,4}$

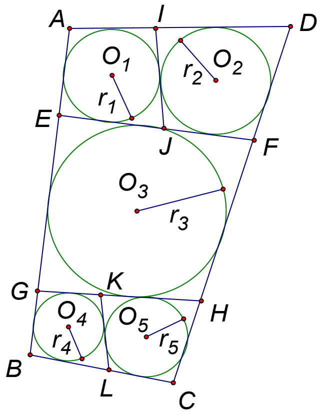


圖 39：五圓外切四邊形 $G_{5(2,1,2)}^{3,4}$

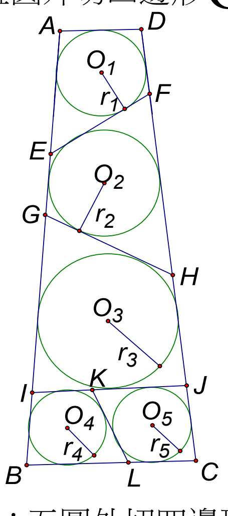


圖 40：五圓外切四邊形 $G_{5(1,1,1,2)}^{4,4}$

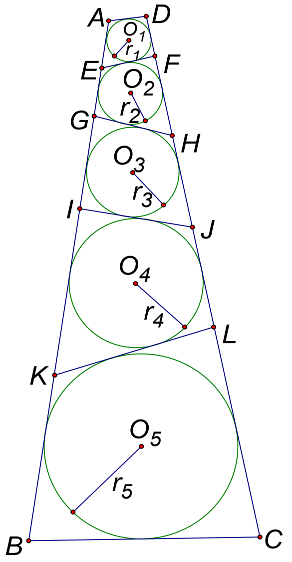


圖 41：五圓外切四邊形 $G_{5(1,1,1,1,1)}^{5,4}$

推論 5-5：如圖 40、41 所示

在 $G_{5(1,1,1,2)}^{4,4}$ 中，四邊形 $ABCD$ 面積

$$=\left(\frac{S_1}{2}-\overline{GH}\right)\times r_1+\left(\frac{S_1}{2}-\overline{AD}\right)\times r_2+\frac{S_2}{2}\times r_3+\left(\frac{S_3}{2}-\overline{JC}\right)\times r_4+\left(\frac{S_3}{2}-\overline{IB}\right)\times r_5$$

其中 $S_1=$ 四邊形 $AGHD$ 周長、 $S_2=$ 四邊形 $GIJH$ 周長、 $S_3=$ 四邊形 $IBCJ$ 周長

在 $G_{5(1,1,1,1,1)}^{5,4}$ 中，四邊形 $ABCD$ 面積

$$=\left(\frac{S_1}{2}-\overline{GH}\right)\times r_1+\left(\frac{S_1}{2}-\overline{AD}\right)\times r_2+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{KL}\right)\times r_3+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{GH}\right)\times r_4+\frac{S_3}{2}\times r_5$$

其中 $S_1=$ 四邊形 $AGHD$ 周長、 $S_2=$ 四邊形 $GKLH$ 周長、 $S_3=$ 四邊形 $KBCL$ 周長

證明：由定理 4、5 同理可證得此結果。

伍、研究結果

一、多圓外切四邊形的對邊連線段長與四邊形二組對邊長的關係，統整如下：

(一)兩圓外切四邊形的對邊連線段與四邊形 $ABCD$ 兩組對邊長的關係為

$$\overline{EF}=\frac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$$ 。

(二) 三圓外切四邊形的排列方式有兩種，即為三層的 $G_{3(1,1,1)}^{3,2}$ 與兩層的 $G_{3(1,2)}^{2,2}$ 。第一種排列的對邊連線段與四邊形 $ABCD$ 兩組對邊長的關係為 $\overline{EH}+\overline{FG}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{CD}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$；第二種排列的對邊連線段與四邊形 $ABCD$ 兩組對邊長的關係為

$$\overline{EF}-\overline{ST}=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$$ 。

(三)四圓外切四邊形的排列方式有六種，即為兩層的 $G_{4(2,2)}^{2,2}$ 、 $G_{4(1,3)}^{2,3}$ 與 $G_{4(3,1)}^{2,3}$ 、三層的 $G_{4(1,1,2)}^{3,3}$ 與 $G_{4(1,2,1)}^{3,3}$ 、四層的 $G_{4(1,1,1,1)}^{4,3}$ 。兩層排列的兩條對邊連線段 $\overline{EG}$ 和 $\overline{HF}$ 之長度與四邊形 $ABCD$ 兩組對邊長的關係為 $\overline{EG}-\overline{HF}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{CD}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$ （$G_{4(2,2)}^{2,2}$）、

$\overline{EF}-\overline{GH}-\overline{IJ}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{CD}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$（$G_{4(1,3)}^{2,3}$ ）；三層排列的對邊連線段與四邊形 $ABCD$ 兩組對邊長的關係 $\overline{EF}+\overline{GH}-\overline{IJ}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{CD}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$（$G_{4(1,2,1)}^{3,3}$）；四層排列的對邊連線段與四邊形 $ABCD$ 兩組對邊長的關係為 $\overline{EF}+\overline{GH}+\overline{IJ}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{CD}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$（$G_{4(1,1,1,1)}^{4,3}$）。

(四)五圓外切四邊形的排列方式、諸條對邊連線段和二組對邊長的關係如下表(一)所列。

(五) n 圓外切四邊形中，內切圓排列方式會有更多種，但其所有對邊線段長與四邊形二組對邊長之關係仍是依表(一)中關係式的規律呈現的。

二、任意四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 為較長的一組對邊，$\overline{AD}$ 和 $\overline{BC}$ 為較短的一組對邊，且 $\overline{AB}+\overline{CD}>\overline{AD}+\overline{BC}$ 。若可在 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 上分別找到兩點 E 和 F，使得此對邊連線段長滿足(1) $\overline{EF}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$ 且(2) $\overline{AE}+\overline{DF}=\dfrac{S}{2}-\overline{BC}$ ，則 $\overline{EF}$ 將原四邊形 $ABCD$ 分成的兩個四邊形 $AEFD$ 和 $EBCF$ 為圓外切四邊形。

三、四圓外切四邊形 $G_{4(2,2)}^{2,2}$ 、九圓外切四邊形 $G_{9(3,3,3)}^{3,4}$ ，……，n^2 圓外切四邊形 $G_{n^2\underbrace{(n,\ldots,n)}_{n}}^{n,2\times(n-1)}$ ，$n\geq 2$ ，必為內部有一個與四邊均相切的最大內切圓之圓外切四邊形，且該內切圓之四個切點分別將四邊分割成兩段，其兩段的長度比為該邊所連接的兩對應內角之半角的正切函數倒數比。同時，n^2 個圓外切四邊形 $G_{n^2\underbrace{(n,\cdots,n)}_{n}}^{n,2(n-1)}$ 中 $n-1$ 條上下方向的對邊連線段分別與 $n-1$ 條左右方向的對邊連線段相交的點也是唯一的。其他排列情形的多圓外切四邊形之諸條對邊連線段中如果是多個圓的外公切線段，則該對邊連線段是唯一的，但與其他非外公切線段的對邊連線段之交點則不是唯一的。

四、多圓外切四邊形面積與對邊線分割出來的諸個小四邊形之內切圓半徑關係統整如下：

(一)兩圓外切四邊形$ABCD$面積$=\left(\dfrac{S}{2}-\overline{BC}\right)\times r_1+\left(\dfrac{S}{2}-\overline{AD}\right)\times r_2$

(二)三圓外切四邊形的排列方式有兩種，即為三層的 $G_{3(1,1,1)}^{3,2}$ 與兩層的 $G_{3(1,2)}^{2,2}$ 。第一種排列

的四邊形 $ABCD$ 面積 $=\left(\dfrac{S_1}{2}-\overline{FG}\right)\times r_1+\left(\dfrac{S_1}{2}-\overline{AD}\right)\times r_2+\dfrac{S_2}{2}\times r_3$；第二種排列的四邊形

$ABCD$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\times S_1\times r_1+\left(\dfrac{S_2}{2}-\overline{CF}\right)\times r_2+\left(\dfrac{S_2}{2}-\overline{EB}\right)\times r_3$。

(三)四圓、五圓外切四邊形的排列方式、諸條對邊連線段分割四邊形成多個小四邊形的內切圓半徑與原四邊形 $ABCD$ 面積的關係如下表(二)、表(三)所列。

(四)n 圓外切四邊形中，內切圓排列方式會有更多種，所有內切圓半徑與四邊形面積的關係式仍是依表(三)中所列關係式的規律呈現的。

	層數	圖形簡記	對邊線段長與四邊形 $ABCD$ 二組對邊長關係
五圓外切四邊形	2	$G^{2,4}_{5(1,4)}$	$\overline{EF}-\left(\overline{IL}+\overline{HK}+\overline{GJ}\right)=\dfrac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$
		$G^{2,4}_{5(2,3)}$	$\overline{EF}-\left(\overline{GK}+\overline{LI}+\overline{JH}\right)=\dfrac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$
	3	$G^{3,4}_{5(1,1,3)}$	$\overline{EF}+\overline{GH}-\left(\overline{IK}+\overline{JL}\right)=\dfrac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$
		$G^{3,3}_{5(1,2,2)}$	$\overline{EF}+\overline{GH}-\overline{IJ}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$
		$G^{3,4}_{5(1,3,1)}$	$\overline{EF}+\overline{GH}-\left(\overline{KL}+\overline{IJ}\right)=\dfrac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$
		$G^{3,4}_{5(2,1,2)}$	$\overline{EF}+\overline{GH}-\left(\overline{IJ}+\overline{KL}\right)=\dfrac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$
	4	$G^{4,4}_{5(1,1,1,2)}$	$\overline{EF}+\overline{GH}+\overline{IJ}-\overline{KL}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$
		$G^{4,4}_{5(1,1,2,1)}$	$\overline{EF}+\overline{GH}+\overline{IJ}-\overline{KL}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$
	5	$G^{5,4}_{5(1,1,1,1,1)}$	$\overline{EF}+\overline{GH}+\overline{IJ}+\overline{KL}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$

表(一)

<table>
<tr><td></td><td>層數</td><td>圖形簡記</td><td>四邊形 $ABCD$ 面積與諸個內切圓半徑關係</td></tr>
<tr><td rowspan="7">四圓外切四邊形</td><td rowspan="3">2</td><td>$G_{4(2,2)}^{2,2}$</td><td>四邊形 $ABCD$ 面積
$=\left(\frac{S_1}{2}-\overline{BF}\right)\times r_1+\left(\frac{S_1}{2}-\overline{AH}\right)\times r_2+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{HD}\right)\times r_3+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{FC}\right)\times r_4$</td></tr>
<tr><td>$G_{4(1,3)}^{2,3}$</td><td>四邊形 $ABCD$ 面積
$=\frac{S_1}{2}\times r_1+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{IJ}\right)\times r_2+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{EB}\right)\times r_3+\frac{S_3}{2}\times r_4$</td></tr>
<tr><td>$G_{4(3,1)}^{2,3}$</td><td>與 $G_{4(1,3)}^{2,3}$ 的結果相似</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3</td><td>$G_{4(1,2,1)}^{3,3}$</td><td>四邊形 $ABCD$ 面積
$=\frac{S_1}{2}\times r_1+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{FH}\right)\times r_2+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{EG}\right)\times r_3+\frac{S_3}{2}\times r_4$</td></tr>
<tr><td>$G_{4(1,1,2)}^{3,3}$</td><td>與 $G_{4(1,2,1)}^{3,3}$ 的結果相似</td></tr>
<tr><td>$G_{4(2,1,1)}^{3,3}$</td><td>與 $G_{4(1,2,1)}^{3,3}$ 的結果相似</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$G_{4(1,1,1,1)}^{4,3}$</td><td>四邊形 $ABCD$ 面積
$=\left[\frac{S_1}{2}-\overline{GH}\right]\times r_1+\left[\frac{S_1}{2}-\overline{AD}\right]\times r_2+\left[\frac{S_2}{2}-\overline{BC}\right]\times r_3+\left[\frac{S_2}{2}-\overline{GH}\right]\times r_4$</td></tr>
</table>

表(二)

	層數	圖形簡記	四邊形 $ABCD$ 面積與諸個內切圓半徑關係
五圓外切四邊形	2	$\mathbf{G}_{5(1,4)}^{2,4}$	四邊形 $ABCD$ 面積 $=\frac{S_1}{2}\times r_1+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{HK}\right)\times r_2+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{EB}\right)\times r_3+\left(\frac{S_3}{2}-\overline{FC}\right)\times r_4+\left(\frac{S_3}{2}-\overline{HK}\right)\times r_5$
		$\mathbf{G}_{5(2,3)}^{2,4}$	四邊形 $ABCD$ 面積 $=\left(\frac{S_1}{2}-\overline{DF}\right)\times r_1+\left(\frac{S_1}{2}-\overline{AE}\right)\times r_2+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{LI}\right)\times r_3+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{BE}\right)\times r_4+\frac{S_3}{2}\times r_5$
	3	$\mathbf{G}_{5(1,1,3)}^{3,4}$	四邊形 $ABCD$ 面積 $=\left(\frac{S_1}{2}-\overline{GH}\right)\times r_1+\left(\frac{S_1}{2}-\overline{AD}\right)\times r_2+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{JL}\right)\times r_3+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{GB}\right)\times r_4+\frac{S_3}{2}\times r_5$
		$\mathbf{G}_{5(1,2,2)}^{3,3}$	四邊形 $ABCD$ 面積 $=\frac{S_1}{2}\times r_1+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{FH}\right)\times r_2+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{EG}\right)\times r_4+\left(\frac{S_3}{2}-\overline{HC}\right)\times r_3+\left(\frac{S_3}{2}-\overline{GB}\right)\times r_5$
		$\mathbf{G}_{5(1,3,1)}^{3,4}$	四邊形 $ABCD$ 面積 $=\frac{S_1}{2}\times r_1+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{KL}\right)\times r_2+\left(\frac{S_3}{2}-\overline{EG}\right)\times r_3+\frac{S_3}{2}\times r_4+\frac{S_4}{2}\times r_5$
		$\mathbf{G}_{5(2,1,2)}^{3,4}$	四邊形 $ABCD$ 面積 $=\left(\frac{S_1}{2}-\overline{DF}\right)\times r_1+\left(\frac{S_1}{2}-\overline{AE}\right)\times r_2+\frac{S_2}{2}\times r_3+\left(\frac{S_3}{2}-\overline{HC}\right)\times r_4+\left(\frac{S_3}{2}-\overline{GB}\right)\times r_5$
	4	$\mathbf{G}_{5(1,1,1,2)}^{4,4}$	四邊形 $ABCD$ 面積 $=\left(\frac{S_1}{2}-\overline{GH}\right)\times r_1+\left(\frac{S_1}{2}-\overline{AD}\right)\times r_2+\frac{S_2}{2}\times r_3+\left(\frac{S_3}{2}-\overline{JC}\right)\times r_4+\left(\frac{S_3}{2}-\overline{IB}\right)\times r_5$
		$\mathbf{G}_{5(1,1,2,1)}^{4,4}$	與 $\mathbf{G}_{5(1,1,1,2)}^{4,4}$ 的結果相似
	5	$\mathbf{G}_{5(1,1,1,1,1)}^{5,4}$	四邊形 $ABCD$ 面積 $=\left(\frac{S_1}{2}-\overline{GH}\right)\times r_1+\left(\frac{S_1}{2}-\overline{AD}\right)\times r_2+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{KL}\right)\times r_3+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{GH}\right)\times r_4+\frac{S_3}{2}\times r_5$

表(三)

陸、結論與討論

一、多圓外切四邊形的多條對邊線段長與四邊形二組對邊長的關係式為左右方向的對邊連線段之和減去上下方向的對邊連線段之和皆等於 $\dfrac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$ 這種規律格式。

二、任意四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 為較長的一組對邊，$\overline{AD}$ 和 $\overline{BC}$ 為較短的一組對邊，且 $\overline{AB}+\overline{CD}>\overline{AD}+\overline{BC}$。若可在 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 上分別找到兩點 E 和 F，使得此對邊線段長滿足 $\overline{EF}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$ 且 $\overline{AE}+\overline{DF}=\dfrac{S}{2}-\overline{BC}$，則 $\overline{EF}$ 將原四邊形 $ABCD$ 分成的兩個四邊形 $AEFD$ 和 $EBCF$ 皆為圓外切四邊形。也可視為二圓外切四邊形的判別性質。

三、四圓外切四邊形 $G_{4(2,2)}^{2,2}$、九圓外切四邊形 $G_{9(3,3,3)}^{3,4}$，……，n^2 圓外切四邊形 $G_{n^2\underbrace{(n,\ldots,n)}_{n}}^{n,2\times(n\text{-}1)}$，$n\ge 2$，必為內部有一個與四邊均相切的最大內切圓之圓外切四邊形，且該大內切圓之四個切點分別將原四邊形的四邊分割成兩段，其兩段的長度比為該邊所連接的兩對應內角之半角的正切函數倒數比，同時，n^2 個圓外切四邊形 $G_{n^2\underbrace{(n,\cdots,n)}_{n}}^{n,2(n-1)}$ 中 $n-1$ 條上下方向的對邊連線段分別與 $n-1$ 條左右方向的對邊連線段相交的點也是唯一的。此結果對於鮮少有內角與邊長關係之資料的圓外切四邊形增添了一筆可供參考的特別性質。

四、多圓外切四邊形的面積皆可由一圓外切四邊形 $G_{1(1)}^{1,0}$ 和兩圓外切四邊形($G_{2(1,1)}^{2,1}$)所組合而成。以這兩種圓外切四邊形為基礎，可推導出各種不同排列方式的多圓外切四邊形面積與對邊連線段分割出來的諸個小四邊形之內切圓半徑關係式。

五、研究過程中，透過老師細心的指導、彼此討論和合作、不斷挑戰及再突破，讓研究能夠有一些結果，覺得頗有收穫且很有成就感，我們將在未來學習的路上繼續努力。

柒、未來展望

一、推廣到圓外切 n 邊形的各種相關性質探討是我們未來想要發展的重點。

二、除了本研究的二圓外切四邊形的判別性質，多圓外切四邊形的判別性質也是未來發展的目標之一。

三、本研究中針對各種多圓外切四邊形的不同排列方式採用新名詞 $G_{C(l_1,l_2,\cdots,l_n)}^{L,N}$ 來簡記，讓我們覺察到此圖形簡記的每個數字(四個變數)似乎涉及到整數拆分的規律性或四個變數是否決定了此平面圖形的結構？甚至推廣到立體圖形時，又會有那些變數來決定其結構？這也是未來可以繼續探討的方向之一。

捌、參考資料

1、鄒黎明,【涉及三個內切圓的一個有趣結論】,數學傳播期刊 40 卷 1 期, 2016 年 3 月

2、鄒黎明,【一組平面幾何公式的思考】,數學傳播期刊 39 卷 4 期, 2015 年

3、徐立民等編著，國中數學第五冊，新北市：康軒文教公司，2016 年。

4、笹部真市郎原著，幾何學辭典，九章出版社譯，2003 年。

5、林福來等編著，高中數學第三冊，台南市：南一書局，2016 年。

【評語】030421

探討將四邊形分切為若干個小四邊形，在每個分切出的小四邊形都有內切圓的前提下，藉由簡單的切線段長的性質，得出了當四邊形分切為兩個四邊形，在分切出的四邊形都有內切圓的情形下，分切線長應該滿足的條件。以此為基礎，進一步將結果擴展到分切出多個四邊形的情況。想法很有意思，說明也很清楚，值得嘉許。將一個簡單的幾何量問題發想成一個有系統的計算問題，研究的精神和數學的思考都值得鼓勵。可惜是問題本身格局不大，許多結果已經可以推廣到一般的情形，但是沒有看出來，是可惜之處。建議除了目前的純計算所得的結果外，是否能看出更多數學上意外的新發現，這樣整篇科展的價值會大幅提升。

作品海報

壹、研究目的：

1.多圓外切四邊形中對邊連線段長與原四邊形的邊長關係。
2.多圓外切四邊形中，所有內切圓半徑與四邊形的面積關係。
3.在特定的n^2圓外切四邊形中，對邊連線段之關係探討
4.在多圓外切四邊形中，找出各組對邊的對邊連線段與兩組對邊和的關係與其對應的判別性質探討。

貳、研究過程與方法

一、已知性質與名詞定義

二、(一)多圓外切四邊形中各種對邊連線段與原四邊形邊長關係的探討。

(二)多圓外切四邊形中，各組對邊的對邊連線段與兩組對邊和的關係與其對應的性質探討。

(三)特定的n^2圓外切四邊形中特定的對邊連線段和之關係探討。

三、多圓外切四邊形中，諸條對邊連線段所分割出來的小四邊形之內切圓半徑與四邊形面積的關係。

四、推廣到圓外切五邊形的初步結果。

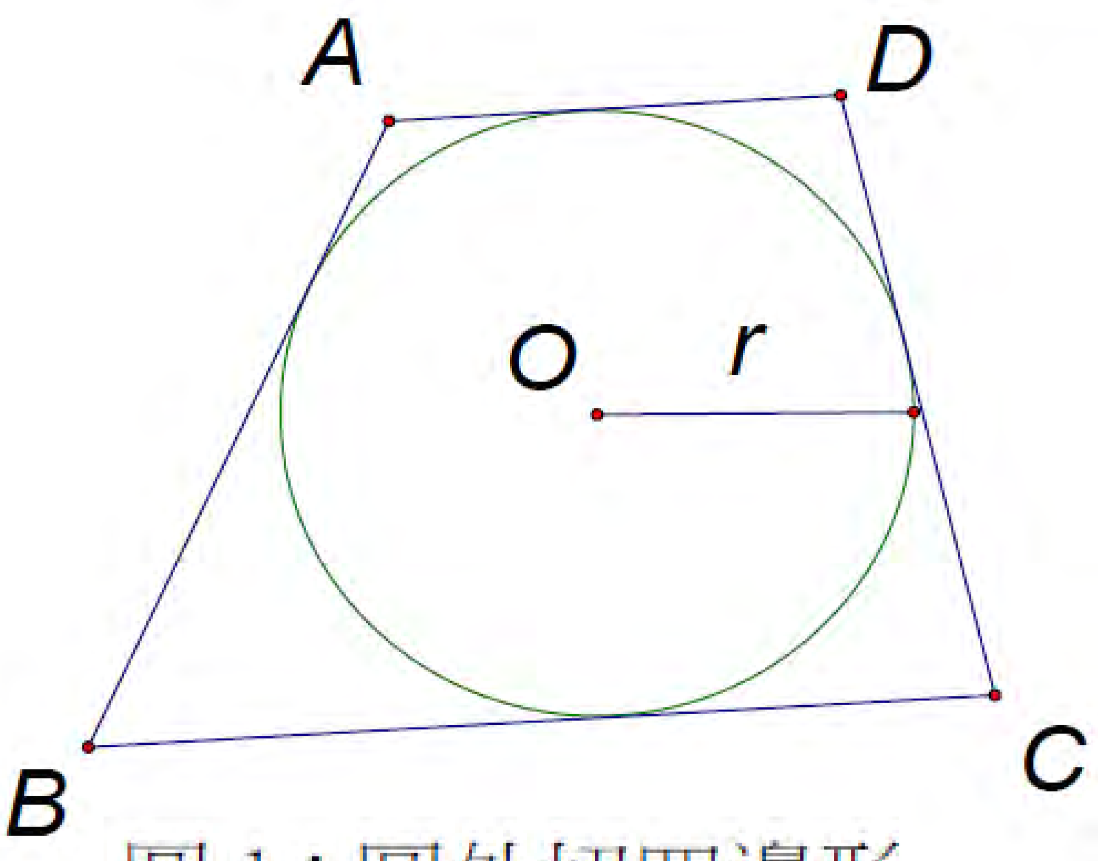


圖 1：圓外切四邊形

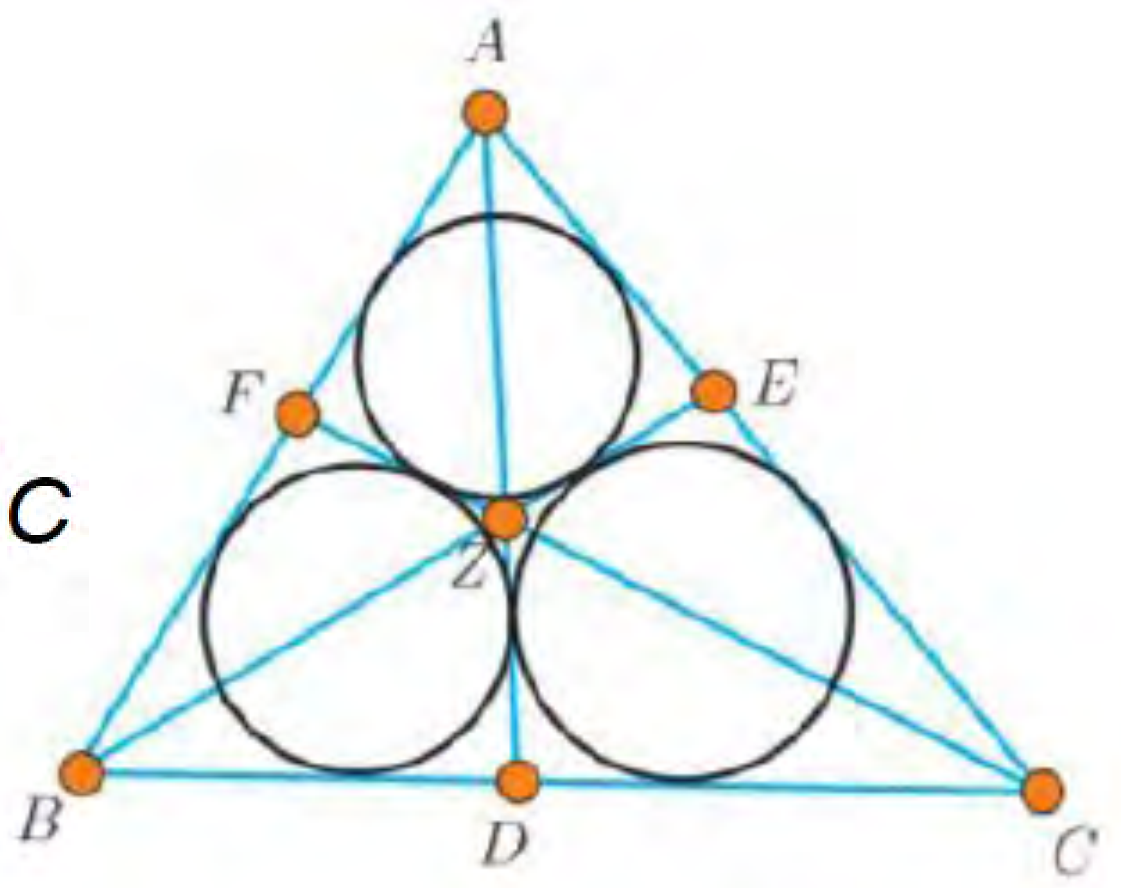


圖 2

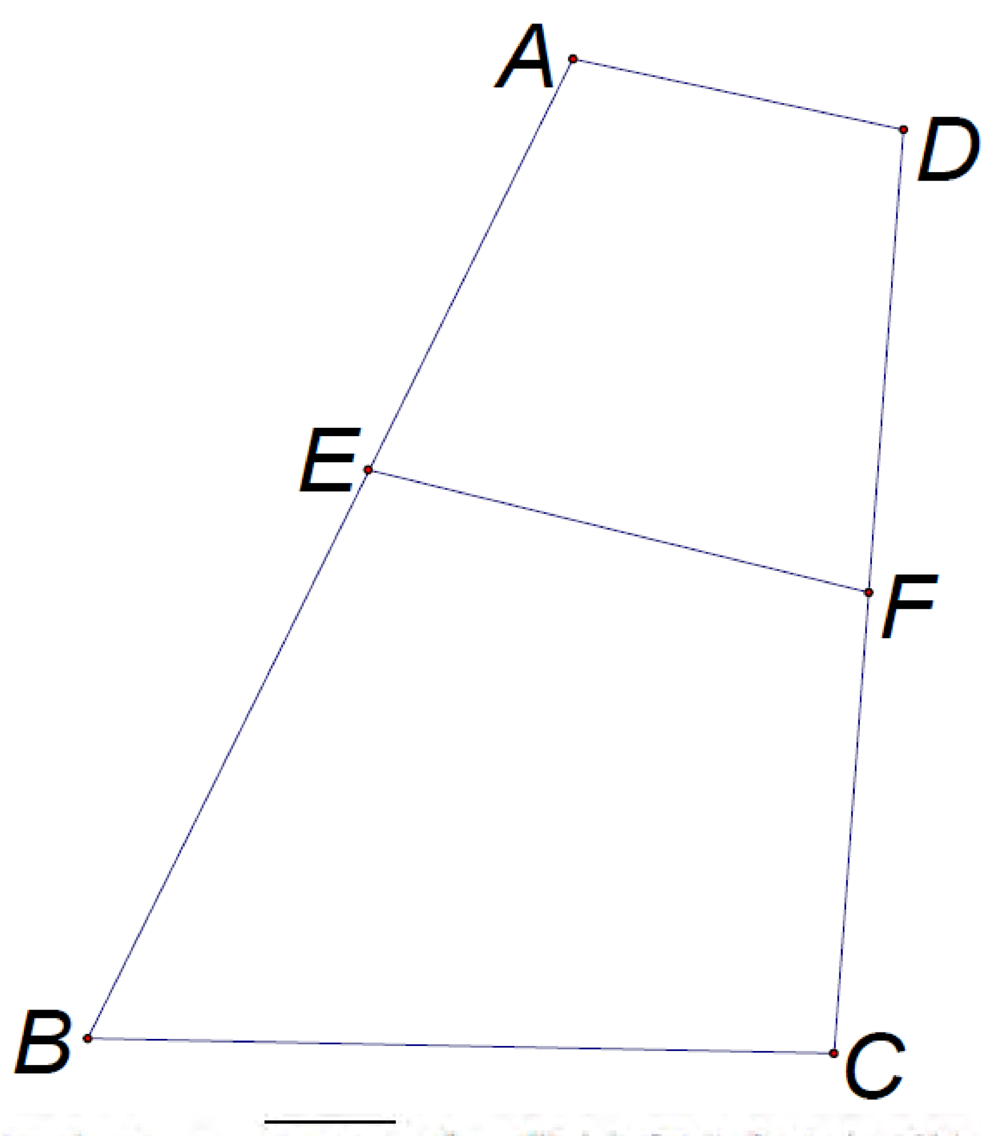


圖 3：$\overline{EF}$ 為對邊連線段

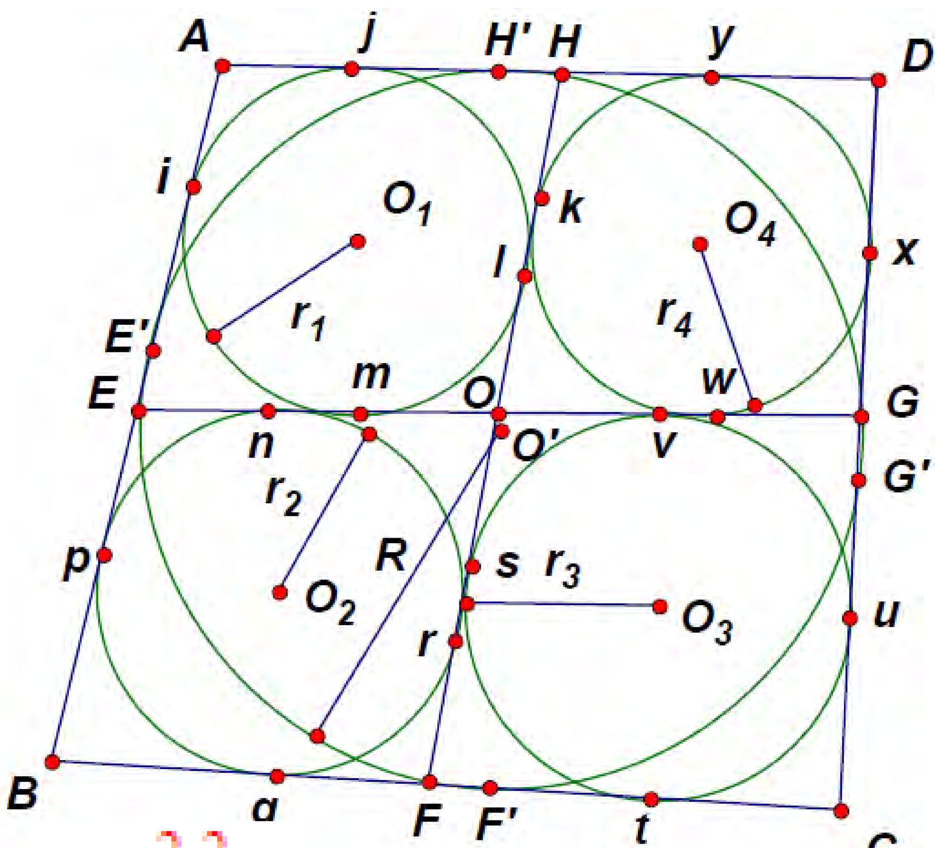
一、名詞定義

1、對邊連線段：如圖 3 所示，四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$為較長的一組對邊，$\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$則為較短的對邊，其中 E、F 分別為 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$上的點，我們在此稱 $\overline{EF}$ 為對邊連線段。

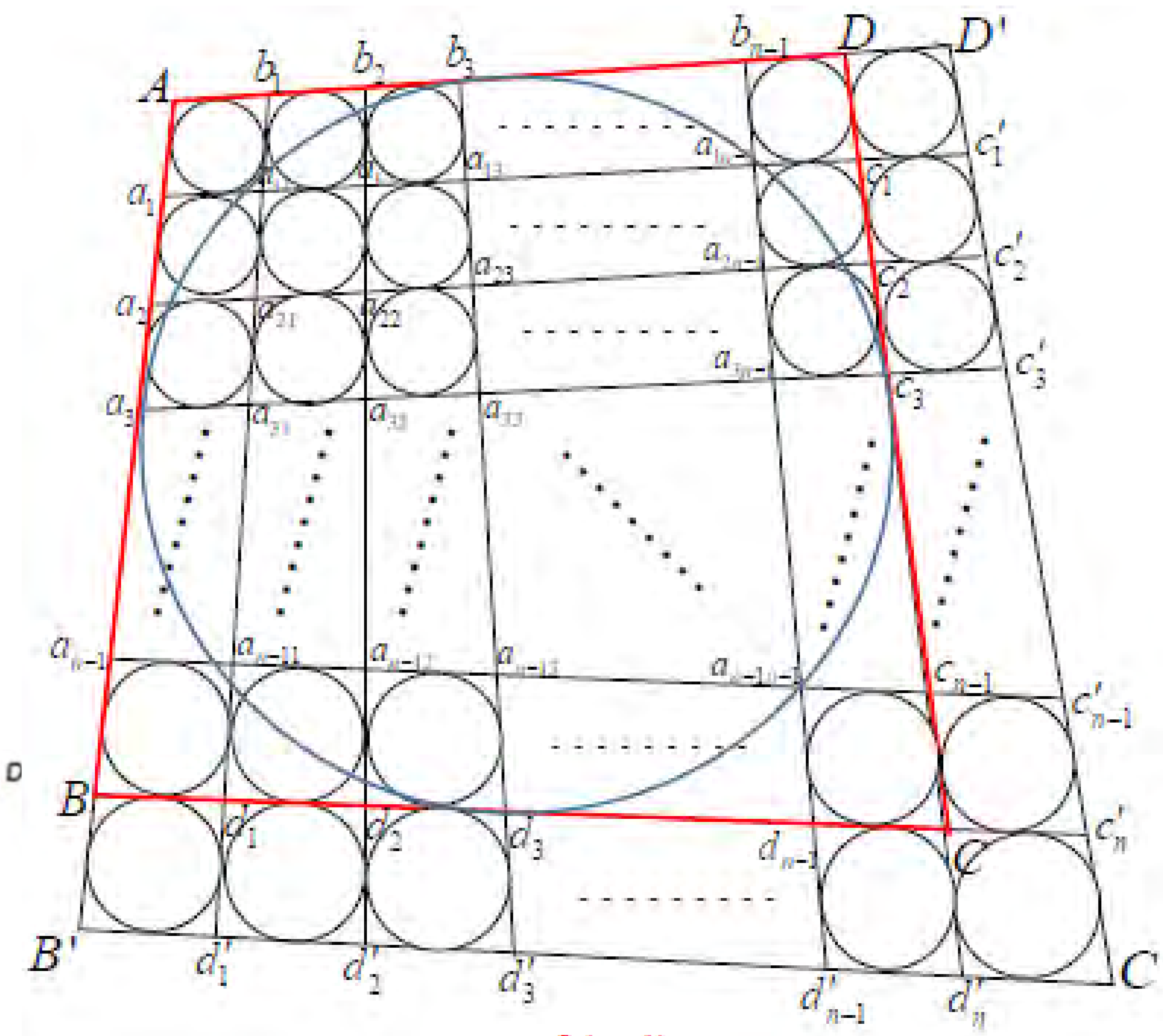
2、$G^{L,N}_{C(l_1,l_2,\cdots l_n)}$：左上字母 L 表示圓外切四邊形層數，右上字母 N 表示對邊連線段數，左下字母 C 表示內切圓總數，右下字母$(l_1,l_2,\cdots,l_n)$表示不同每層排列內切圓數。

二、首先以性質 1 為基礎探討多圓外切四邊形中各種對邊連線段與四邊形四個邊長的關係：**如二圓情形的 $G^{2,1}_{2(1,1)}$；三圓情形的 $G^{3,2}_{3(1,1,1)}$ 與 $G^{2,2}_{3(1,2)}$；四圓情形的 $G^{2,2}_{4(2,2)}$、$G^{2,3}_{4(1,3)}$** (與 $G^{2,3}_{4(3,1)}$ 同)、$G^{3,3}_{4(1,2,1)}$ (與 $G^{3,3}_{4(2,1,1)}$、$G^{3,3}_{4(1,1,2)}$ 同)與 $G^{4,3}_{4(1,1,1,1)}$、**還有五圓情形如表(一)及結論一。**

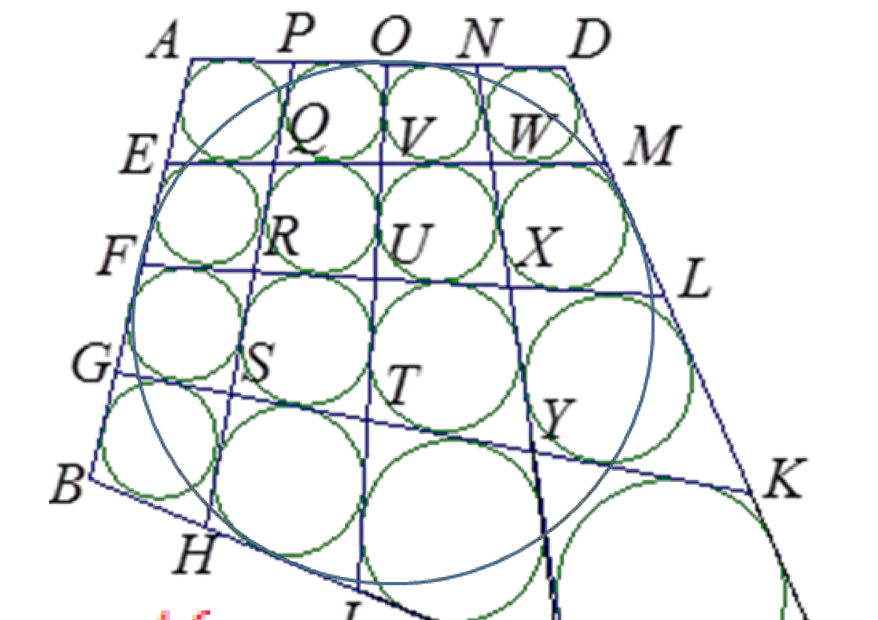
定理 3: n^2個圓外切四邊形($G^{n,2(n-1)}_{n^2\underbrace{(n,\cdots,n)}_{n}}$)，$n\geq 2$，內部有一個與四邊均相切的大內切圓。



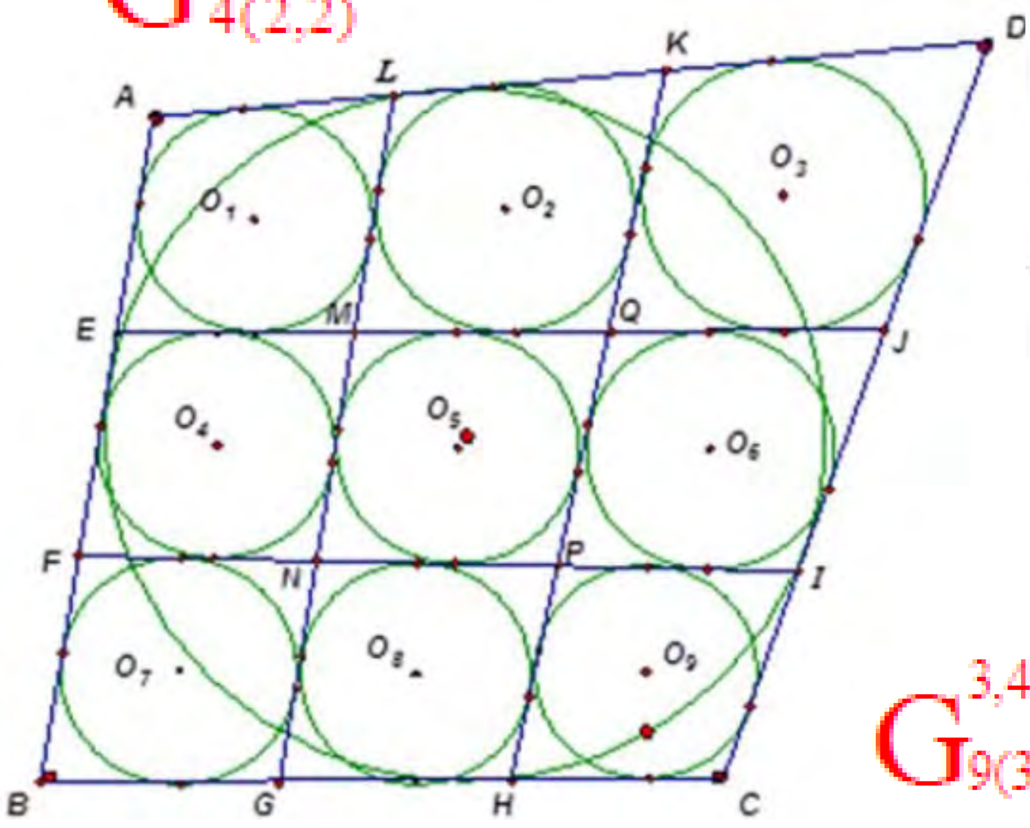
$G^{2,2}_{4(2,2)}$



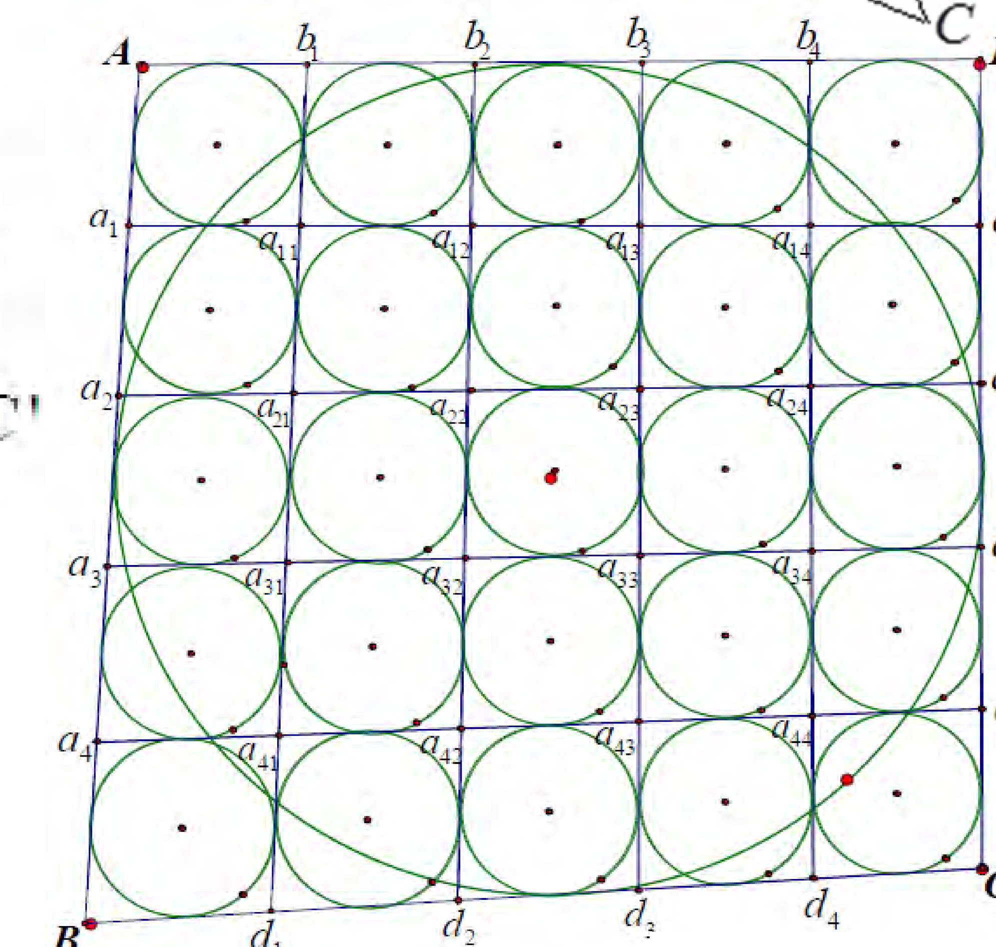
$G^{n,2(n-1)}_{n^2(\underbrace{n,\cdots,n}_{n})}$



$G^{4,6}_{16(4,4,4,4)}$



$G^{3,4}_{9(3,3,3)}$

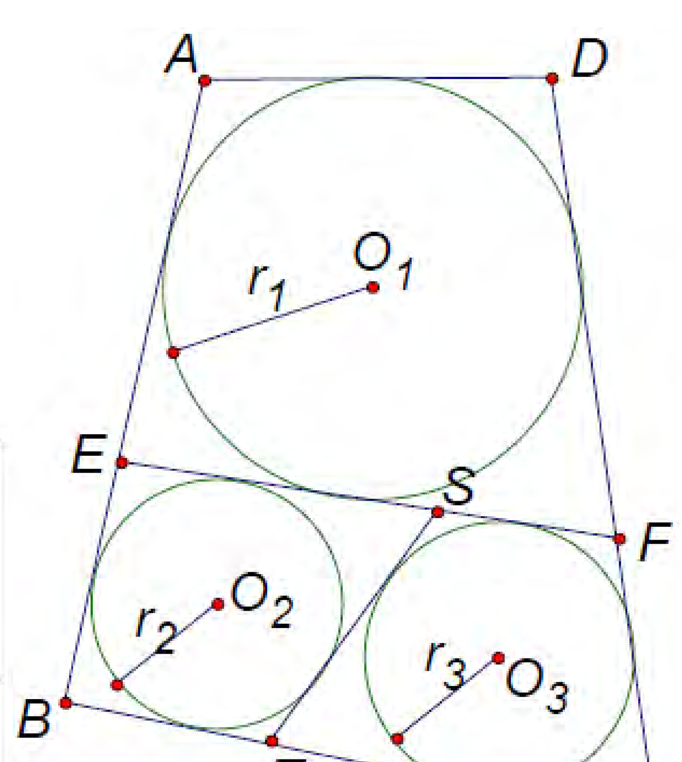


$G^{5,8}_{25(5,5,5,5,5)}$

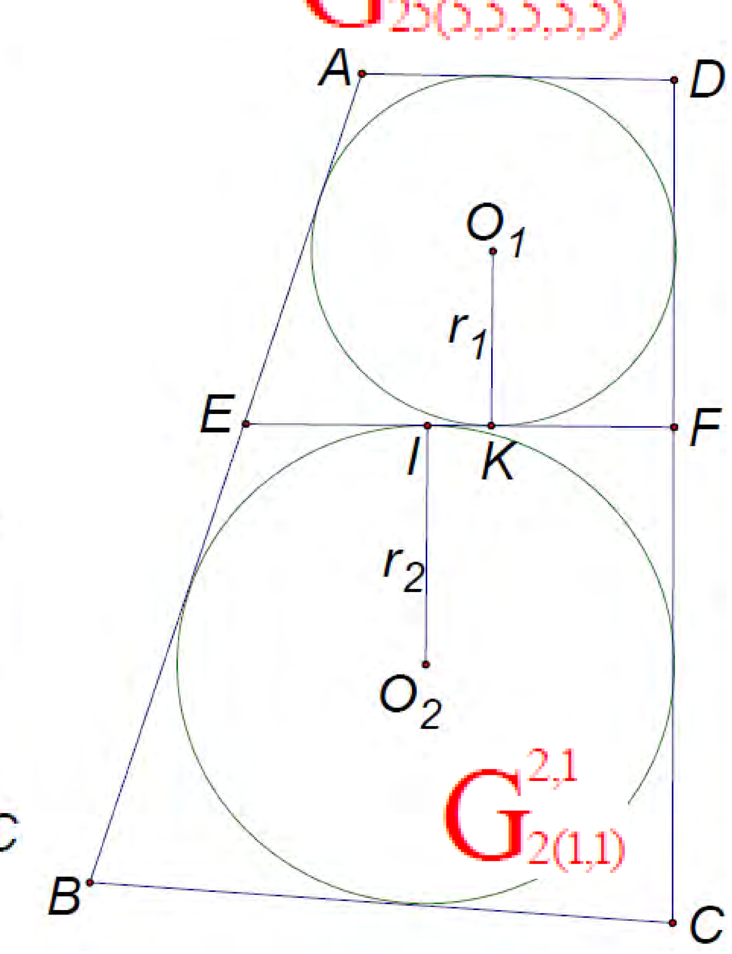
三、以性質 2 為基礎，繼續探討原四邊形的面積與對邊連線段分割出來的 2 個小四邊形的內切圓、3 個小四邊形的內切圓、4 個小四邊形或 5 個小四邊形的內切圓半徑關係，**參考表(二)與表(三)。**

	層數	圖形簡記	對邊線段長與四邊形 $ABCD$ 二組對邊長關係
五圓外切四邊形	2	$G^{2,4}_{5(1,4)}$	$\overline{EF}-\left(\overline{IL}+\overline{HK}+\overline{GJ}\right)=\frac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$
		$G^{2,4}_{5(2,3)}$	$\overline{EF}-\left(\overline{GK}+\overline{LI}+\overline{JH}\right)=\frac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$
	3	$G^{3,4}_{5(1,1,3)}$	$\overline{EF}+\overline{GH}-\left(\overline{IK}+\overline{JL}\right)=\frac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$
		$G^{3,3}_{5(1,2,2)}$	$\overline{EF}+\overline{GH}-\overline{IJ}=\frac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$
		$G^{3,4}_{5(1,3,1)}$	$\overline{EF}+\overline{GH}-\left(\overline{KL}+\overline{IJ}\right)=\frac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$
		$G^{3,4}_{5(2,1,2)}$	$\overline{EF}+\overline{GH}-\left(\overline{IJ}+\overline{KL}\right)=\frac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$
	4	$G^{4,4}_{5(1,1,1,2)}$	$\overline{EF}+\overline{GH}+\overline{IJ}-\overline{KL}=\frac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$
		$G^{4,4}_{5(1,1,2,1)}$	$\overline{EF}+\overline{GH}+\overline{IJ}-\overline{KL}=\frac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$
	5	$G^{5,4}_{5(1,1,1,1,1)}$	$\overline{EF}+\overline{GH}+\overline{IJ}+\overline{KL}=\frac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$

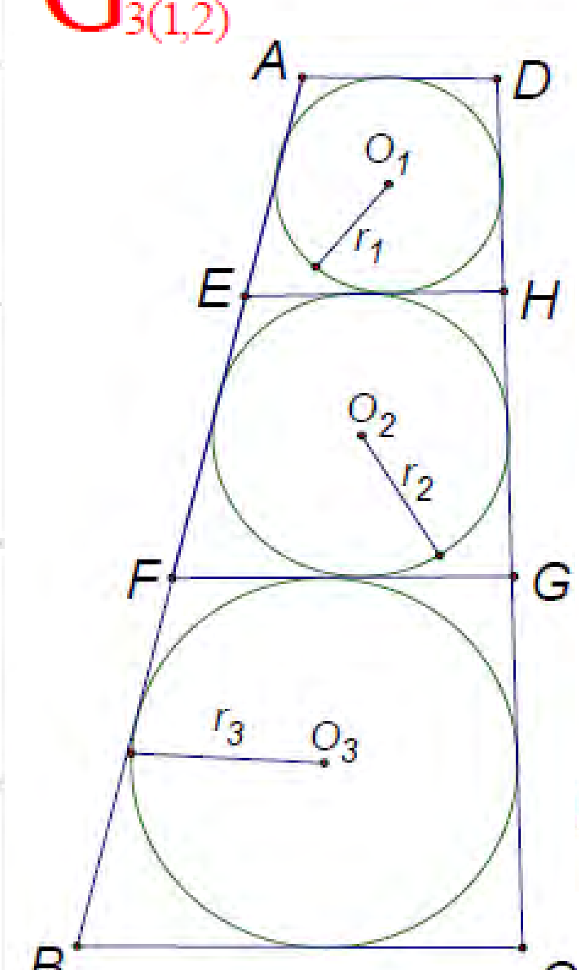
表(一)



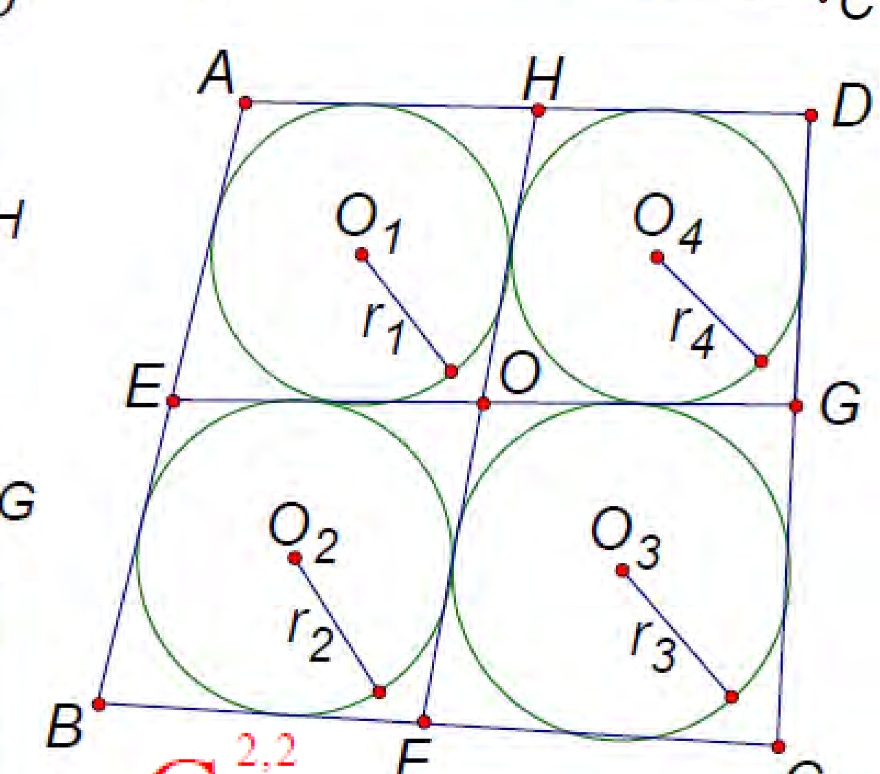
$G^{2,2}_{3(1,2)}$



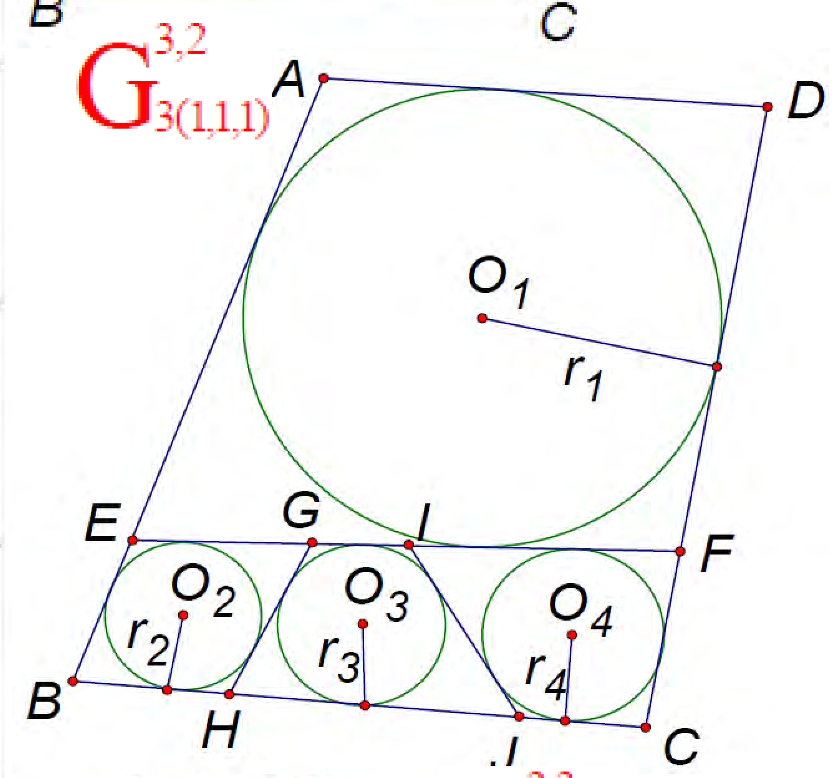
$G^{2,1}_{2(1,1)}$



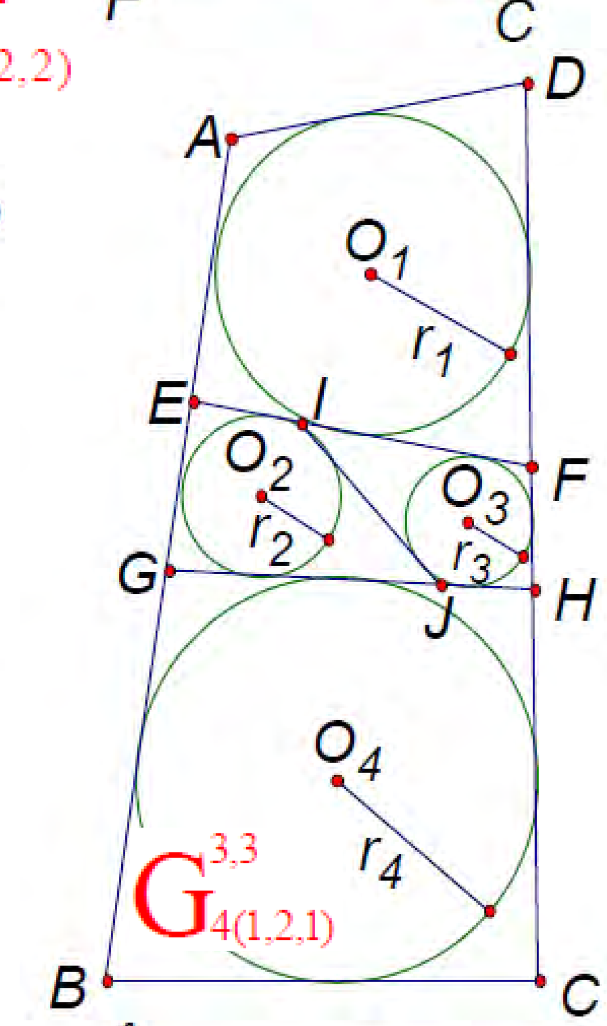
$G^{3,2}_{3(1,1,1)}$



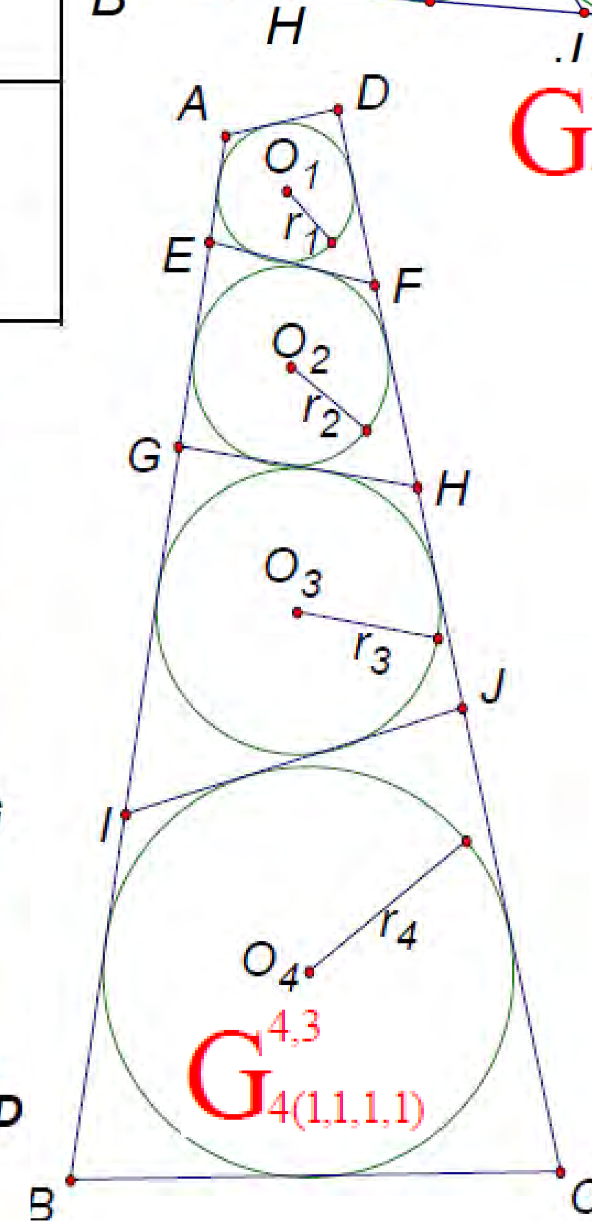
$G^{2,2}_{4(2,2)}$



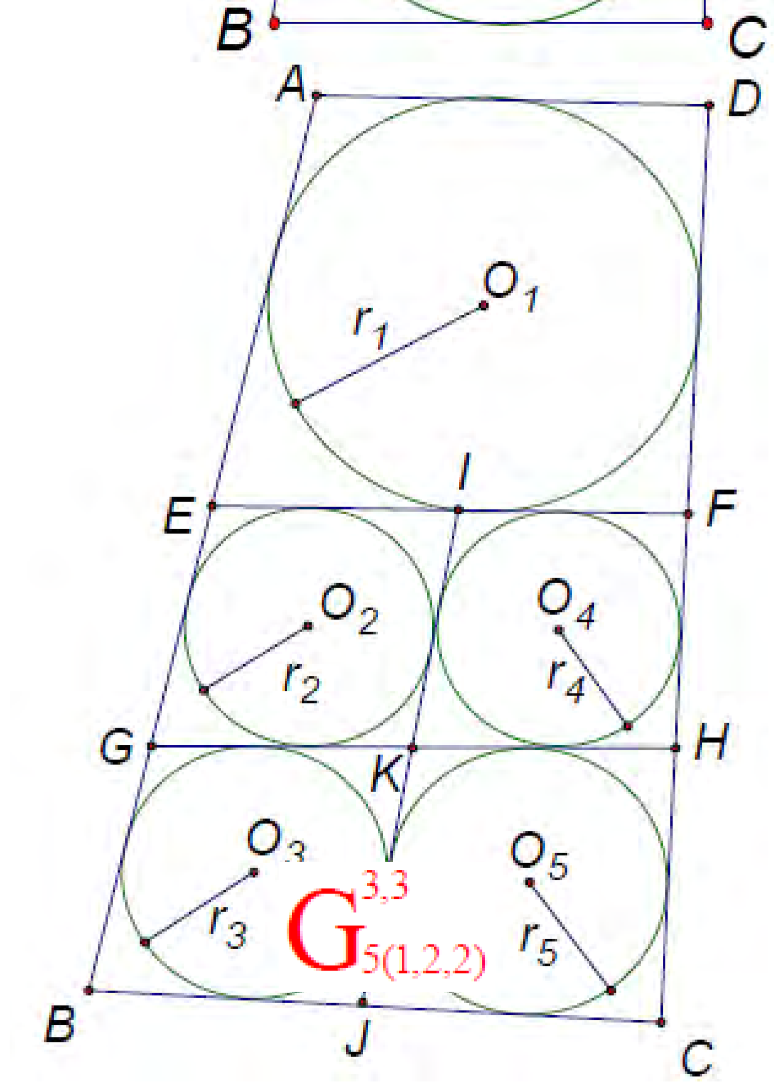
$G^{2,3}_{4(1,3)}$



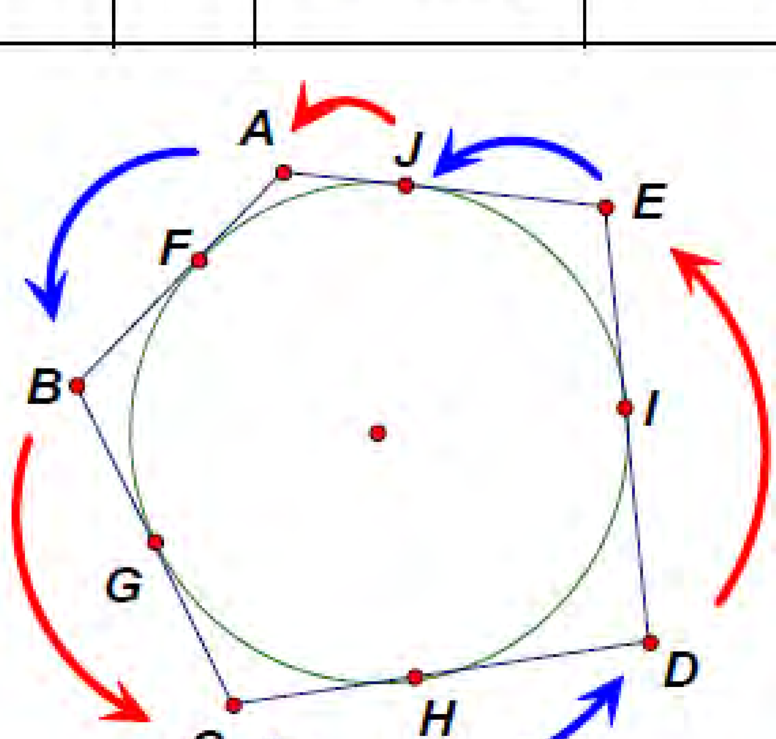
$G^{3,3}_{4(1,2,1)}$



$G^{4,3}_{4(1,1,1,1)}$



$G^{3,3}_{5(1,2,2)}$



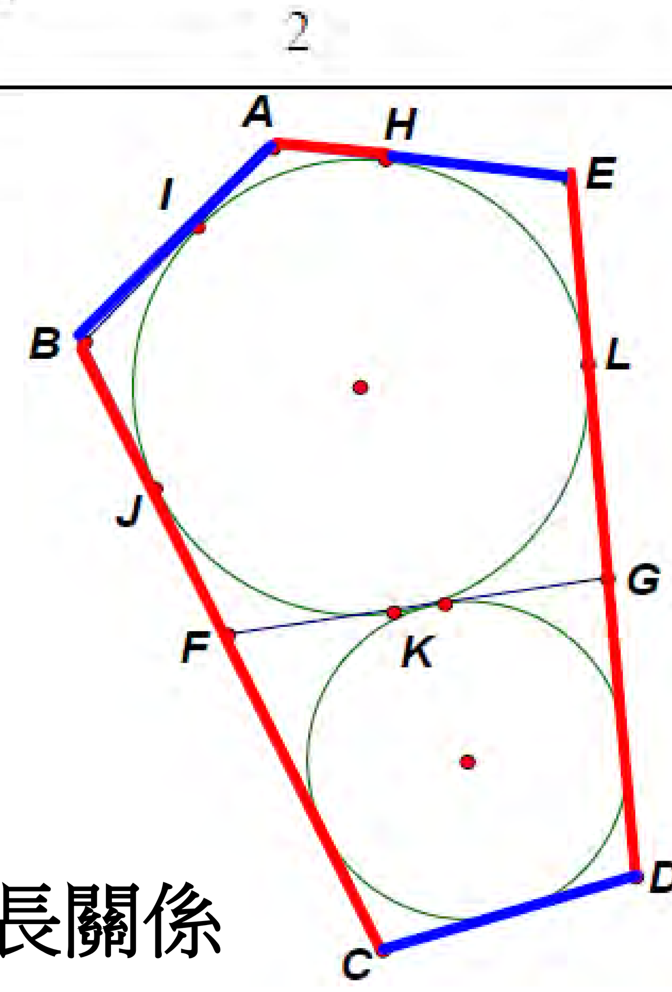


圖 4：一圓、二圓外切五邊形的邊長關係

參、研究結果與結論

一、任意四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 為較長的一組對邊，$\overline{AD}$ 和 $\overline{BC}$ 為較短的一組對邊，且 $\overline{AB}+\overline{CD}>\overline{AD}+\overline{BC}$。若可在 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 上分別找到兩點 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{F}$，使得此對邊連線段滿足 $\overline{EF}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{DC}-\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)}{2}$ 且 $\overline{AE}+\overline{DF}=\dfrac{S}{2}-\overline{BC}$，則 $\overline{EF}$ 將將原四邊形 $\boldsymbol{ABCD}$ 分成的兩個四邊形 $\boldsymbol{AEFD}$ 和 $\boldsymbol{EBCF}$ 皆為圓外切四邊形也可視為二圓外切四邊形的判別性質。

	層數	圖形簡記	四邊形 $ABCD$ 面積與諸個內切圓半徑關係
四圓外切四邊形	2	$G_{4(2,2)}^{2,2}$	四邊形 $ABCD$ 面積 $=\left(\frac{S_1}{2}-\overline{BF}\right)\times r_1+\left(\frac{S_1}{2}-\overline{AH}\right)\times r_2+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{HD}\right)\times r_3+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{FC}\right)\times r_4$
		$G_{4(1,3)}^{2,3}$	四邊形 $ABCD$ 面積 $=\frac{S_1}{2}\times r_1+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{IJ}\right)\times r_2+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{EB}\right)\times r_3+\frac{S_3}{2}\times r_4$
		$G_{4(3,1)}^{2,3}$	與 $G_{4(1,3)}^{2,3}$ 的結果相似
	3	$G_{4(1,2,1)}^{3,3}$	四邊形 $ABCD$ 面積 $=\frac{S_1}{2}\times r_1+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{FH}\right)\times r_2+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{EG}\right)\times r_3+\frac{S_3}{2}\times r_4$
		$G_{4(1,1,2)}^{3,3}$	與 $G_{4(1,2,1)}^{3,3}$ 的結果相似
		$G_{4(2,1,1)}^{3,3}$	與 $G_{4(1,2,1)}^{3,3}$ 的結果相似
	4	$G_{4(1,1,1,1)}^{4,3}$	四邊形 $ABCD$ 面積 $=\left[\frac{S_1}{2}-\overline{GH}\right]\times r_1+\left[\frac{S_1}{2}-\overline{AD}\right]\times r_2+\left[\frac{S_2}{2}-\overline{BC}\right]\times r_3+\left[\frac{S_2}{2}-\overline{GH}\right]\times r_4$

表(二)

二、n^2 圓外切四邊形 $G_{n^2\underbrace{(n,\ldots,n)}_{n}}^{n,2\times(n-1)}$，必為內部有一個與四邊均相切的最大內切圓之圓外切四邊形，且該大內切圓之四個切點分別將原四邊形的四邊分割成兩段，其兩段的長度比為該邊所連接的兩對應內角之半角的正切函數倒數比，同時，其內部的所有對邊連線段所相交的點也是唯一的。

肆、未來展望

一、推廣到圓外切 $\boldsymbol{n}$ 邊形的各種相關性質探討。

二、除了二圓、四圓外切四邊形的判別性質外，其他多圓外切四邊形的判別性質也是未來發展的目標之一。

三、本研究中針對各種多圓外切四邊形的不同排列方式採用新名詞 $G_{n^2\underbrace{(n,\ldots,n)}_{n}}^{n,2\times(n-1)}$ 來簡記，讓我們覺察到此簡記的每個數字(四個變數)似乎涉及到整數拆分或遞迴的規律性，或四個變數是否決定了此平面圖形的結構？甚至推廣到立體圖形時，又會有那些變數來決定其結構？這也是未來可以繼續探討的方向之一。

	層數	圖形簡記	四邊形 $ABCD$ 面積與諸個內切圓半徑關係
五圓外切四邊形	2	$G_{5(1,4)}^{2,4}$	四邊形 $ABCD$ 面積 $=\frac{S_1}{2}\times r_1+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{HK}\right)\times r_2+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{EB}\right)\times r_3+\left(\frac{S_3}{2}-\overline{FC}\right)\times r_4+\left(\frac{S_3}{2}-\overline{HK}\right)\times r_5$
		$G_{5(2,3)}^{2,4}$	四邊形 $ABCD$ 面積 $=\left(\frac{S_1}{2}-\overline{DF}\right)\times r_1+\left(\frac{S_1}{2}-\overline{AE}\right)\times r_2+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{LI}\right)\times r_3+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{BE}\right)\times r_4+\frac{S_3}{2}\times r_5$
	3	$G_{5(1,1,3)}^{3,4}$	四邊形 $ABCD$ 面積 $=\left(\frac{S_1}{2}-\overline{GH}\right)\times r_1+\left(\frac{S_1}{2}-\overline{AD}\right)\times r_2+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{JL}\right)\times r_3+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{GB}\right)\times r_4+\frac{S_3}{2}\times r_5$
		$G_{5(1,2,2)}^{3,3}$	四邊形 $ABCD$ 面積 $=\frac{S_1}{2}\times r_1+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{FH}\right)\times r_2+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{EG}\right)\times r_4+\left(\frac{S_3}{2}-\overline{HC}\right)\times r_3+\left(\frac{S_3}{2}-\overline{GB}\right)\times r_5$
		$G_{5(1,3,1)}^{3,4}$	四邊形 $ABCD$ 面積 $=\frac{S_1}{2}\times r_1+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{KL}\right)\times r_2+\left(\frac{S_3}{2}-\overline{EG}\right)\times r_3+\frac{S_3}{2}\times r_4+\frac{S_4}{2}\times r_5$
		$G_{5(2,1,2)}^{3,4}$	四邊形 $ABCD$ 面積 $=\left(\frac{S_1}{2}-\overline{DF}\right)\times r_1+\left(\frac{S_1}{2}-\overline{AE}\right)\times r_2+\frac{S_2}{2}\times r_3+\left(\frac{S_3}{2}-\overline{HC}\right)\times r_4+\left(\frac{S_3}{2}-\overline{GB}\right)\times r_5$
	4	$G_{5(1,1,1,2)}^{4,4}$	四邊形 $ABCD$ 面積 $=\left(\frac{S_1}{2}-\overline{GH}\right)\times r_1+\left(\frac{S_1}{2}-\overline{AD}\right)\times r_2+\frac{S_2}{2}\times r_3+\left(\frac{S_3}{2}-\overline{JC}\right)\times r_4+\left(\frac{S_3}{2}-\overline{IB}\right)\times r_5$
		$G_{5(1,1,2,1)}^{4,4}$	與 $G_{5(1,1,1,2)}^{4,4}$ 的結果相似
	5	$G_{5(1,1,1,1,1)}^{5,4}$	四邊形 $ABCD$ 面積 $=\left(\frac{S_1}{2}-\overline{GH}\right)\times r_1+\left(\frac{S_1}{2}-\overline{AD}\right)\times r_2+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{KL}\right)\times r_3+\left(\frac{S_2}{2}-\overline{GH}\right)\times r_4+\frac{S_3}{2}\times r_5$

表(三)