中華民國第57屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第三名

030420

從翻杯問題探究漢米爾頓路徑解析

學校名稱：桃園市立中興國民中學

作者：	指導老師：
國二 連亮凱	林樂鄺
國二 胡和維	
國二 吳懿宸	

關鍵詞：奇偶性、數學歸納法、漢米爾頓路徑

摘　　要

此作品研究「若有 M 個杯子且全部朝上，每次翻轉 N 個杯子，討論 M、N 在何種條件下，可將 M 個杯子翻成全部朝下，讓每個 0 到 M 之間的朝上杯數，都翻過一次且不得重複出現(即為漢米爾頓路徑 Hamiltonian path)？同時探討在符合某些條件的情況下，必會有 Hamiltonian path 並證明之。」我們以總杯數及翻杯數的奇偶性將其分成四類，以及初始向上杯數不等於總杯數，使用我們所研發的倒金字塔式轉化成 Hamiltonian path，並找出其中一組共同的規律，以這樣的方式說明這些 Hamiltonian path 必有解。而當 Hamiltonian path 共有 2 的次方組解(包含唯一)時，其所有 Hamiltonian path 都會符合首尾相加現象。我們找出其中的規律並證明其唯一性，再將這些規律運用數學邏輯並加入排列組合因素，使用 Visual C#寫出程式並執行，以圖形使用者介面呈現。

壹、研究動機

經由此次暑期數理進階營隊，閱讀課外讀物的機緣，使我們有機會接觸一些平時連想都不會想去拿來看的書，更別說是積極地去研究它了！然而，這次所讀的課外書籍『沒有數字的數學』一書，雖然只是粗淺的研究，但卻使我們受益良多！書中提及**Hamiltonian path（漢米爾頓路徑：在圖形上給定任意兩點A、B，從A出發要經過所有的點且不重複點，而到達到B）**，以及相關涉及到的Hamiltonian Cycle（漢米爾頓迴路：在圖形上，經過所有的點且不重複點而回到原來的出發點），此兩大重要性質引發我們高度的興趣。再者，在某次**查閱瀏覽相關國中資優數學推理問題的網頁時，看到以下翻杯問題：**「編號 1 至 100 的杯子依序排成一列，今先將所有杯子開口朝上站立著，再將編號為 2 的倍數的杯子翻轉倒立開口朝下，再將編號為 3 的倍數的杯子翻轉，依此方式按 4 的倍數，5 的倍數…進行到最後，則最後杯子朝上站立的杯子數目為何？」**又再瀏覽查閱到杯子翻轉的奧秘，有著這麼一道題目：**「若有 7 個杯口全部朝上的杯子，一次翻 4 個，則是否有辦法將杯子全部由上而下全部翻轉？」此時，**便開始從全國中小學科展網站查詢到相關一系列議題的資料：**第 36 屆全國科展高小組數學科第一名「翻來覆去乾坤轉-翻硬幣遊戲的新發現」其研究是：探討硬幣遊戲的規律性，方向有四大點：(1)固定數翻；(2)連續數翻；(3)倍數翻；(4)因數翻。第 43 屆全國科展高小組數學科第二名「最佳全翻位的探討」其研究是：找出N個硬幣、每次同時翻M個硬幣，包含全部狀況的最佳K值（完成全翻位的最少翻硬幣次數）與最佳全翻位的翻硬幣模式。第 45 屆全國科展高小組數學科第三名「翻出一片天」的研究是：以嘗試各種組合情形，並分

類出可成功的組合；同時在所有可成功的例子中尋找規則，看可不可以用最少的次數完成。第 46 屆全國科展國中組數學科佳作「再翻出一片天」的研究是：當有m個開口朝上的杯子，如果每回合翻轉n個杯子($m \geq n$)，研究最少需要多少回合的翻轉，才能使所有的杯子開口朝下?是否可找到迅速達成目標的策略？綜合上述這 4 屆，其所探討的皆為杯子全部向上，能否翻成全部向下及其最少次數的探討。

再者，我們亦**搜尋發現到第 53 屆全國科展國中組數學科佳作「翻翻相連-翻杯問題任意狀態到任意狀態的連通與路徑探析」**其研究的是：最少翻轉次數為何？其翻轉的過程又為何？當翻轉次數固定時，探討哪些狀態可互通或不互通及一個狀態翻轉到另一個狀態時，共有幾種不同的方法數，把問題變成狀態圖來討論，**雖然此作品有做初步漢米爾頓路徑的介紹，但絕大部分是在探討所呈現狀態圖的連通與不連通情況，卻未對漢米爾頓路徑做深入的探析，加上評審意見也是如此地建議，使得這樣地結果仍有很大的研究性價值，因此我們想將其漢米爾頓路徑問題，做更為完整、深入且一般性的探究，期盼讓結果更加廣義且完備外，更試著朝使用者操作的友善介面方式呈現，故我們以此作為主題，做以下一系列的探討及研究。**

貳、研究目的

一、定義總杯數為 M(>N)，翻杯數為 N(>3)，初始向上杯數為 R(>0)，探討以下情況是否有至少一條漢米爾頓路徑：

(一) M 為偶數(=R)，N 為奇數，M 與 N 的關係再細分以下兩種情形討論：

1. M>2N
2. M<2N

(二) M 為奇數(=R)，N 為奇數，M 與 N 的關係再細分以下四種情形討論：

1. M>2N $\left(M \neq 2N+1\right)$
2. M<2N $\left(M \neq 2N-1\right)$
3. M=2N-1
4. M=2N+1

(三) M 為偶數(=R)，N 為偶數，M 與 N 的關係再細分以下兩種情形討論：

1. M>2N
2. M<2N

(四) M 為奇數(=R)，N 為偶數，M 與 N 的關係再細分以下兩種情形討論：

1. M>2N

2. M<2N

(五) 為 M 個杯子(奇數個或偶數個)且有 P 個杯子(奇數個或偶數個)朝上，每次翻轉 N 個杯子(N 為大於 2 的偶數)時：

二、找到一個方法(倒金字塔式)，能快速且無遺漏的列出漢米爾頓路徑。

三、當漢米爾頓路徑是 2 的次方組解(包含唯一)時，其所有漢米爾頓路徑都會有翻杯漢米爾頓路徑首尾相加現象的存在。我們嘗試找出其中的規律並證明其唯一性。

四、將以上所找出的規律，運用數學邏輯並加入排列組合因素，利用程式設計語言 Visual C# 寫出程式執行，並以圖形使用者介面（Graphical User Interface，簡稱 GUI）予以呈現。

參、研究設備及器材

一、免洗紙杯

二、筆、筆記本

三、自備隨身碟、電腦

四、Microsoft Visual Studio Community 2017 微軟合法免費軟體

肆、研究過程及方法

首先，從老師所給我們的問題，「若有 5 個朝上的杯子，每次翻轉 3 個杯子，試問是否有漢米爾頓路徑？」開始思考探究。我們以總杯數及翻杯數的奇偶性將其分成四類，以及初始向上杯數不等於總杯數的情形，找出其中一組的規律，以這樣的方式說明這些漢米爾頓有解。因為我們目前只有探討漢米爾頓路徑中有出現首尾相加等於總杯數時的情形，故**以下為總路徑長的前一半之規律，後一半則為總杯數減掉對應位置的朝上杯數(對應的數=總杯數-所需的數)**，探討其是否有漢米爾頓路徑：

一、名詞定義：

(一)翻杯漢米爾頓路徑：給定任意兩正整數M、N(M>N)，可將 M 個杯子翻成全部朝下，讓每個不大於 M 且不小於 0 的朝上杯數，都翻過一次且不得重複出現，即為漢米爾頓路徑。

(二)總杯數：總共的杯數，以M表示。

(三)翻杯數：一次要翻的杯數，以N表示。

(四)X_i：將一條漢米爾頓路徑看為一個數列，首項為X_0，末項為X_M $\left(i=0,1,2,\ldots,M\right)$。

(五)X_j：為符合該條件中的第一項，但在與下一個符合該規律的X_i比較時，仍以X_i看待。

(六)首尾相加現象：從唯一解的漢米爾頓路徑發現，將其前後相對應的項相加都等於總杯數，亦發現在 M、N 任意情況下，皆至少有一組漢米爾頓路徑首尾相加等於總杯數。

＊ 註: 在翻杯數為偶數且總杯數為奇數時為 M+1

(七)初始向上杯數：剛開始的朝上杯數，以 R 表示。

(八)向上狀態 P ：則是指初始向上杯數是奇數或偶數。

(九)數對：表示為(向上杯數,向下杯數)，連接代表兩數對可連通(雙向)。

(十)單一點：只有一條路徑可以連接的數對，而其在初始向上杯數為 0 或 M 時存在。如果一條漢米爾頓路徑的單一點大於兩個，則沒有漢米爾頓路徑。而如果兩個單一點(翻杯數為奇數就是兩個單一點)，則(M,0)、(0,M)兩數對做為起點與終點時，會有漢米爾頓路徑。

首先我們發現X_i和X_{i+1}的關係：1. X_i、X_{i+1}的和不能比 N 小，2. 也不能比 2M-N 大，並且 3. 兩者之差的絕對值不能大於 N。(1) 因為如果小於 N 的話，則能翻的杯子將小於翻杯數。例如:N=7，X_i=3，要使X_{i+1}=4，便要將 3 個杯子往下翻、4 個往上翻；然而要使X_{i+1}=2，便還要再翻 2 個，就會有重複翻的現象。 (2) 同理。 (3) 沿用剛剛的例子，X_{i+1}最大值是 10，超過 10 就會有翻杯子不足的情形。我們藉由這樣的條件推演出倒金字塔式。

二、M 為偶數(=R)，N 為奇數，M 與 N 的關係再細分以下兩種情形討論：

(一)當 M>2N

1. i 是偶數，則X_i=M-i
2. i 是奇數， (1) i≤N，則X_i=M-N+i-1 ； (2) i>N，則X_i=M-i

ex: M=16,N=7　　16→9→14→11→12→13→10→15→8→1→6→3→4→5→2→7→0

(二)當 M<2N

1. i 是偶數，則X_i=M-i
2. i 是奇數， (1) i≤M-N，則X_i=M-N-i+1 ； (2) i>M-N，則X_i=i

ex: M=16,N=9　　16→7→14→5→12→3→10→1→8→15→6→13→4→11→2→9→0

三、M 為奇數(=R)，N 為奇數，M 與 N 的關係再細分以下四種情形討論：

(一)當 M>2N $(M \neq 2N+1)$

1. i 是偶數，則X_i=M-i
2. i 是奇數， (1) i≤N，則X_i=M-N+i-1 ； (2) i>N，則X_i=M-i

ex: M=17,N=7　　17→10→15→12→13→14→11→16→9→8→1→6→3→4→5→2→7→0

以下這組，則是將前面一半的漢米爾頓路徑，再分成三組，$i \le \frac{N-3}{2}$、$\frac{N-3}{2} < i \le \frac{N+3}{2}$、$i > \frac{N+3}{2}$。第一組又再以$\frac{M-N}{2}$做分界，二、三組則是以 N=4s+1、N=4s+3 區隔，不同情形有各自的規律。

(二)當 M<2N $(M \neq 2N-1)$

1. i≤ $\frac{N-3}{2}$ ，(1) i≤ $\frac{M-N}{2}$ ， a. i 是偶數，則X_i=M-i ； b. i 是奇數，則X_i=M-N-i+1

(2) i> $\frac{M-N}{2}$ ， a. i 是偶數，則X_i=M-2i ； b. i 是奇數，則X_i=2i

2. $\frac{N-3}{2}$ <i≤ $\frac{N+3}{2}$

(1) N=4s+1 ， a. i=$\frac{N-1}{2}$，則X_i=M-N+1 ； b. i=$\frac{N+1}{2}$，則X_i=M-1 ； c. i=$\frac{N+3}{2}$，則X_i=M-N-1

(2) N=4s+3 ， a. i=$\frac{N-1}{2}$，則X_i=N-1 ； b. i=$\frac{N+1}{2}$，則X_i=1 ； c. i=$\frac{N+3}{2}$，則X_i=N+1

3. i> $\frac{N+3}{2}$

(1) N=4s+1 ， a. i 是偶數，則X_i=M-N-[i-($\frac{N+1}{2}$)] ； b. i 是奇數，則X_i=M-[i-($\frac{N-1}{2}$)]

(2) N=4s+3 ， a. i 是偶數，則X_i=1+[i-($\frac{N+1}{2}$)] ； b. i 是奇數，則X_i=1+N+[i-($\frac{N+3}{2}$)]

ex: M=17,N=13 17→4→15→6→9→10→5→16→3→14→1→12→7→8→11→2→13→0

以下這兩組例外，則是因為其規律為 4 個一組，故分為 4 組，每組有各自的規律。

(三)當 M=2N-1

1. i=4s，則X_i=M-2s ； 2. i=4s+1，則X_i=N-1-2s ；

3. i=4s+2，則X_i=2s+1 ； 4. i=4s+3，則X_i=N+1+2s

ex: M=13,N=7 13→6→1→8→11→4→3→10→9→2→5→12→7→0

(四)當 M=2N+1

1. i=4s，則X_i=M-2s ； 2. i=4s+1，則X_i=N+1+2s ；

3. i=4s+2，則X_i=2s+1 ； 4. i=4s+3，則X_i=N-1-2s

ex: M=15,N=7 15→8→1→6→13→10→3→4→11→12→5→2→9→14→7→0

然而，當總杯數=原向上杯數，而翻杯數為偶數時，向上杯數是奇數便永遠是奇數、若原向上杯數是偶數便永遠是偶數。我們這幾組條件中，所探討的須符合翻杯漢米爾頓路徑首尾相加現象。當總杯數為奇數，其首尾相加需等於 M+1，也就是首項加末項、第二項加倒數第二項、…，都要等於 M+1，而因其最後一項是第 $\frac{M+1}{2}$ 項，亦可表示為 $X_0 + X_{\frac{M+1}{2}-1}$ $X_1 + X_{\frac{M+1}{2}-2}$ …皆等於 M+1。當總杯數為偶數，其首尾相加需等於 M， $X_0 + X_{\frac{M}{2}}$, $X_1 + X_{\frac{M}{2}-1}$ ….

皆等於 M。因為當總杯數為奇數時，共是$\frac{M+1}{2}$項；當總杯數為偶數時，共是$\frac{M}{2}+1$項。因討論的 M 為奇數時，僅討論 M=4k+1 與 4k+3，使得加 1 除以 2 定能是整數，而 M 為偶數時，則無庸置疑其項數是整數。再者，為了方便列式，我們會先找出中間項，以其為基準點，而能符合翻杯漢米爾頓路徑首尾相加現象。不論 M 為何，找其中間項就是將其加 1 再除以 2(找共幾項)，再加 1 再除以 2(找這$\frac{M+1}{2}$的中間項)。當 M=4k+1 時，$\frac{4k+1+1}{2}$=2k+1，將其再加 1 除以 2 也就是 k+1，即是我們所要尋找的中間項。當 M=4k+3 時，$\frac{4k+3+1}{2}$=2k+2，將其加 1 再除以 2 是$2k+1+\frac{1}{2}$，其中間項就在 2k+1 與 2k+2 之間；若 M 為偶數仍可用相同的方法作解釋，當 M=4k，$\frac{4k}{2}+1=2k+1$ (整數)，$\frac{2k+2}{2}=k+1$(中間項)，當 M=4k+2，$\frac{4k+2}{2}+1=2k+2$ (整數)，$\frac{2k+3}{2}=k+1+\frac{1}{2}$(k+1 與 k+2 之間是中間項)。

四、M 為偶數(=R)，N 為偶數，M 與 N 的關係再細分以下兩種情形討論：

(一)當 M>2N

1. i≤$\frac{N}{2}$， (1) i 是偶數，則X_i=M-i ； (2) i 是奇數，則X_i=M-N+i-1

2. i>$\frac{N}{2}$ ，則X_i=M-2i

ex: M=16,N=4 16→12→14→10→8→6→2→4→0

＊ 註：當 M=10,N=4 時，為無解。因為 $X_0=10$, $X_1=6$, $X_4=4$, $X_5=0$ ，只剩下 X_2, X_3 ，並只能填入 2 和 8。然而，因為 X_2, X_3 之差的絕對值要小於或等於 N，2 和 8 卻不符合，故無解。

(二)當 M<2N

1. i≤$\frac{M-N}{2}$， (1) i 是偶數，則X_i=M-i ； (2) i 是奇數，則X_i=M-N-i+1

2. i>$\frac{M-N}{2}$， (1) i 是偶數，則X_i=M-2i ； (2) i 是奇數，則X_i=2i

ex: M=14,N=10 14→4→12→6→8→2→10→0

五、M 為奇數(=R)，N 為偶數，M 與 N 的關係再細分以下兩種情形討論：

(一)當 M>2N

1. i≤$\frac{N}{2}$， (1) i 是偶數，則X_i=M-i ； (2) i 是奇數，則X_i=M-N+i-1

2. i>$\frac{N}{2}$ ，則X_i=M-2i

ex: M=15,N=4 15→11→13→9→7→3→5→1

(二)當 M<2N

1. i≤$\frac{M-N-1}{2}$， (1) i 是偶數，則X_i=M-i ； (2) i 是奇數，則X_i=M-N-i+1

2. i>$\frac{M-N-1}{2}$， (1) i 是偶數，則X_i=M-2i ； (2) i 是奇數，則X_i=2i+1

ex: M=11,N=8 　　11→3→7→5→9→1

六、為 M 個杯子(奇數個或偶數個)且有 P(<M)個杯子(奇數個或偶數個)朝上，每次翻轉 N 個杯子(N 為大於 2 的偶數)時：

1.我們探究的是翻杯數 N 為偶數且與向上狀態 P 相同之奇數或偶數的漢米爾頓路徑。有以下五種情況：

(1) N=2，其路徑唯一。

(2) N>2， M 為奇數，向上狀態 P 為奇數，只有一個單一點(M,0)。

(3) N>2， M 為奇數，向上狀態 P 為偶數，只有一個單一點(0,M)。

(4) N>2， M 為偶數，向上狀態 P 為奇數，沒有單一點。

(5) N>2， M 為偶數，向上狀態 P 為偶數，有兩個單一點(M,0)、(0,M)。

2.向上狀態 P 為偶數，只討論偶數，只要經過所有的偶數即為偶數漢米爾頓路徑。

3.向上狀態 P 為奇數，只討論奇數，只要經過所有的奇數即為奇數漢米爾頓路徑。

偶數漢米爾頓路徑和奇數漢米爾頓路徑，合稱單一數漢米爾頓路徑。

作法：1. 先把與向上狀態 P 相同且≤M 的數對，以圓環狀表示。

2. 連接所有可連接的數對。

3. 以向上杯數為起點，若可將所有數對恰走過一次，即為單一數漢米爾頓路徑。

七、在實際翻杯子的過程中，我們試著以紙筆推導並發現漢米爾頓路徑的演算法，可更有效率地幫助在推演刪除不可能出現的情況，因此，我們所舉的例子即為演算法之倒金字塔式的幾個例子，此種**倒金字塔式是為了方便求解而設計出的**。簡略而言，**倒金字塔式便是把某數可翻到的向上杯數一一列出，為方便在當走到某數而不知道有哪幾種可能的路徑**，此倒金字塔式能協助幫忙我們毫無遺漏的列出，便不會漏掉任何解的可能。

當 M 與 N 不論為何，某數可走的最多組為$\frac{M-\left|(M-N)-N\right|}{2}+1$，而其中在絕對值外的 M 就是在倒金字塔式中(M-N)可走到的最大值 M，而絕對值內的(M-N)-N 就是 M-N 可走到的最小值，而”可走至的最小值”即是以把向上的翻成向下為優先，當 M-N 比 N 大時，就把 N 個杯子皆向下翻，如此(M-N)-N 仍是正數。若 M-N 比 N 還小的話，我們一樣是以把向上的翻成向下為優先，不同的是沒有 N 個杯子原是向上好讓我們翻成向下，而當把所有向上杯子皆翻成向下時會剩 N-(M-N)要翻，而

這時所有杯子皆是向下，所以翻完後是 N-(M-N)個杯子向上。此 N-(M-N)也等於(M-N)-N 的相反數，故在 M-N 可走至的最小值使用|(M-N)-N|。如下述的例子 M=12,N=5，M-N=7，其可走至的最大值與最小值分別為 12 和 2，而其又是等差為 2 的數列，因此在這兩個數字相減將其除以 2。而後式子中的加 1 就好比植樹問題，若一等差級數，當頭尾兩項都要的話，得再將數字差除以等差再加 1。

視下述式子之規律，看 M-N 為何？並利用式子，尋找出任意數 k (能走至最多組之值)。例如: M=12、N=5，必定有一值為 M-N=7 (為 k 之一)，可以走到 6 組(最多組之值)。

綜合上述紙筆推導之過程，並且以實際翻轉杯子數來作驗證，進而導出遵循漢米爾頓路徑的規則，加以整理出此演算法用倒金字塔型式來呈現數學的一般式，說明如下：

【**關於翻轉杯子的漢米爾頓路徑演算法，其倒金字塔型式**】：

1→ N+1 \ N-1

2→ N+2 \ N \ N-2

:

M-N→M\M-2\M-4……(視最多組之值為何，4 則到 M-6，5 則到 M-8…等等)

M-N+1 → M-1 \ M-3 \ M-5 ……

:

M-N+k → M-k \ M-k-2……

:

M→N

以上之式子為方便尋解用。

而在上述的過程中，對於最多組的定義：是在方便推導解時，會假設在倒金字塔型式中，用以清楚各數能走到的向上杯數，某數能走到哪幾種向上杯數以→表示，而能走到最多種的，即是為最多組。倘若，有 a 個數都能走到最多組，則我們便可以說有 a 個最多組。

以下例證說明，此→指的是可翻到的向上杯數。舉例如：a→b1\ b2 即代表 a 個杯數向上時，每次翻 N 個杯子結果，會有 b1 個向上與 b2 個向上 2 種可能。

例子一： M=12，N=5 ； 12→7→2\4\6\8\10→ ……… →2\4\6\8\10→5→0

1→6\4
2→7\5\3
3→8\6\4\2
4→9\7\5\3\1
5→10\8\6\4\2\0
6→11\9\7\5\3\1
7→12\10\8\6\4\2
8→11\9\7\5\3
9→10\8\6\4
10→9\7\5
11→8\6
12→7

例子二： M=15，N=9 ； 15→6→3\5\7\11\13→ ……. →2\4\6\8\10\12→9→0

1→10\8
2→11\9\7
3→12\10\8\6
4→13\11\9\7\5
5→14\12\10\8\6\4
6→15\13\11\9\7\5\3
7→14\12\10\8\6\4\2
8→13\11\9\7\5\3\1
9→12\10\8\6\4\2\0
10→11\9\7\5\3\1
11→10\8\6\4\2
12→9\7\5\3
13→8\6\4
14→7\5
15→6

從以上範例中，M=12、N=5 的 M 與 N 相差 7，而 M=15、N=9 的 M 與 N 相差 6。

綜合而言，當求解幾個最多組?可以發現，當越往右，則 N 越大，可翻至最多組的個數是以 4 個 4 個向右層層遞減。因而推演出，總杯數定義為 M，可翻杯數定義為 N，其所呈現可翻至最多組的個數，整理如下：

$\begin{cases} M=11 \\ N=1 \end{cases}$ 10 個 ； $\begin{cases} M=11 \\ N=3 \end{cases}$ 6 個

$\begin{cases} M=12 \\ N=1 \end{cases}$ 11 個 ； $\begin{cases} M=12 \\ N=3 \end{cases}$ 7 個 ； $\begin{cases} M=12 \\ N=5 \end{cases}$ 3 個

$\begin{cases} M=13 \\ N=1 \end{cases}$ 12 個 ； $\begin{cases} M=13 \\ N=3 \end{cases}$ 8 個 ； $\begin{cases} M=13 \\ N=5 \end{cases}$ 4 個

$\begin{cases} M=14 \\ N=1 \end{cases}$ 13 個 ； $\begin{cases} M=14 \\ N=3 \end{cases}$ 9 個 ； $\begin{cases} M=14 \\ N=5 \end{cases}$ 5 個 ； $\begin{cases} M=14 \\ N=7 \end{cases}$ 1 個

$\begin{cases} M=15 \\ N=1 \end{cases}$ 14 個 ； $\begin{cases} M=15 \\ N=3 \end{cases}$ 10 個 ； $\begin{cases} M=15 \\ N=5 \end{cases}$ 6 個 ； $\begin{cases} M=15 \\ N=7 \end{cases}$ 2 個

$\begin{cases} M=16 \\ N=1 \end{cases}$ 15 個 ； $\begin{cases} M=16 \\ N=3 \end{cases}$ 11 個 ； $\begin{cases} M=16 \\ N=5 \end{cases}$ 7 個 ； $\begin{cases} M=16 \\ N=7 \end{cases}$ 3 個

在上述中，差 4 是因為 N 以 2 個數在跳，而漢米爾頓演算法推導的倒金字塔型式之組數，亦為層層遞增至最多組，再層層遞減至 M→N 此一組。故 N 每加 2，導出最多組為何的式子 $\frac{M-\left|\left\{(M-N)-N\right\}\right|}{2}+1$會變為$\frac{M-\left\{(M-N)-N-4\right\}}{2}+1$(當 M-N 比 N 大)或是$\frac{M-\left\{N-(M-N)-4\right\}}{2}+1$ (當 N 比 M-N 小)，其最多組皆會加 2。然而，當遞增與遞減到使其倒金字塔型式之最多組的上層，因最多組組數增加 2，而使原來可到最多組之數字得再加 2，所以，為 4 個 4 個向右且 N 越大遞減愈多的最多組個數，以下同理。我們亦可用$\left|N-(M-N)\right|+1$來作解釋，其原

由則說明如下:

1、(N 可走至 M+N \ ...... \ 0) 括號中的東西，不論 M 與 N 為何，皆適用。

2、(M-N 可走至 M \ ...... \ 最多組的個數減去 1)，即是不論 N 為多少，**"M 與 N 不論差幾，我們皆可從 M-N 可走至的最小值再加上 1，便為最多組個數"**。 這是因為在倒金字塔型式中，其 M-N 的最後一個數字是會向上遞減(N<M-N)或向下遞減(N>M-N)的，而最終皆會到達 0，所以，是 M-N 可走至的最小值再加上 1。(因為 M-N 與 N 為最多組的極兩端)

所以，最大值為 M-N，是因為唯有 M-N 能到 0，而我們可從倒金字塔型式之中，每一數字的最後一格來看，會呈階梯狀向 M-N 的最後一格凸起，數字從 1 可到達的 N-1，直到 M-N 可到達的 0，再向下到 M 可到達的 M-N。因此，這樣看來，M-N 總是最多組的極限。**【當 M 與 N 差 7 以上(含 7) ，M-N 為可走到最多組裡面的最大數字；相反的，M 與 N 差 6 以下(含 6)，則 M-N 變為可走到最多組裡面的最小數字】**。

然而，就上述推導過程中，會有這麼一個式子說明：N 可走至的範圍與 M-N，是因為從倒金字塔型式中，我們可以發現 \ \ \ ... 其每一斜線框格中，整齊地從 1,2,3 往下列時：

1→…

2→…

3→…

:

M-1→…

M→…

其上述倒金字塔型式中，第一格中會看到，從 N+1 (1 → N+1 \ N-1) 代表可翻至的向上杯數，數字遞增直到 M-N 的 M (最大值)，再向下做遞減。而第二格從 N-1 整齊的向 M-N 做遞增，到 M-N 的 M-2，再向下做遞減。

歸納上述推導過程，進而得到以下結論：

1、可不必擔心會不會到了某點又得做遞增(遞增→遞減→遞增)，而這是不會發生的。在我們探究的過程，其 N 皆小於 M 時，至多是當 N=M-1 時，1 可到 M (因為此時的 1 變為 M-N)，頂多是不做遞增，由 M 直接遞減下去直到 M→0 (M 只能到 0，不論何種情況)，以上是討論第一格時。

2、而第二格依循第一格的減掉 2，除了 M 無法走到除 M-N 的另一個，整排下來，第一格有 M 個，第二格有 M-1 個(扣掉 M 這個數)，第三格有 M-3 個，...除了第一格到第二格只差 1 個，其餘皆為差 2。第二格差了 M 這個數，第三格差 M、1、M-1 這三個數，第四格差 M、1、M-1、2、M-2 這五個數，...。

3、對於 M 與 N 差 7 以內(不含 7)，則是能走至最多組的最小值為 N，最大值為 M-N。

4、(N 可走至 M+N \ ...... \ 0) 。

5、(M-N 可走至 M \ ...... \ 最多組的個數減去 1) 此括號中的一樣適用。

再者，**最多組個數的式子，可用: $\left|N-(M-N)\right|+1$，而這個式子不論 M 與 N 為何，皆可適用，並可解釋在前述的數據。**更進一步探究，此式子除從各範本統整外，尚可用倒金字塔型式之特性，就以前述**"M 與 N 不論差幾，我們皆可從 M-N 可走到的最小值去加上 1(即是 N 之推演的最後一個 0 的數字)，便為最多組個數"**括起來的。因而，**綜合以上兩結論，又得到 M-N 可走至的最小值(最後一格)即為 $\left|N-(M-N)\right|$**。所以，在倒金字塔型式中，有最多組為幾組的式子，且同時完成可走至最多組的個數亦有式子。

八、當漢米爾頓路徑是 2 的次方組解時(包含唯一)，**其所有漢米爾頓路徑都會有翻杯漢米爾頓路徑首尾相加現象的存在**。我們**找出其中的規律**並**證明 M=N+1 及 M=N+2 的唯一性**。分別為以下四種情形：

(一)當 M=N+1 時：

1.為何會只有 1 種解呢？原因在於倒金字塔型式中，每個數只能連接 2 個數，一個為連進來，一個為連出去的，加上每個數都只能出現一次，故存有一種解的走法。

2.一般式的規律: M→M-N→M-2→M-N+2→M-4→M-N+4→…→M-s→M-N+s→0 其中 s=N-1

Ex: (1) M=4，N=3 4→1→2→3→0

(2) M=10，N=9 10→1→8→3→6→5→4→7→2→9→0

(3) M=12，N=11 12→1→10→3→8→5→6→7→4→9→2→11→0

(4) M=22，N=21 22→1→20→3→18→5→16→7→14→9→12→11→10→13→8→15→6→17→4→19→2→21→0

(二)當 M=N+2 時：

1.為何會只有 1 種解呢？原因在於倒金字塔型式中，1 能走到與能走到 1 的數只有兩個，分別為 N-1(M-3)和 N+1(M-1)，而前面又說到相對位置的和要等於總杯數，故 1 和 M-1 必須放在中間。所以其他數只要會走到(M-該數)的皆不會相鄰，故可刪除。去除後每個數只能連接 2 個數，一個為連進來，一個為連出去的，加上每個數都只能出現一次，故存有一種解的走法。

2.一般式的規律: M→2→M-4→6→M-8→10→…

→M-10→8→M-6→4→M-2→0

由上式取(M+1)/2 項，剩餘的由下式取。

Ex: (1) M=5，N=3　5→2→1→4→3→0

(2) M=9 ， N=7　9→2→5→6→1→8→3→4→7→0

(3) M=13，N=11　13→2→9→6→5→10→1→12→3→8→7→4→11→0

(4) M=23，N=21　23→2→19→6→15→10→11→14→7→18→3→22→1→20→5→16→9→12→13→8→17→4→21→0

(三)當M = 2N ± 1時：

1.事實上，前述我們已經提過，當一數只能連接 2 個數，一個必為連接進來，另一個則連接出去。而當我們在找尋推導此條路徑問題時，若將已走過的數打叉去除，則一個只能連接兩個數的數，便會依序而來，並且不會同時出現，以及突然斷一個的情況，故存有一種解的走法。

2.一般式的規律:

$$M\rightarrow\frac{M\pm1}{2}\rightarrow1\rightarrow\frac{M\mp3}{2}\rightarrow M\text{-}2\rightarrow N\pm3\rightarrow3\rightarrow N\mp3\rightarrow M\text{-}4\rightarrow N\pm5\rightarrow5\rightarrow N\mp5\rightarrow\ldots$$
$$\rightarrow M\text{-}3\rightarrow N\mp2\rightarrow2\rightarrow N\pm2\rightarrow M\text{-}1\rightarrow N\rightarrow0$$

由上式取(M+1)/2 項，剩餘的由下式取。

Ex: (1) 當 **M=2N+1** 時，走一般式規律的上面那條

亦即 $M\rightarrow\frac{M+1}{2}\rightarrow1\rightarrow\frac{M-3}{2}\rightarrow M\text{-}2\rightarrow N+3\rightarrow3\rightarrow N-3\rightarrow M\text{-}4\rightarrow N+5\rightarrow5\rightarrow N-5\rightarrow\ldots$

$$\rightarrow M\text{-}3\rightarrow N-2\rightarrow2\rightarrow N+2\rightarrow M\text{-}1\rightarrow N\rightarrow0$$

由上式取(M+1)/2 項，剩餘的由下式取。

a. M=7，N=3　7→4→1→2→5→6→3→0

b. M=11，N=5　11→6→1→4→9→8→3→2→7→10→5→0

c. M=15，N=7　15→8→1→6→13→10→3→4→11→12→5→2→9→14→7→0

d. M=19，N=9　19→10→1→8→17→12→3→6→15→14→5→4→13→16→7→2→11→18→9→0

(2) 當 **M=2N-1** 時，走一般式規律的下面那條

亦即 $M\rightarrow\frac{M-1}{2}\rightarrow1\rightarrow\frac{M+3}{2}\rightarrow M\text{-}2\rightarrow N-3\rightarrow3\rightarrow N+3\rightarrow M\text{-}4\rightarrow N-5\rightarrow5\rightarrow N+5\rightarrow\ldots$

$$\rightarrow M\text{-}3\rightarrow N+2\rightarrow2\rightarrow N-2\rightarrow M\text{-}1\rightarrow N\rightarrow0$$

由上式取(M+1)/2 項，剩餘的由下式取。

a.M=9，N=5　9→4→1→6→7→2→3→8→5→0

b.M=13，N=7　13→6→1→8→11→4→3→10→9→2→5→12→7→0

c.M=17，N=9　17→8→1→10→15→6→3→12→13→4→5→14→11→2→7→16→9→0

d.M=25，N=13　25→12→1→14→23→10→3→16→21→8→5→18→19→6→7→20→17→4→9→22→15→2→11→24→13→0

(四)當 M=2N±2 時：

配合運用漢米爾頓演算法之倒金字塔型式推導篩選，詳細列出其路徑之規律：

1→ N+1 \ N-1

2→ N+2 \ N \ N-2

:

M-N→M\M-2\M-4……(視最多組之值為何，4 組則到 M-6，5 組則到 M-8…等等)

M-N+1 → M-1 \ M-3 \ M-5 ……

:

M-N+k → M-k \ M-k-2……

:

M→N

(1) M =2N−2

a. 式子由前往後推導：

$$M \to M\text{-}N \to \left\{\begin{array}{l} 2 \to N+2 \to \left\{\begin{array}{l} 4 \to N+4 \to \left\{\begin{array}{l} 6 \to N+6 \to \left\{\begin{array}{l}\cdots\\ \cdots\end{array}\right. \\ M-6 \to N-8 \to \left\{\begin{array}{l}\cdots\\ \cdots\end{array}\right. \end{array}\right. \\ M-4 \to N-6 \to \left\{\begin{array}{l} 6 \to N+6 \to \left\{\begin{array}{l}\cdots\\ \cdots\end{array}\right. \\ M-6 \to N-8 \to \left\{\begin{array}{l}\cdots\\ \cdots\end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \\ M\text{-}2 \to N\text{-}4 \to \left\{\begin{array}{l} 4 \to N+4 \to \left\{\begin{array}{l} 6 \to N+6 \to \left\{\begin{array}{l}\cdots\\ \cdots\end{array}\right. \\ M-6 \to N-8 \to \left\{\begin{array}{l}\cdots\\ \cdots\end{array}\right. \end{array}\right. \\ M-4 \to N-6 \to \left\{\begin{array}{l} 6 \to N+6 \to \left\{\begin{array}{l}\cdots\\ \cdots\end{array}\right. \\ M-6 \to N-8 \to \left\{\begin{array}{l}\cdots\\ \cdots\end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

b. 式子由後往前推導：

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{l}\cdots\\ \cdots\end{array}\right\} \to N-8 \to M-6 \\ \left.\begin{array}{l}\cdots\\ \cdots\end{array}\right\} \to N+6 \to 6 \end{array}\right\} \to N-6 \to M-4 \\ \left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{l}\cdots\\ \cdots\end{array}\right\} \to N-8 \to M-6 \\ \left.\begin{array}{l}\cdots\\ \cdots\end{array}\right\} \to N+6 \to 6 \end{array}\right\} \to N+4 \to 4 \end{array}\right\} \to N-4 \to M-2 \\ \left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{l}\cdots\\ \cdots\end{array}\right\} \to N-8 \to M-6 \\ \left.\begin{array}{l}\cdots\\ \cdots\end{array}\right\} \to N+6 \to 6 \end{array}\right\} \to N-6 \to M-4 \\ \left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{l}\cdots\\ \cdots\end{array}\right\} \to N-8 \to M-6 \\ \left.\begin{array}{l}\cdots\\ \cdots\end{array}\right\} \to N+6 \to 6 \end{array}\right\} \to N+4 \to 4 \end{array}\right\} \to N+2 \to 2 \end{array}\right\} \to N \to 0$$

EX: (a) M=8，N=5

$$8 \to 3 \to \left\{\begin{array}{l} 2 \to 7 \to 4 \to 1 \to 6 \\ 6 \to 1 \to 4 \to 7 \to 2 \end{array}\right\} \to 5 \to 0$$

當上下兩式推導到同一數字時，兩式會呈現上下對稱的現象，且上下兩數相加為總杯數。此式子的同一數字為總杯數的一半=4。

(b) M=12，N=7

$$12\to5\to\left\{\begin{array}{l}2\to9\to\left\{\begin{array}{l}4\to11\to6\to1\to8\\8\to1\to6\to11\to4\end{array}\right\}\to3\to10\\10\to3\to\left\{\begin{array}{l}4\to11\to6\to1\to8\\8\to1\to6\to11\to4\end{array}\right\}\to9\to2\end{array}\right\}\to7\to0$$

當上下兩式推導到同一數字時，兩式會呈現上下對稱的現象，且上下兩數相加為總杯數。此式子的同一數字為總杯數的一半=6。

(c) M=16，N=9

$$16\to7\to\left\{\begin{array}{l}2\to11\to\left\{\begin{array}{l}4\to13\to\left\{\begin{array}{l}6\to15\to8\to1\to10\\10\to1\to8\to15\to6\end{array}\right\}\to3\to12\\12\to3\to\left\{\begin{array}{l}6\to15\to8\to1\to10\\10\to1\to8\to15\to6\end{array}\right\}\to13\to4\end{array}\right\}\to5\to14\\14\to5\to\left\{\begin{array}{l}4\to13\to\left\{\begin{array}{l}6\to15\to8\to1\to10\\10\to1\to8\to15\to6\end{array}\right\}\to3\to12\\12\to3\to\left\{\begin{array}{l}6\to15\to8\to1\to10\\10\to1\to8\to15\to6\end{array}\right\}\to13\to4\end{array}\right\}\to11\to2\end{array}\right\}\to9\to0$$

當上下兩式推導到同一數字時，兩式會呈現上下對稱的現象，且上下兩數相加為總杯數。此式子的同一數字為總杯數的一半=8。

(d) M=20，N=11

$$20\to9\to\left\{\begin{array}{l}2\to13\to\left\{\begin{array}{l}4\to15\to\left\{\begin{array}{l}6\to17\to\left\{\begin{array}{l}8\to19\to10\to1\to12\\12\to1\to10\to19\to8\end{array}\right\}\to3\to14\\14\to3\to\left\{\begin{array}{l}8\to19\to10\to1\to12\\12\to1\to10\to19\to8\end{array}\right\}\to17\to6\end{array}\right\}\to5\to16\\16\to5\to\left\{\begin{array}{l}6\to17\to\left\{\begin{array}{l}8\to19\to10\to1\to12\\12\to1\to10\to19\to8\end{array}\right\}\to3\to14\\14\to3\to\left\{\begin{array}{l}8\to19\to10\to1\to12\\12\to1\to10\to19\to8\end{array}\right\}\to17\to6\end{array}\right\}\to15\to4\end{array}\right\}\to7\to18\\18\to7\to\left\{\begin{array}{l}4\to15\to\left\{\begin{array}{l}6\to17\to\left\{\begin{array}{l}8\to19\to10\to1\to12\\12\to1\to10\to19\to8\end{array}\right\}\to3\to14\\14\to3\to\left\{\begin{array}{l}8\to19\to10\to1\to12\\12\to1\to10\to19\to8\end{array}\right\}\to17\to6\end{array}\right\}\to5\to16\\16\to5\to\left\{\begin{array}{l}6\to17\to\left\{\begin{array}{l}8\to19\to10\to1\to12\\12\to1\to10\to19\to8\end{array}\right\}\to3\to14\\14\to3\to\left\{\begin{array}{l}8\to19\to10\to1\to12\\12\to1\to10\to19\to8\end{array}\right\}\to17\to6\end{array}\right\}\to15\to4\end{array}\right\}\to13\to2\end{array}\right\}\to11\to0$$

當上下兩式推導到同一數字時，兩式會呈現上下對稱的現象，且上下兩數相加為總杯數。此式子的同一數字為總杯數的一半=10。

(2) M =2N+2

a. 式子由前往後推導：

$$M\to M\text{-}N\to\left\{\begin{array}{l}2\to N\text{-}2\to\left\{\begin{array}{l}4\to N-4\to\left\{\begin{array}{l}6\to N-6\to\left\{\begin{array}{l}\cdots\\\cdots\end{array}\right.\\M-6\to N+8\to\left\{\begin{array}{l}\cdots\\\cdots\end{array}\right.\end{array}\right.\\M-4\to N+6\to\left\{\begin{array}{l}6\to N-6\to\left\{\begin{array}{l}\cdots\\\cdots\end{array}\right.\\M-6\to N+8\to\left\{\begin{array}{l}\cdots\\\cdots\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\\M\text{-}2\to N+4\to\left\{\begin{array}{l}4\to N-4\to\left\{\begin{array}{l}6\to N-6\to\left\{\begin{array}{l}\cdots\\\cdots\end{array}\right.\\M-6\to N+8\to\left\{\begin{array}{l}\cdots\\\cdots\end{array}\right.\end{array}\right.\\M-4\to N+6\to\left\{\begin{array}{l}6\to N-6\to\left\{\begin{array}{l}\cdots\\\cdots\end{array}\right.\\M-6\to N+8\to\left\{\begin{array}{l}\cdots\\\cdots\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

b. 式子由後往前推導：

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\cdots\\\cdots\end{array}\right\}\to N+8\to M-6\\\left.\begin{array}{l}\cdots\\\cdots\end{array}\right\}\to N-6\to 6\end{array}\right\}\to N+6\to M-4\\\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\cdots\\\cdots\end{array}\right\}\to N+8\to M-6\\\left.\begin{array}{l}\cdots\\\cdots\end{array}\right\}\to N-6\to 6\end{array}\right\}\to N-4\to 4\end{array}\right\}\to N+4\to M-2\\\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\cdots\\\cdots\end{array}\right\}\to N+8\to M-6\\\left.\begin{array}{l}\cdots\\\cdots\end{array}\right\}\to N-6\to 6\end{array}\right\}\to N+6\to M-4\\\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\cdots\\\cdots\end{array}\right\}\to N+8\to M-6\\\left.\begin{array}{l}\cdots\\\cdots\end{array}\right\}\to N-6\to 6\end{array}\right\}\to N-4\to 4\end{array}\right\}\to N-2\to 2\end{array}\right\}\to N\to 0$$

EX: (a) M=8，N=3

$$8\to 5\to\left\{\begin{array}{l}2\to 1\to 4\to 7\to 6\\6\to 7\to 4\to 1\to 2\end{array}\right\}\to 3\to 0$$

當上下兩式推導到同一數字時，兩式會呈現上下對稱的現象，且上下兩數相加為總杯數。此式子的同一數字為總杯數的一半=4。

(b) M=12，N=5

$$12\to 7\to\left\{\begin{array}{l}2\to 3\to\left\{\begin{array}{l}4\to 1\to 6\to 11\to 8\\8\to 11\to 6\to 1\to 4\end{array}\right\}\to 9\to 10\\10\to 9\to\left\{\begin{array}{l}4\to 1\to 6\to 11\to 8\\8\to 11\to 6\to 1\to 4\end{array}\right\}\to 3\to 2\end{array}\right\}\to 5\to 0$$

當上下兩式推導到同一數字時，兩式會呈現上下對稱的現象，且上下兩數相加為總杯數。此式子的同一數字為總杯數的一半=6。

(c) M=16，N=7

$$16\to 9\to\left\{\begin{array}{l}2\to 5\to\left\{\begin{array}{l}4\to 3\to\left\{\begin{array}{l}6\to 1\to 8\to 15\to 10\\10\to 15\to 8\to 1\to 6\end{array}\right\}\to 13\to 12\\12\to 13\to\left\{\begin{array}{l}6\to 1\to 8\to 15\to 10\\10\to 15\to 8\to 1\to 6\end{array}\right\}3\to 4\end{array}\right\}\to 11\to 14\\14\to 11\to\left\{\begin{array}{l}4\to 3\to\left\{\begin{array}{l}6\to 1\to 8\to 15\to 10\\10\to 15\to 8\to 1\to 6\end{array}\right\}13\to 12\\12\to 13\to\left\{\begin{array}{l}6\to 1\to 8\to 15\to 10\\10\to 15\to 8\to 1\to 6\end{array}\right\}3\to 4\end{array}\right\}\to 5\to 2\end{array}\right\}\to 7\to 0$$

當上下兩式推導到同一數字時，兩式會呈現上下對稱的現象，且上下兩數相加為總杯數。此式子的同一數字為總杯數的一半=8。

(d) M=20，N=9

$$20\to 11\to\left\{\begin{array}{l}2\to 7\to\left\{\begin{array}{l}4\to 5\to\left\{\begin{array}{l}6\to 3\to\left\{\begin{array}{l}8\to 1\to 10\to 19\to 12\\12\to 19\to 10\to 1\to 8\end{array}\right\}17\to 14\to\\14\to 17\to\left\{\begin{array}{l}8\to 1\to 10\to 19\to 12\\12\to 19\to 10\to 1\to 8\end{array}\right\}3\to 6\to\end{array}\right\}15\to 16\to\\16\to 15\to\left\{\begin{array}{l}6\to 3\to\left\{\begin{array}{l}8\to 1\to 10\to 19\to 12\\12\to 19\to 10\to 1\to 8\end{array}\right\}17\to 14\to\\14\to 17\to\left\{\begin{array}{l}8\to 1\to 10\to 19\to 12\\12\to 19\to 10\to 1\to 8\end{array}\right\}3\to 6\to\end{array}\right\}5\to 4\to\end{array}\right\}13\to 18\to\\18\to 13\to\left\{\begin{array}{l}4\to 5\to\left\{\begin{array}{l}6\to 3\to\left\{\begin{array}{l}8\to 1\to 10\to 19\to 12\\12\to 19\to 10\to 1\to 8\end{array}\right\}17\to 14\to\\14\to 17\to\left\{\begin{array}{l}8\to 1\to 10\to 19\to 12\\12\to 19\to 10\to 1\to 8\end{array}\right\}3\to 6\to\end{array}\right\}15\to 16\to\\16\to 15\to\left\{\begin{array}{l}6\to 3\to\left\{\begin{array}{l}8\to 1\to 10\to 19\to 12\\12\to 19\to 10\to 1\to 8\end{array}\right\}17\to 14\to\\14\to 17\to\left\{\begin{array}{l}8\to 1\to 10\to 19\to 12\\12\to 19\to 10\to 1\to 8\end{array}\right\}3\to 6\to\end{array}\right\}5\to 4\to\end{array}\right\}7\to 2\to\end{array}\right\}\to 9\to 0$$

當上下兩式推導到同一數字時，兩式會呈現上下對稱的現象，且上下兩數相加為總杯數。此式子的同一數字為總杯數的一半=10。

伍、研究結果

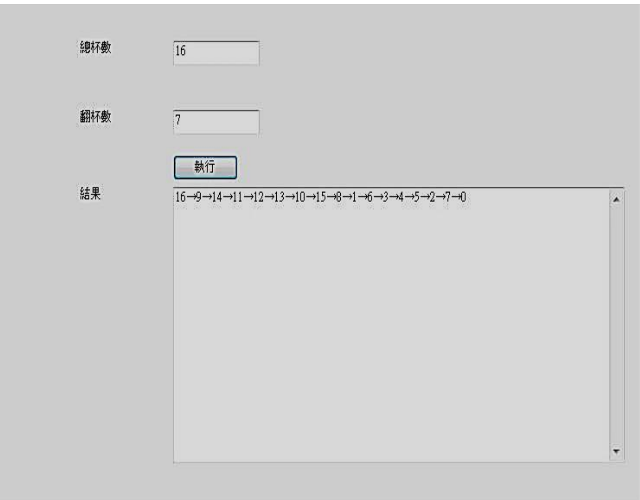
我們試著朝**圖形使用者操作的友善介面(GUI)**方式，來**呈現漢米爾頓路徑的走法，**除利用程式設計語言Visual C#，將翻杯漢米爾頓演算法推導出來的規律轉換為數學一般式，運用數學邏輯並加入排列組合因素作考量，寫出程式並執行，同時配合下載Microsoft Visual Studio Community 2017 的免費軟體開發套件，亦具有其 跨平台開源整合式的開發環境 (IDE)，將所求的漢米爾頓路徑的加以呈現之。

一、由於我們只探究在漢米爾頓路徑中，有出現首尾相加等於總杯數時的情形，故將下方表格分為四大類型**探討其是否至少存在一條漢米爾頓路徑，並以 GUI 來呈現**：

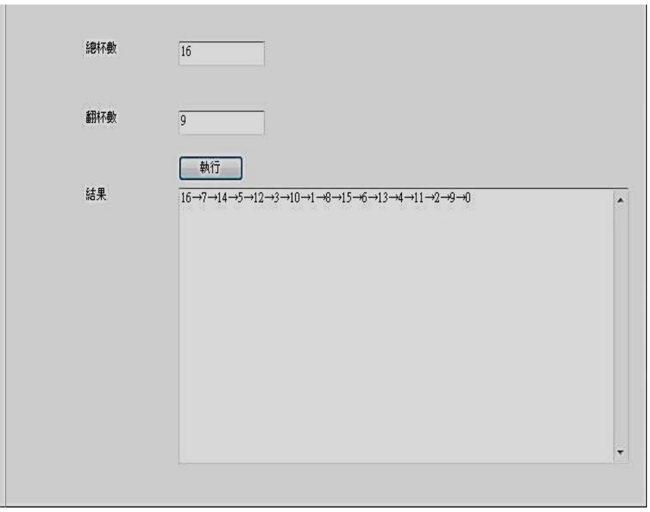
翻杯數 N ＼ 總杯數 M	奇數	偶數
偶數	(一) 1. M>2N 2. M<2N	(三) 1. M>2N 2. M<2N
奇數	(二) 1. M>2N ($M \neq 2N+1$) 2. M<2N ($M \neq 2N-1$) 3. M=2N-1 4. M=2N+1	(四) 1. M>2N 2. M<2N

(一) M 為偶數(=R)，N 為奇數，M、N 關係有兩種情形：

1.當 M>2N　　ex: M=16,N=7



2.當 M<2N　　ex: M=16,N=9

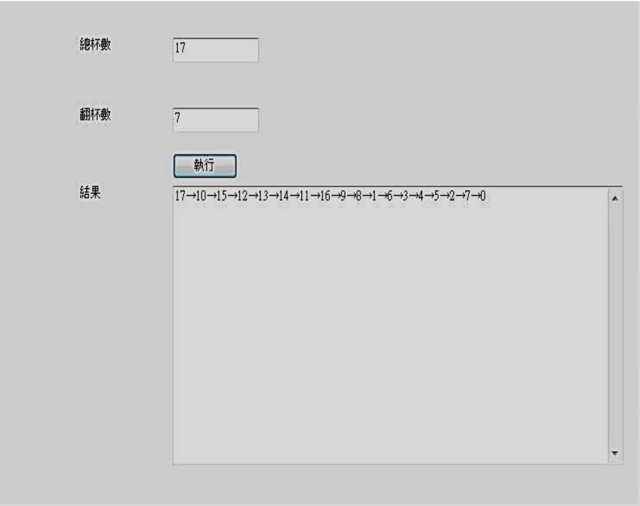


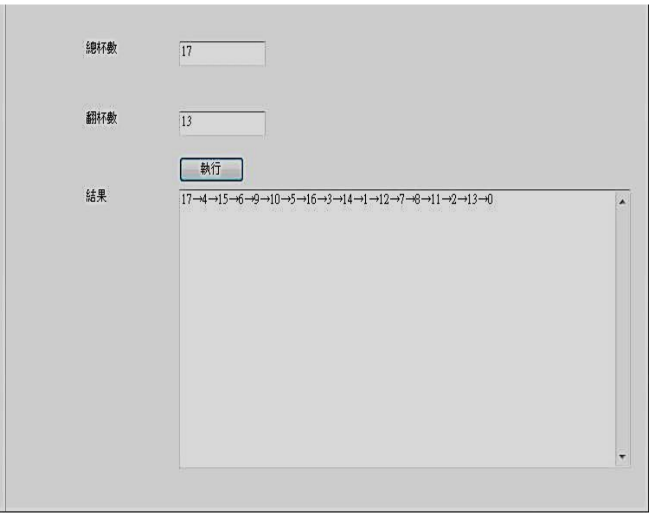
當每次翻轉 N 個奇數杯子時：

$$
N=2k+1\begin{cases}
M=2k\begin{cases}
M>2N\begin{cases}
\text{i=2k}, & \mathrm{X_j}=M,\ X_{i+2}=X_i-2\\
\text{i=2k+1}\begin{cases}\mathrm{i}\le \mathrm{N}, & \mathrm{X_j}=M-N,\ X_{i+2}=X_i+2\\ \text{i>N}, & \mathrm{X_j}=M-N-2,\ X_{i+2}=X_i-2\end{cases}
\end{cases}\\
M<2N\begin{cases}
\text{i=2k}, & \mathrm{X_j}=M,\ X_{i+2}=X_i-2\\
\text{i=2k+1}\begin{cases}\mathrm{i}\le M-\mathrm{N}, & \mathrm{X_j}=M-N,\ X_{i+2}=X_i+2\\ \text{i>M-N}, & \mathrm{X_j}=M-N+2,\ X_{i+2}=X_i+2\end{cases}
\end{cases}
\end{cases}\\
M=2k+1\begin{cases}
M>2N(M\ne 2N+1)\begin{cases}
\text{i=2k}, & \mathrm{X_j}=M,\ X_{i+2}=X_i-2\\
\text{i=2k+1}\begin{cases}\mathrm{i}\le \mathrm{N}, & \mathrm{X_j}=M-N,\ X_{i+2}=X_i+2\\ \text{i>N}, & \mathrm{X_j}=M-N-2,\ X_{i+2}=X_i-2\end{cases}
\end{cases}\\
M<2N(M\ne 2N-1)\begin{cases}
i\le\dfrac{N-3}{2}\begin{cases}
i\le\dfrac{M-N}{2}\begin{cases}i=2k,\mathrm{X_j}=M,X_{i+2}=X_i-2\\ i=2k+1,\mathrm{X_j}=M-N,X_{i+2}=X_i-2\end{cases}\\
i>\dfrac{M-N}{2}\begin{cases}i=2k,\mathrm{X_j}=M-2j,X_{i+2}=X_i-4\\ i=2k+1,\mathrm{X_j}=2j,X_{i+2}=X_i+4\end{cases}
\end{cases}\\
\dfrac{N-3}{2}<i\le\dfrac{N+3}{2}\begin{cases}
N=4s+1\begin{cases}i=\dfrac{N-1}{2},\mathrm{X_i}=M-N+1\\ i=\dfrac{N+1}{2},\mathrm{X_i}=M-1\\ i=\dfrac{N+3}{2},\mathrm{X_i}=M-N-1\end{cases}\\
N=4s+3\begin{cases}i=\dfrac{N-1}{2},\mathrm{X_i}=N-1\\ i=\dfrac{N+1}{2},\mathrm{X_i}=1\\ i=\dfrac{N+3}{2},\mathrm{X_i}=N+1\end{cases}
\end{cases}\\
i>\dfrac{N+3}{2}\begin{cases}
N=4s+1\begin{cases}i=2k,\mathrm{X_j}=M-N-3,X_{i+2}=X_i-2\\ i=2k+1,\mathrm{X_j}=M-2,X_{i+2}=X_i-2\end{cases}\\
N=4s+3\begin{cases}i=2k,\mathrm{X_j}=3,X_{i+2}=X_i+2\\ i=2k+1,\mathrm{X_j}=N+3,X_{i+2}=X_i+2\end{cases}
\end{cases}
\end{cases}\\
M=2N-1\begin{cases}
i=4k,\mathrm{X_j}=M,X_{i+4}=X_i-2\\
i=4k+1,\mathrm{X_j}=N-1,X_{i+4}=X_i-2\\
i=4k+2,\mathrm{X_j}=1,X_{i+4}=X_i+2\\
i=4k+3,\mathrm{X_j}=N+1,X_{i+4}=X_i+2
\end{cases}\\
M=2N+1\begin{cases}
i=4k,\mathrm{X_j}=M,X_{i+4}=X_i-2\\
i=4k+1,\mathrm{X_j}=N+1,X_{i+4}=X_i+2\\
i=4k+2,\mathrm{X_j}=1,X_{i+4}=X_i+2\\
i=4k+3,\mathrm{X_j}=N-1,X_{i+4}=X_i-2
\end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
$$

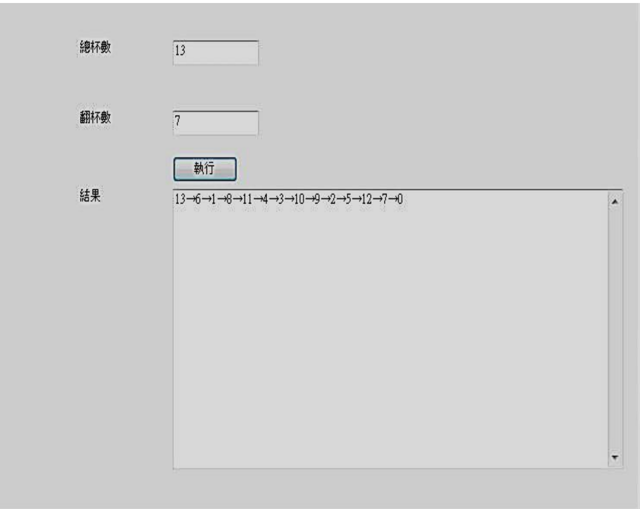
(二) M 為奇數(=R)，N 為奇數，M、N 關係有四種情形：

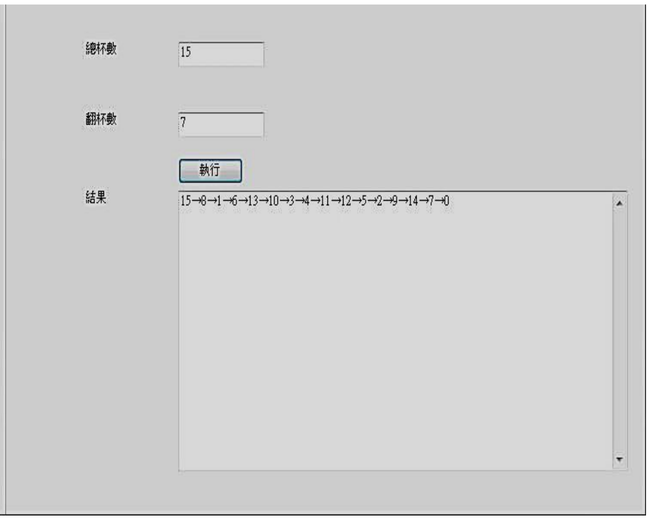
1.當 M>2N $(M \neq 2N+1)$　ex:M=17,N=7　**2.**當 M<2N $(M \neq 2N-1)$　ex: M=17,N=13





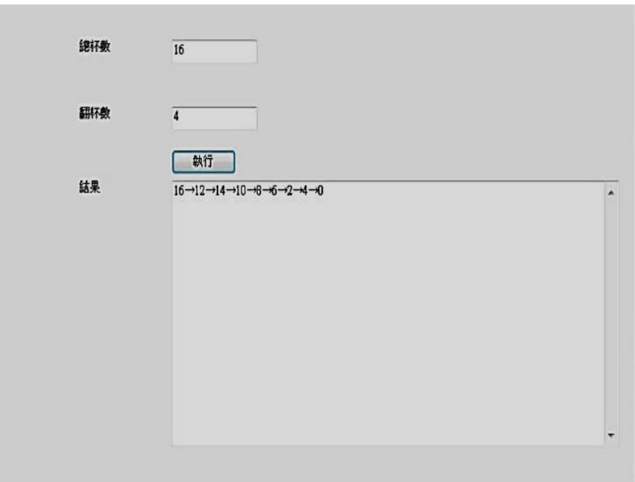
3.當 M=2N-1　ex: M=13,N=7　4.當 M=2N+1　ex: M=15,N=7

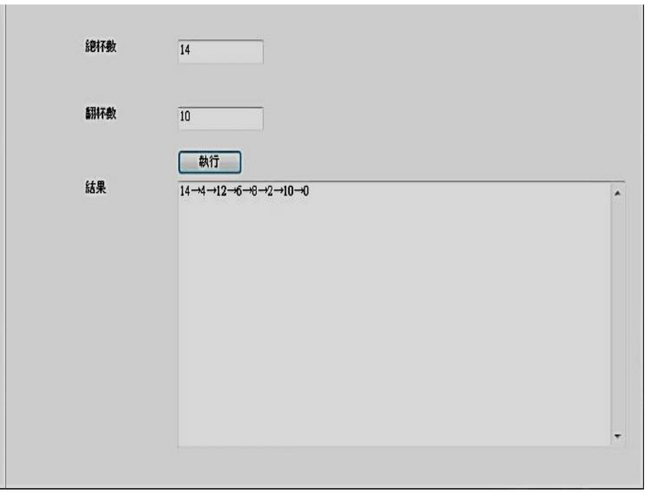




(三) M 為偶數(=R)，N 為偶數，M、N 關係有兩種情形：

1.當 M>2N　ex: M=16,N=4　2.當 M<2N　ex: M=14,N=10



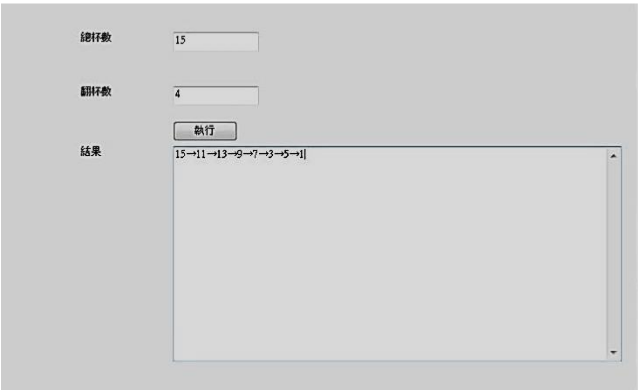


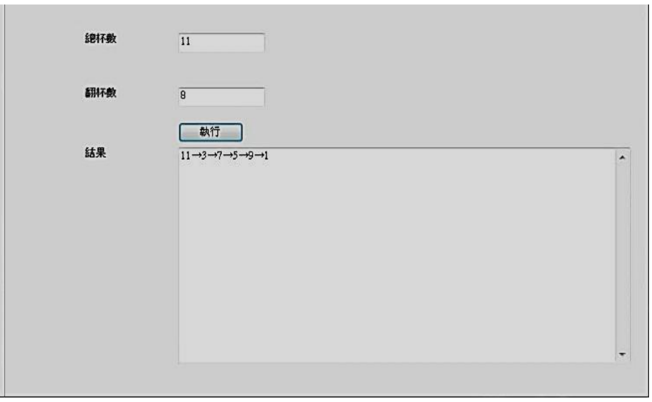
當每次翻轉 N 個偶數杯子時：

$$
N=2k\begin{cases}
M=2k\begin{cases}
M>2N\begin{cases}
i\le\dfrac{N}{2} & \begin{cases}\mathrm{i=2k},X_j=M,\ X_{i+2}=X_i-2\\ \mathrm{i=2k+1},X_j=M-N,\ X_{i+2}=X_i+2\end{cases}\\[2ex]
i>\dfrac{N}{2} & \quad X_j=M-N-1,\ X_{i+2}=X_i-2
\end{cases}\\[4ex]
M<2N\begin{cases}
i\le\dfrac{M-N}{2} & \begin{cases}\mathrm{i=2k},X_j=M,\ X_{i+2}=X_i-2\\ \mathrm{i=2k+1},X_j=M-N,\ X_{i+2}=X_i-2\end{cases}\\[2ex]
i>\dfrac{M-N}{2} & \begin{cases}i=2k,X_j=M-N,\ X_{i+2}=X_i+2\\ \mathrm{i=2k+1},X_j=M-N+2,\ X_{i+2}=X_i+2\end{cases}
\end{cases}
\end{cases}\\[8ex]
M=2k+1\begin{cases}
M>2N\begin{cases}
i\le\dfrac{N}{2} & \begin{cases}\mathrm{i=2k},X_j=M,\ X_{i+2}=X_i-2\\ \mathrm{i=2k+1},X_j=M-N,\ X_{i+2}=X_i+2\end{cases}\\[2ex]
i>\dfrac{N}{2} & \quad X_j=M-N-2,\ X_{i+2}=X_i-2
\end{cases}\\[4ex]
M<2N\begin{cases}
i\le\dfrac{M-N-1}{2} & \begin{cases}\mathrm{i=2k},X_j=M,\ X_{i+2}=X_i-2\\ \mathrm{i=2k+1},X_j=M-N,\ X_{i+2}=X_i-2\end{cases}\\[2ex]
i>\dfrac{M-N-1}{2} & \begin{cases}i=2k,X_j=N-1,\ X_{i+2}=X_i-4\\ \mathrm{i=2k+1},X_j=M-N+2,\ X_{i+2}=X_i+4\end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
$$

(四) M 為奇數(=R)，N 為偶數，M、N 關係有兩種情形：

1.當 M>2N　　ex: M=15,N=4　　　　　　2.當 M<2N　　ex: M=11,N=8



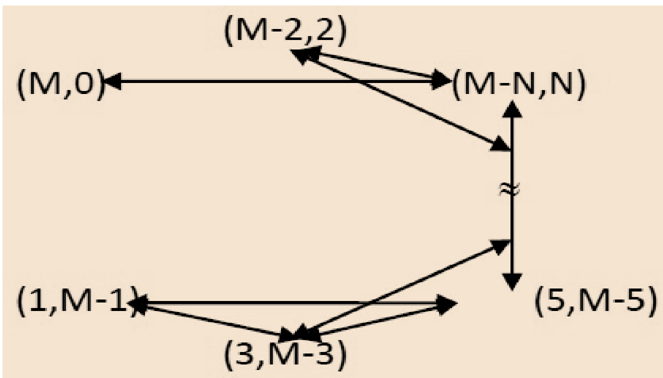


二、為 M 個杯子(奇數個或偶數個)且有 P 個杯子(奇數個或偶數個)朝上，每次翻轉 N 個杯子**(N 為大於 2 的偶數)**時：

(一)總杯數 M 為奇數，向上狀態 P 為奇數：

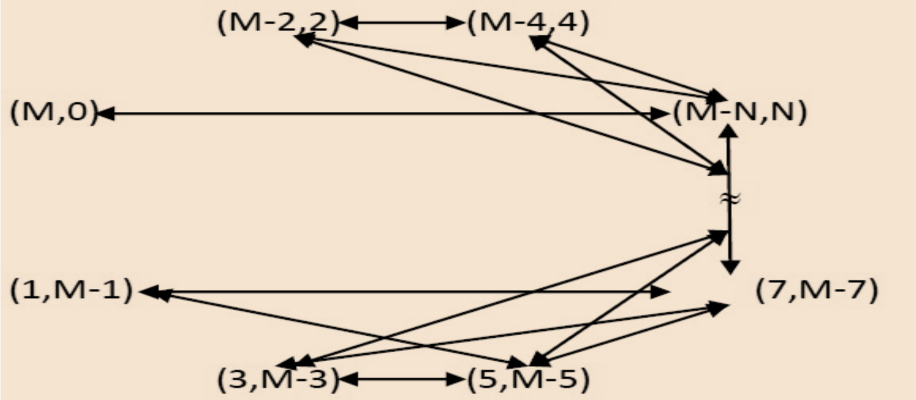
N=4 時，只有(M-N,N)為起點時沒有單一數漢米爾頓路徑，其餘都有單一數漢米爾頓路徑。

(M,0)為單一點。。



(此圖可無限延伸，連接到縱線代表還有其他的數對可連接)

N=6 時，只有(M-N,N)為起點時沒有單一數漢米爾頓路徑，其餘都有單一數漢米爾頓路徑。(M,0)為單一點。



(此圖可無限延伸，連接到縱線代表還有其他的數對可連接)

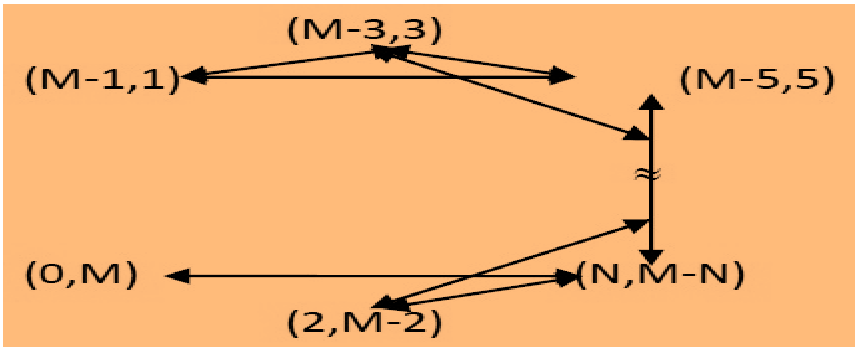
N>2 時，N 越大，除(M,0)、(1,M-1)外其餘數對可連接的路徑越多。(M,0)為單一點，因為只一條路徑可以連接，因此起始狀態為(M-N,N)時，無單一數漢米爾頓路徑。

(M,0)↔(M-N,N)

(1,M-1)↔(N-1,M-(N-1))、(N+1,M-(N+1))

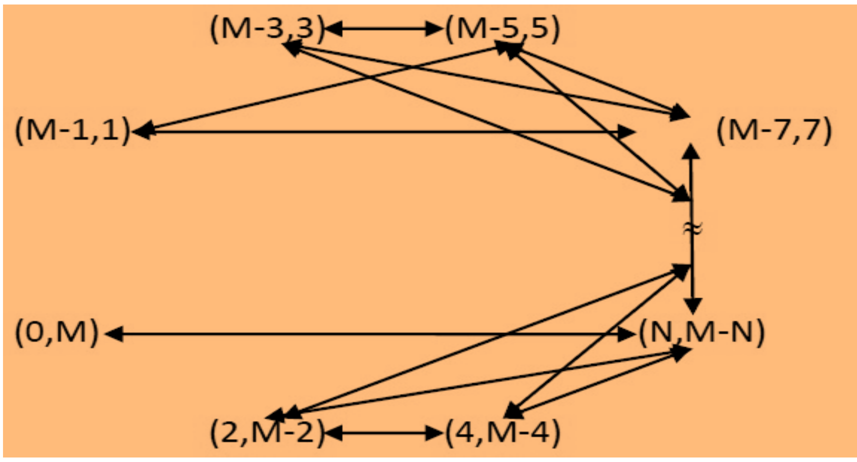
(二)總杯數 M 為奇數，向上狀態 P 為偶數：

N=4 時，只有(N,M-N) 為起點時沒有單一數漢米爾頓路徑，其餘都有單一數漢米爾頓路徑。(0,M)為單一點。



(此圖可無限延伸，連接到縱線代表還有其他的數對可連接)

N=6 時，只有(N,M-N) 為起點時沒有單一數漢米爾頓路徑，其餘都有單一數漢米爾頓路徑。(0,M)為單一點。



(此圖可無限延伸，連接到縱線代表還有其他的數對可連接)

N>2 時，N 越大，除(0,M)、(M-1,1)外其餘數對可連接的路徑越多。(0,M)為單一點，因為只一條路徑可以連接，因此起始狀態為(N,M-N)時，無單一數漢米爾頓路徑。

(0,M) ↔ (N,M-N)

(M-1,1) ↔ (M-(N-1),N-1)、(M-(N+1), N+1)

然而，當總杯數 M 為偶數時，會遇到 M=2N 的問題：

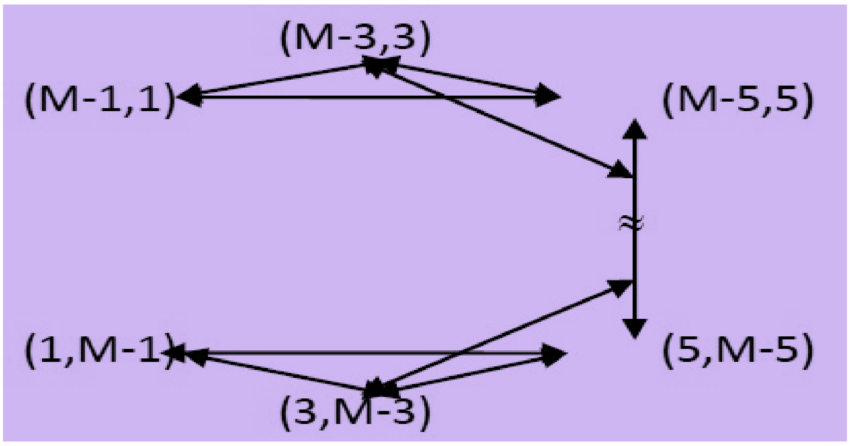
1.M=2N，N=2 有單一數漢米爾頓路徑，所以只討論 N>2 的偶數。

2.M=2N，向上狀態 P 為偶數時，無單一數漢米爾頓路徑，因為(M,0)、(0,M)為單一點，(M-N,N)、(N,M-N)為同一點，因此無單一數漢米爾頓路徑。

3.M=2N，向上狀態 P 為奇數時，有單一數漢米爾頓路徑，因為(M-1,1)、(1,M-1)不是單一點，(M-1,1)可以連接(M-(N+1),N+1)、(M-(N-1),N-1)、(1,M-1)可以連接(N+1,M-(N+1))、(N-1,M-(N-1))，因此有單一數漢米爾頓路徑。

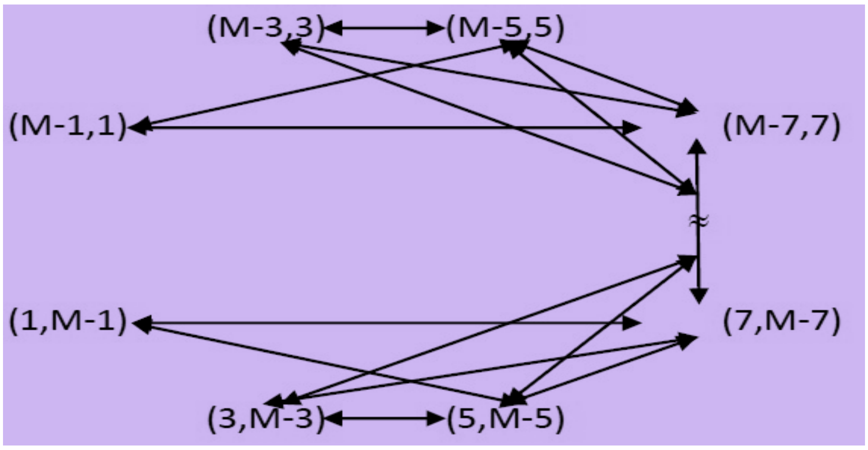
(三)總杯數 M 為偶數，向上狀態 P 為奇數：

N=4 時，都有單一數漢米爾頓路徑。



(此圖可無限延伸，連接到縱線代表還有其他的數對可連接)

N=6 時，都有單一數漢米爾頓路徑。



(此圖可無限延伸，連接到縱線代表還有其他的數對可連接)

N>2 時，N 越大，除(1,M-1)、(M-1,1)外，其餘數對可連接的路徑越多。(1,M-1)、(M-1,1)可以連接兩個數對，沒有單一點，因此向上杯數不論為何，都有單一數漢米爾頓路徑。

(1,M-1)↔(N-1,M-(N-1))、(N+1,M-(N+1))

(M-1,1)↔(M-(N-1),N-1)、(M-(N+1),N+1)

(四)總杯數 M 為偶數，向上狀態 P 為偶數：

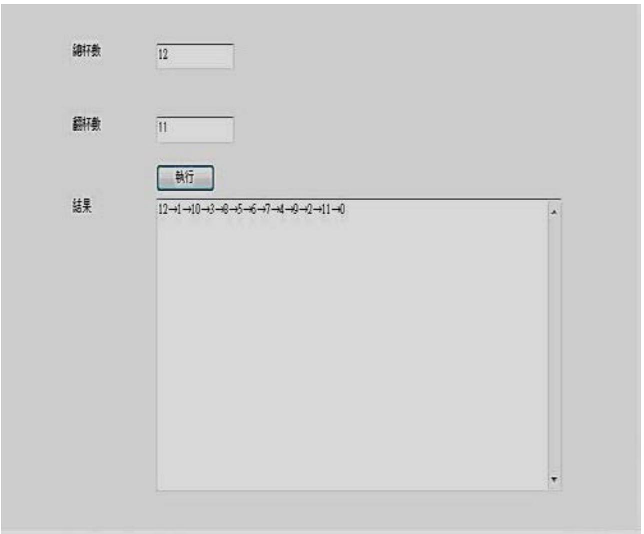
有兩個單一點(M,0)、(0,M)並且有 M=2N 的問題，因此只有在 M≠2N 且向上杯數為(M,0)、(0,M)時，才有單一數漢米爾頓路徑。

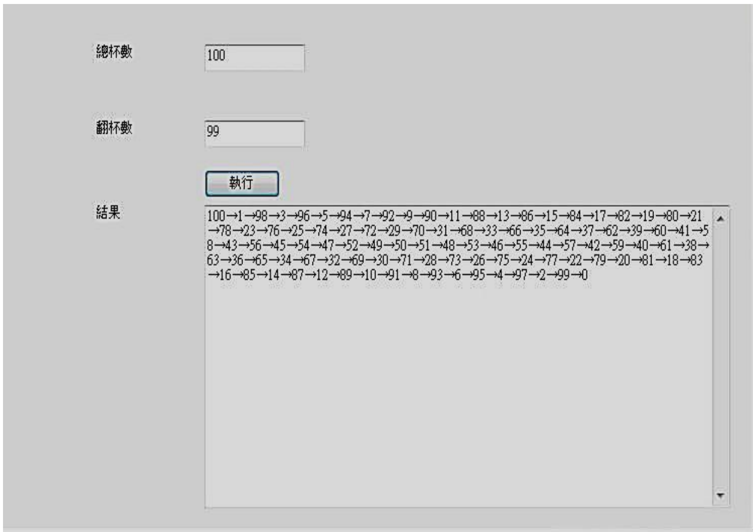
總杯數 M (M>N)	向上狀態 P ($P \leq M$)	翻杯數 N	單一數漢米爾頓路徑向上的杯數		可否走出與向上狀態 P 相同的所有杯數
			最大值	最小值	
奇數	奇數	N 為大於 2 的偶數	M	1	P=M-N 不可 其餘皆可
	偶數		M-1	0	P=N 不可 其餘皆可
偶數	奇數		M-1	1	皆可
	偶數		M	0	M≠2N 且 P=M 可 M≠2N 且 P=0 可 其餘皆不可

(此表格為 M、P、N 三者間之關係)

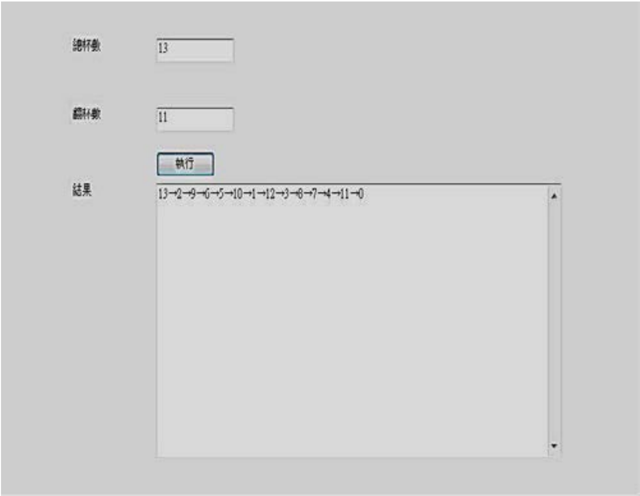
三、當漢米爾頓路徑是 2 的次方組解時(包含唯一)，其所有漢米爾頓路徑都會有翻杯漢米爾頓路徑首尾相加現象的存在。我們找出其規律並以 **GUI 呈現**，分別為以下四種情形：

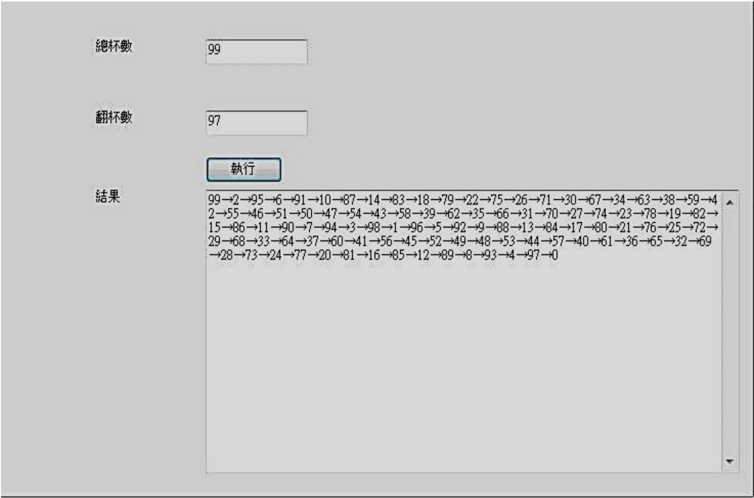
(一)當 M=N+1 時，此漢米爾頓路徑只有一種解



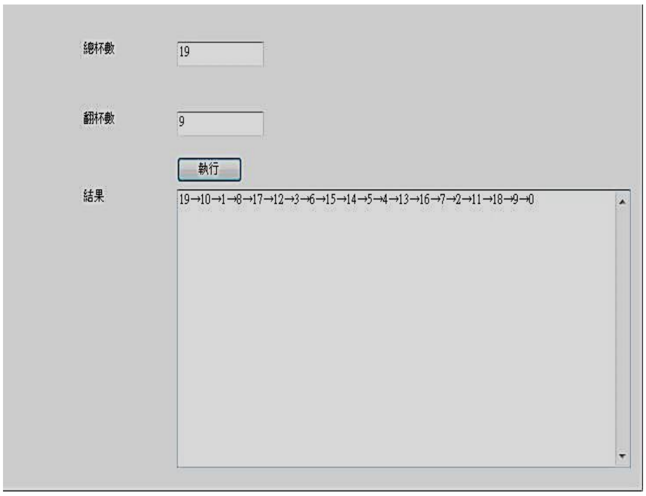


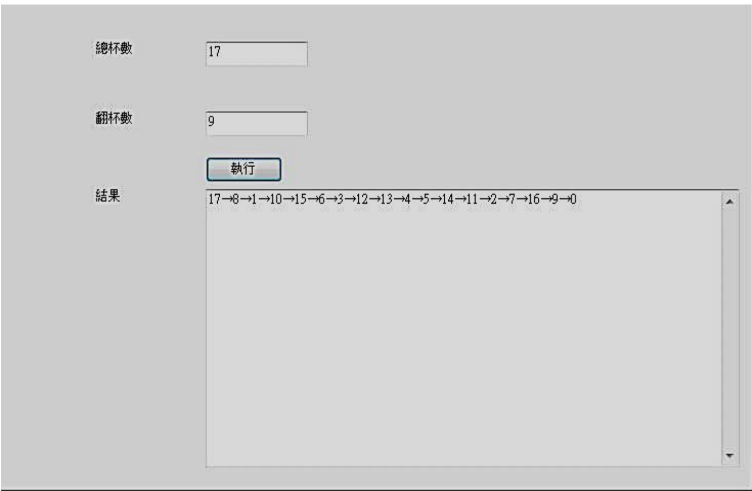
(二)當 M=N+2 時，此漢米爾頓路徑只有一種解



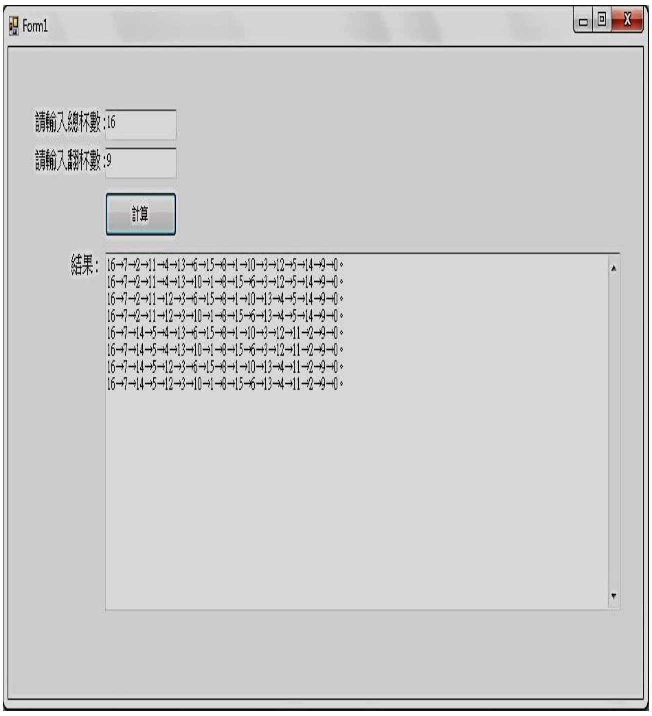


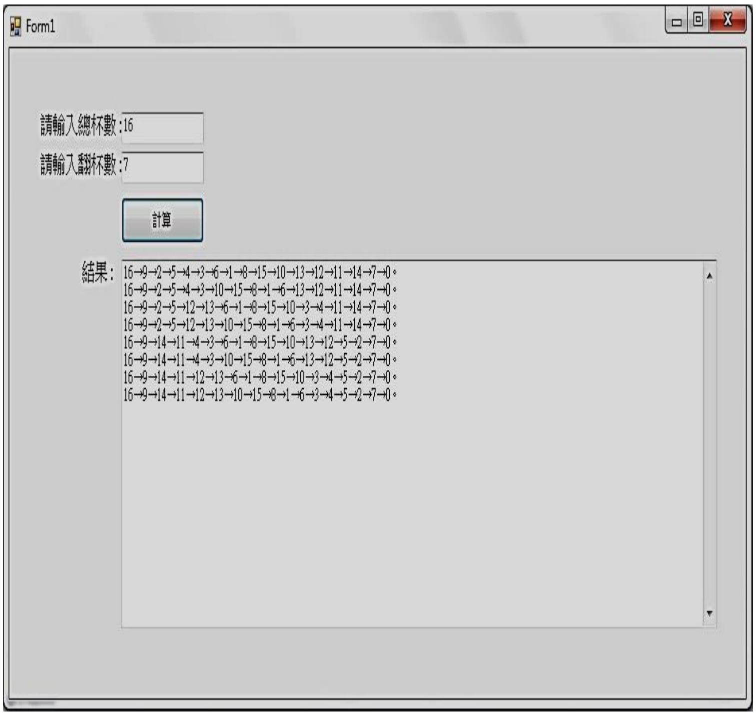
(三)當 $M = 2N \pm 1$ 時，此漢米爾頓路徑只有一種解





(四)當 M=2N±2 ($M = 4k$)**時，此漢米爾頓路徑有 $2^{\frac{M-4}{4}}$ 種解，依規律做排列組合考量**





四、對於漢米爾頓路徑 M=N+1 及 M=N+2 的唯一性，其證明如下:

(一)在翻杯的活動中，M 個杯子，其中有 a 個(開口)向上，b 個向下的狀態，記為(a,b)，其中$a \geq 0$，$b \geq 0$，a+b=M　。

(二)在狀態(a,b)中，若將 r 個向上，s 個向下的杯子固定，剩下的$(a+b)-(r+s)$個杯子翻一次，可得狀態$(r+b-s,s+a-r)$，其中$0 \leq r \leq a, 0 \leq s \leq b$。我們將此過程記為

$(a,b) \xrightarrow{[r,s]} (r+b-s,s+a-r)$　　或簡記為$(a,b) \longrightarrow (r+b-s,s+a-r)$

(三)前述的過程是可逆的，即若$(a,b) \xrightarrow{[r,s]} (c,d)$，則$(c,d) \xrightarrow{[r,s]} (a,b)$

我們可以將這個結果表示成$(a,b) \underset{[r,s]}{\overset{[r,s]}{\rightleftarrows}} (c,d)$

也可簡記為

$$(a,b) \xleftrightarrow{[r,s]} (c,d) \quad 或 \quad (c,d) \xleftrightarrow{[r,s]} (a,b)$$

(四)設$1 \leq N < M$，則我們將 M 個杯子，每次翻轉 N 個杯子的(翻杯)狀態

圖記為$G_{M,N}$，它含有 M+1 個頂點$(M,0),(M-1,1),(M-2,2),\ldots,(1,M-1),(0,M)$。

對任意兩相異頂點(a,b)和(c,d)，如果能夠找到合適的$[r,s]$使得 r+s=M-N 且

$(a,b) \xleftrightarrow{[r,s]} (c,d)$成立，則稱(a，b)和(c，d)相鄰(可以用一個邊把它們連起來)。

(五)因為 1. 把一個杯子翻兩次(或偶數次)的效果跟沒有翻過一樣，且 2. 把所有的杯子翻一遍，則原先向上的會向下，原先向下的會向上，所以我們可以把下面過程

$(a,b) \xrightarrow{[r,s]} (c,d)$ 分成兩步驟進行：

Step1:先翻 r 個向上，s 個向下的杯子，即$(a,b) \longrightarrow (a-r+s,b-s+r)$

Step2:再將所有的杯子翻一遍，即$(a-r+s,b-s+r) \longrightarrow (b-s+r,a-r+s)$

故$(c,d)=(b-s+r,a-r+s)$，此證明了(二)中的結果。

(六)在(五)中的討論可以用下圖表示：

$$\begin{tikzcd}
(a,b) \arrow[rr, "{[r,s]}"] \arrow[dr, "\text{Step1}"'] & & (b-s+r,a-r+s) \\
& (a-r+s,b-s+r) \arrow[ur, "\text{Step2}"'] &
\end{tikzcd}$$

(七)利用(五)中的 1. 亦可證明$(a,b) \underset{[r,s]}{\overset{[r,s]}{\rightleftarrows}} (c,d)$

這是因為連續兩次翻杯的過程中，有 r 個向上，s 個向下的杯子可以不被動到，而剩下的杯子都被翻了兩次，其效果也相當於不被動到，因此呈現出的狀態就跟沒有被翻過一樣。

接下來，我們透過一些例子說明(四)中，介紹的(翻杯)狀態圖。

例子一： M=4，N=3，則 M-N=1，因 $r \geq 0$ ， $s \geq 0$ ，且 r+s=M-N

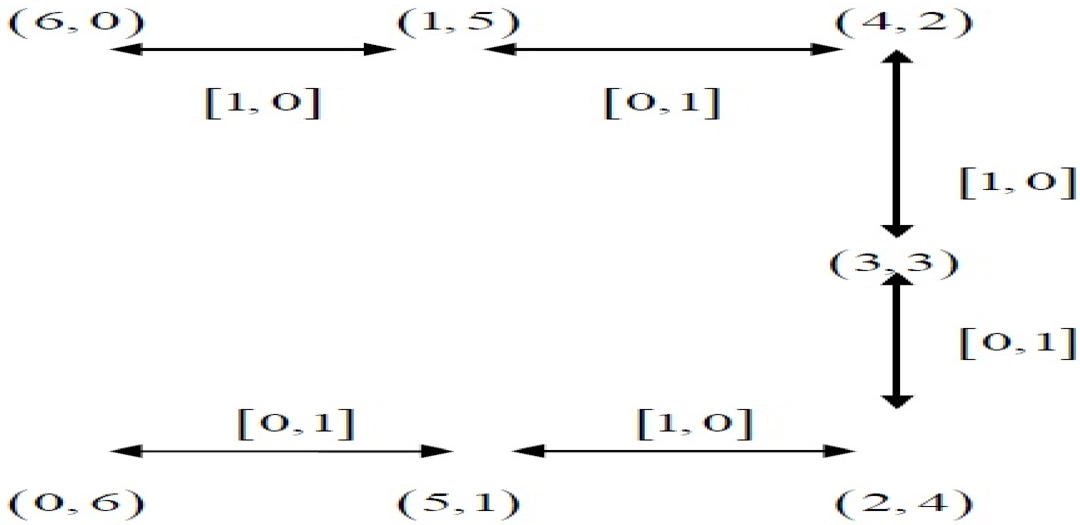
故 1. $[r,s]=[1,0]$ 或 $[r,s]=[0,1]$ 又 $(a,b)\xleftrightarrow{[r,s]}(c,d)$ 成立時必須

2. $r \leq a$ ， $s \leq b$ ，且 $r \leq c$ ， $s \leq d$ ，根據(二)，可以從頂點(4，0)開始逐步完成 $G_{4,3}$ ，如下:

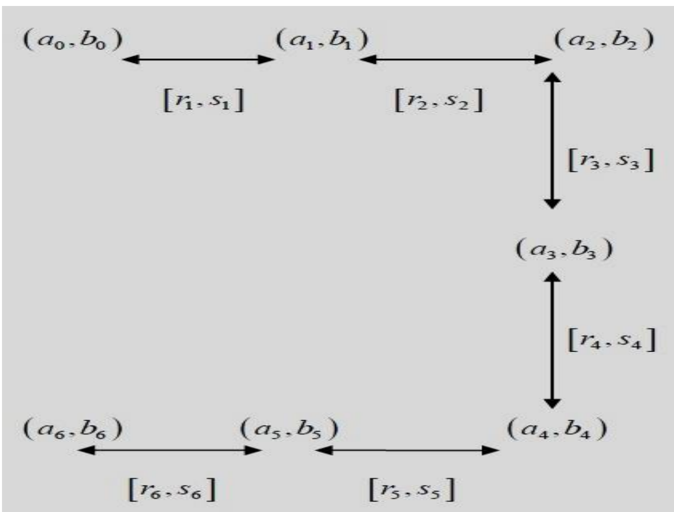
$$(4,0)\xleftrightarrow{[1,0]}(1,3)\xleftrightarrow{[0,1]}(2,2)\xleftrightarrow{[1,0]}(3,1)\xleftrightarrow{[0,1]}(0,4)$$

由 1. 和 2. 可知，除了 $(4,0)$ 與 $(0,4)$ 兩個頂點只有一個邊連接外，其餘的頂點皆有兩個邊連接，於是形成了唯一的漢米爾頓路徑，連接 $(4,0)$ 與 $(0,4)$ 。

例子二： M=6，N=5，則 M-N=1 同例子一的討論可知， $G_{6,5}$ 是一條連接 $(6,0)$ 與 $(0,6)$ 的漢米爾頓路徑，如下圖所示：



若將 $G_{6,5}$ 重新表示如右：



其中 1. $[r_1,s_1],[r_2,s_2],[r_3,s_3],\ldots,[r_6,s_6]$ 分別為 $[1,0],[0,1],[1,0],\ldots,[0,1]$ 。

2. $b_0, a_1, b_2, a_3, \ldots, b_6$ 分別為 0,1,2,3,…,6

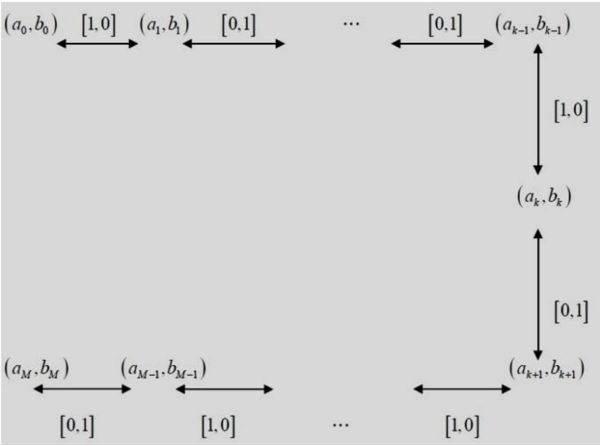
3. $a_i+b_i=6 \ (0 \leq i \leq 6)$

一般而言，我們有

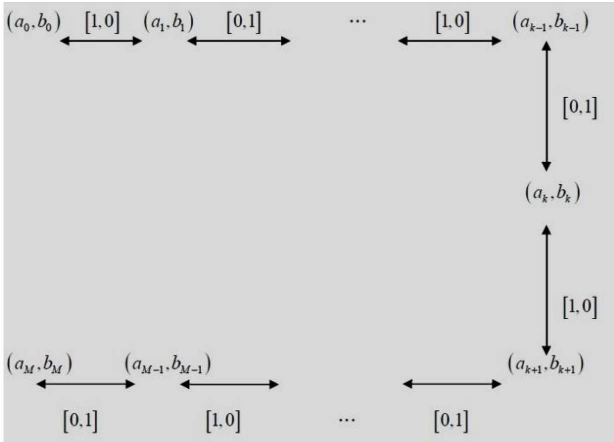
定理一：**當** $M=2k\ (k\geq 1)$，**N=M-1 時，** $G_{M,N}$ **是一條連接(M,0)與(0,M)的漢米爾頓路徑：**

$$(a_0,b_0)\xleftrightarrow{[r_1,s_1]}(a_1,b_1)\xleftrightarrow{[r_2,s_2]}(a_2,b_2)\ \ldots\ldots\ \xleftrightarrow{[r_M,s_M]}(a_M,b_M)$$

1. 當 K 為奇數時， $G_{M,N}$ **可表為**



2. 當 k 為偶數時， $G_{M,N}$ **可表為**



其中(1) $b_0,a_1,b_2,a_3,\ldots,a_{M-1},b_M$ **分別為 0,1,2,3,…,M-1,M**

且(2) $a_0,b_1,a_2,b_3,\ldots,b_{M-1},a_M$ **分別為 M,M-1,M-2,M-3,…,1,0**

例子三： M=5，N=3，則 M-N=2。

因 $r\geq 0$，$s\geq 0$，且 r+s=M-N，

故 $[r,s]=[2,0],[1,1]$或$[0,2]$。

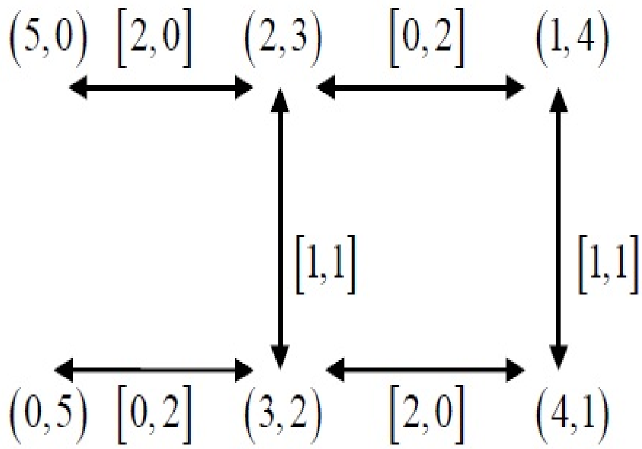
又$(a,b)\xleftrightarrow{[r,s]}(c,d)$成立時

必須 $r\leq a$，$s\leq b$，

且 $r\leq c$，$s\leq d$，

再根據(二)，可以從(5，0)開始

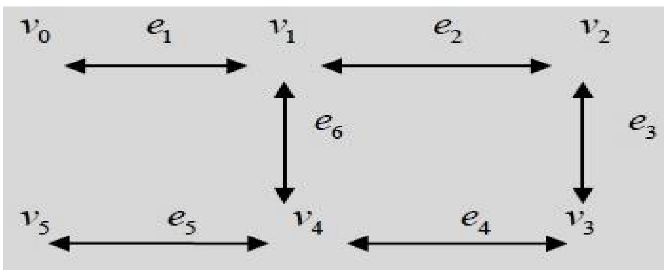
逐步完成$G_{5,3}$， 如右圖：



接下來證明$G_{5,3}$有唯一的漢米爾頓路徑

連接$(5,0)$與$(0,5)$，為方便起見，

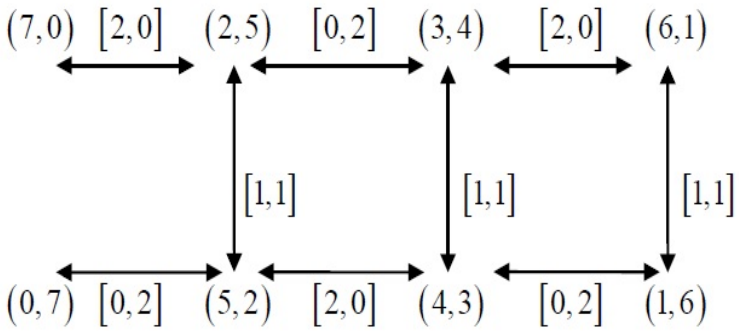
將$G_{5,3}$重新表示如右：



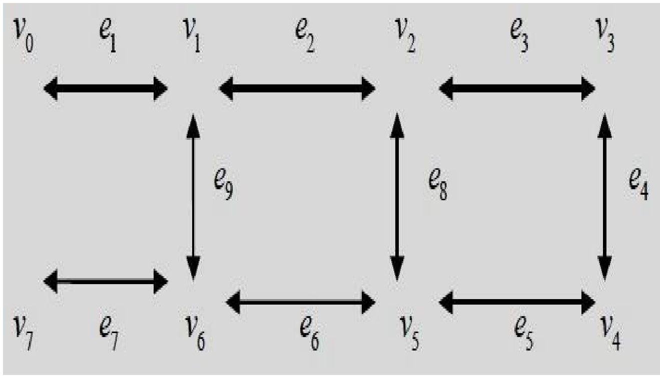
我們看到:在漢米爾頓路徑中(1) e_1一定要用到，因為v_0是始點；(2) e_5一定要用到，因為v_5是終點；(3) e_2和e_3一定要用到，因為v_2要被經過；(4) e_3和e_4一定要用到，因為v_3要被經過。

綜合(1)~(4)，$G_{5,3}$有唯一的漢米爾頓路徑e_1,e_2,e_3,e_4,e_5連接v_0與v_5。

例子四： M=7，N=5，則 M-N=2。同例子三的討論，可得 $G_{7,5}$ 如圖：



為方便起見，將左圖重新表示如下為 $G_{7,5}$：



在連接 v_0 和 v_7 的漢米爾頓路徑中，(1) e_1 一定要用到，因為 v_0 是始點；
(2) e_7 一定要用到，因為 v_7 是終點；(3) e_3,e_4,e_5 一定要用到，因為 v_3,v_4 被經過；

(4) e_8 不能被用到，否則 e_3,e_4,e_5,e_8 形成一個迴圈， v_2 或 v_5 將被經過兩次，不是漢米爾頓路徑；

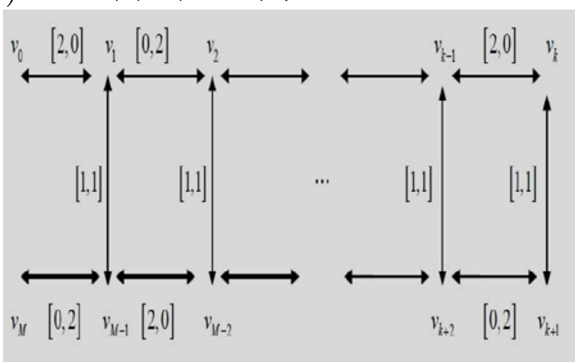
(5) 去掉 e_8 後， v_2 只有 e_2,e_3 與之相連， v_5 只有 e_5,e_6 與之相連，因此 e_2,e_3 必須用到且 e_5,e_6 也必須用到；(6) e_9 不能被用到，否則 e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_9 形成一個迴圈， v_1 或 v_6 將被經過兩次。

綜合(1)~(6)， $G_{7,5}$ 有唯一的漢米爾頓路徑 $e_1,e_2,\ldots,e_7$ 連接 v_0 與 v_7 。

一般而言，我們有

定理二：設 $M=2k+1\,(k\ge 1)$，且 N=M-2 時，令 $v_i=(a_i,b_i)$， $i=0,1,\cdots,M$ ，則

1.當 K 為奇數時， $G_{M,N}$ 可表為



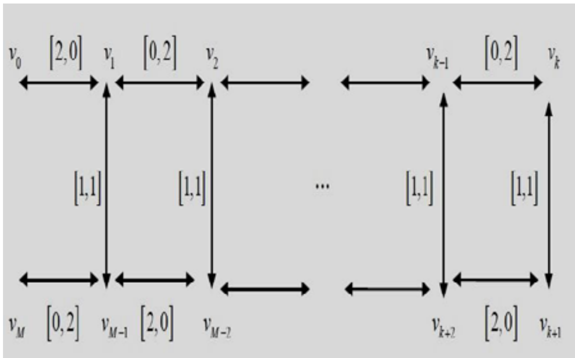
且(1) $b_0,a_1,b_2,\ldots,b_{k-1},a_k$ 分別為 0,2,4,…,2k-2,2k ；

(2) $a_0,b_1,a_2,\ldots,a_{k-1},b_k$ 分別為 M,M-2,M-4, … ,3,1 ；

(3) $a_{k+1},b_{k+2},a_{k+3},\ldots,a_{M-1},b_M$ 分別為 1,3,5, … ,M-2,M ；

(4) $b_{k+1},a_{k+2},b_{k+3},\ldots,b_{M-1},a_M$ 分別為 2k,2k-2,2k-4, … ,2,0 .

2.當 k 為偶數時， $G_{M,N}$ 可表為



且(1) $b_0,a_1,b_2,\ldots,a_{k-1},b_k$ 分別為 0,2,4, … ,2k-2,2k ；

(2) $a_0,b_1,a_2,\ldots,b_{k-1},a_k$ 分別為 M,M-2,M-4, … ,3,1 ；

(3) $b_{k+1},a_{k+2},b_{k+3},\ldots,a_{M-1},b_M$ 分別為 1,3,5, … ,M-2,M ；

(4) $a_{k+1},b_{k+2},a_{k+3},\ldots,b_{M-1},a_M$ 分別為 2k,2k-2,2k-4, … ,2,0 .

此外， **$G_{M,N}$ 有唯一的漢米爾頓路徑連接 $v_0=(M,0)$ 與 $v_M=(0,M)$ ，**
即(以頂點序列表示) $v_0-v_1-v_2-\cdots-v_{M-1}-v_M$ 。

陸、討論

雖然我們更深入地探究、發掘並解決相當部分的問題，而還未解決或未來可繼續研究的問題，我們做出以下的討論：

一、若 **$M=N+1, M=N+2, M=2N\pm1, M=2N\pm2$**時，**會有 2 的次方組(包含唯一)解**，且其數列首尾相加(第 1 個數加倒數第 1 個數，第 2 個數加倒數第 2 個數，……)之和會等於總杯數。還有，在其餘的式子中，也**至少會有一條漢米爾頓路徑**，出現這樣的情形。然而，其餘**未符合翻杯漢米爾頓路徑首尾相加現象**的漢米爾頓路徑，又會有呈現什麼規律呢？值得我們進一步探究。

二、在**一般漢米爾頓路徑**中，所有不大於 M、不小於 0 正整數都恰翻過一次，並且起始狀態為 M，最後要翻到為 0。然而，其**最短路徑**則是從任意正整數，翻到任意正整數且不須要翻過所有不大於 M、不小於 0 的正整數，則翻轉的過程又為何？可再進一步剖析驗證。

三、對於翻轉杯數為連續翻、因數翻、倍數翻、質數翻時（可見參考資料一與參考資料五），此漢米爾頓路徑的問題又將有何種不同的結果？這可作為我們未來繼續研究的方向。

四、在翻杯數為不固定翻且**同時需滿足質數翻的條件**下，是否存在著任意狀態到任意狀態？而此漢米爾頓路徑的問題，又將呈現何種的結果？對此將是我們日後繼續研究精進其完備的方向之一。

柒、結論

中小學科展	組別	作品名稱	研究範疇與貢獻
第36屆	高小組	翻來覆去乾坤轉—翻硬幣遊戲的新發現	探討硬幣遊戲的規律性：(1)固定數翻；(2)連續數翻；(3)倍數翻；(4)因數翻。
第43屆	高小組	最佳全翻位的探討	找出N個硬幣、每次同時翻M個硬幣，包含全部狀況的最佳K值與最佳全翻位的翻硬幣模式。
第45屆	高小組	翻出一片天	以嘗試各種情形並分類出可成功的組合；同時在所有可成功例子中尋找規則，看可否用最少次數完成。
第46屆	國中組	再翻出一片天	當有m個開口朝上杯子，若每回合翻n個杯子(m≥n)，且同一個回合內，同一個杯子僅能翻轉一次，最少需多少回合翻轉，才能使所有杯子開口朝下?可否找到迅速達成目標的策略？
第53屆	國中組	翻翻相連—翻杯問題任意狀態到任意狀態的連通與路徑探析	當有n個杯子，其中t_1個杯子朝上，每次翻轉m個杯子，討論m、n、t_1、t_2在何種條件下，可將n個杯子翻成t_2個杯子朝上，n - t_2個杯子朝下，且最少翻轉次數為何？其翻轉的過程又為何？當翻轉次數固定時，探討哪些狀態互不互通及一個狀態翻轉到另一個狀態時，共有幾種不同方法數，把問題變成狀態圖討論。
第57屆	**國中組**	**從翻杯問題探究漢米爾頓路徑解析** **(本作品是我們所研究的)**	**(1)以總杯數及翻杯數的奇偶性將其分成四類，以及初始向上杯數不等於總杯數的情形。** **(2)使用我們所研發的倒金字塔式轉化成漢米爾頓路徑，並觀察其結果，找出規律。** **(3)同時探討這些在符合某些條件的情況下，至少存在一條漢米爾頓路徑，以說明其會有解。** **(4)將至少存在一條的漢米爾頓路徑運用數學邏輯，寫出程式並執行之。** **(5)利用數學歸納法將特殊情況予以驗證其唯一性。** **(6)藉由圖形使用者介面（GUI）來呈現漢米爾頓路徑的走法。**

數學的奧妙之處在尋求其解決問題的過程中，又引發出此新的問題，讓我們發現可再對討論所列出的進行探究。此過程推導磨練我們耐力與毅力，也遇到許多困難與挫折，還要拚命想出解釋的方法與為什麼會這樣，可是，當我們試驗導出時，也就顯得格外愉悅！在我們的努力和老師的協助下，我們成功地完成了這個試驗，清楚的解釋了為什麼，並從這次的試驗，我們不斷地假設、推導、觀察、驗證和統整歸納的過程中，我們獲得了更多的知識，從中發掘到了數學樂趣，也更能體會「團結就是力量」！仔細剖析探究，不難發現在日常生活中的每樣東西都有它的規律，相當有趣而奇妙；另外，我們也發現了漢米爾頓演算法之倒金字塔型式的妙用及其限制，當遇到瓶頸無法突破時，我們試著找尋相關知識並請教老師，使問題的研究得以繼續進行，這些都是我們日後進一步做研究的寶貴經驗。

捌、參考資料及其他

一、參考資料：

(一)、林妍樺、徐詠涵，第五十三屆全國科展國中組數學科佳作「翻翻相連─翻杯問題任意狀態到任意狀態的連通與路徑探析」

(二)、張桓瑞，第四十六屆全國科展國中組數學科佳作「再翻出一片天」

(三)、蘇百毅、楊久霆、林宜靚、葉書豪、洪綉茹，第四十五屆全國科展高小組數學科第三名「翻出一片天」

(四)、林昱誼、黃中道，第四十三屆全國科展高小組數學科第二名「最佳全翻位的探討」

(五)、戴湞琮，第三十六屆全國科展高小組數學科第一名「翻來覆去乾坤轉─翻硬幣遊戲的新發現」

(六)、馬榮喜、陳世易，國中數學第四冊，初版，新北市，康軒文教事業股份有限公司，2015

(七)、葉晉宏，高中數學第二冊，高雄市，晟景文化企業股份有限公司，2013

(八)、李啟龍 著，Visual C# 2015 程式設計 16 堂課，碁峯出版社，2016

(九)、徐力行 著，沒有數字的數學，天下文化，2003

(十)、國中資優數學推理問題，取自 https://tw.answers.yahoo.com/question/index?qid=20090922000015KK09172

(十一)、杯子翻轉的奧秘，取自 http://www.documentsky.com/6683033978/

二、附錄：程式碼【排列組合公式】

```
public int[,] Permutations(double solution, int[] xPath, int[] yPath, int M)
```

```
{
    //在宣告一次所有路
    var path = new int[int.Parse(solution.ToString()), M + 1];
    //我只要判斷遇到 3.5.7...項，就根據規律做排列組合
    for (var j = 2; j < M / 2; j = j + 2)
    {
        //第一次的排列組合的規律
    var countOne = int.Parse((solution / Math.Pow(2, j / 2)).ToString());
        //隨著數列變化需要改變的範圍值
        var countTwo = countOne;
        for (var i = 0; i < solution; i++)
        {
            var countX = Math.Truncate((float)i / countOne);
            //CountX 是取 i 除以間距，就可以知道它在第幾組
            //countOne 就是找每個數列有幾組變化
            //8→4→2→1
            //依此類推上面數列各有
            //1→2→4→8 組
            //所以當 i 在變化的時候我就可以找到它在第幾組
            //1.2 項永不變
            path[i, 0] = yPath[0];
            path[i, 1] = xPath[1];
            //數列來做排列組合
            if (countX % 2 == 0)
            {
         //第 0.2.4....開始依照組距變更範圍
          if ((countTwo * countX) <= i && i < countTwo * (countX + 1))
                {
                    path[i, j] = xPath[j];
                    path[i, j + 1] = xPath[j + 1];
                }
            }
            else
            {
         //第 1.3.5....開始依照組距變更範圍
        if (countTwo * (countX) <= i && i < (countTwo) * (countX + 1))
                {
                    path[i, j] = yPath[j];
                    path[i, j + 1] = yPath[j + 1];
                }
            }
        }
    }
    //就是把後面的值帶來
    for (var j = (M / 2); j < M; j++)
    {
        for (var i = 0; i < solution; i++)
        {
            if (j == (M / 2))
            {
                path[i, j] = M / 2;
            }
            else
            {
                path[i, j] = M - path[i, M - j];
            }
        }
    }
    return path;
}
```

【評語】030420

考慮給定 n 個杯口向上的杯子，每次翻轉其中 m 個，使得最終每個杯子的杯口都向下，而且在過程中，杯口向上的杯子的個數恰好為 n、n-1、…、2、1、0 這些數字（每個數字恰出現一次）的操作方式。對此給出了一些分析。這個問題在歷屆科展出現了許多次。本作品的創意在於，討論的不是完成全數翻轉的最少次數，而是要問如果要求在過程中，杯口向上的杯子的個數必須恰好為 n、n-1、…、2、1、0 這些數字，符合此限制條件的翻轉是否可行的問題。這個創意值得嘉許，但與傳統意義上的 Hamiltonian 一詞的意義不甚相同，反而容易造成混淆。作者們針對各種情形給出了翻轉的步驟。書面報告中有不少筆誤，不少情形說明不夠清晰而只有例子，雖有電腦輔助，但具體可行仍須有數學證明。如果能在這方面多下功夫會更好。

作品海報

摘　　要

此作品研究「若有M個杯子且全部朝上，每次翻轉N個杯子，討論M、N在何種條件下，可將M個杯子翻成全部朝下，讓每個0到M之間的朝上杯數，都翻過一次且不得重複出現(即為漢米爾頓路徑Hamiltonian path)？同時探討在符合某些條件的情況下，必會有Hamiltonian path並證明之。」我們以總杯數及翻杯數的奇偶性將其分成四類，以及初始向上杯數不等於總杯數，使用我們所研發的倒金字塔式轉化成Hamiltonian path，並找出其中一組共同的規律，以這樣的方式說明這些Hamiltonian path必有解。而當Hamiltonian path共有2的次方組解(包含唯一)時，其所有Hamiltonian path都會符合首尾相加現象。我們找出其中的規律並證明其唯一性，再將這些規律運用數學邏輯並加入排列組合因素，使用Visual C#寫出程式並執行，以圖形使用者介面呈現。

壹、研究動機

1. 暑期數理進階營隊所閱讀的課外書籍『沒有數字的數學』一書中提及漢米爾頓路徑(Hamiltonian path)，以及相關涉略到的漢米爾頓迴路(Hamiltonian Cycle)，此兩大重要性質引發我們高度的興趣。
2. 查閱瀏覽相關國中資優數學推理問題的網頁時，看到的翻杯問題：「編號1至100的杯子依序排成一列，今先將所有杯子開口朝上站立著，再將編號為2的倍數的杯子翻轉倒立開口朝下，再將編號為3的倍數的杯子翻轉，依此方式類推按4的倍數，5的倍數…進行到最後，則最後杯子朝上站立的杯子數目為何？」
3. 又再瀏覽查閱到杯子翻轉的奧秘，有著這麼一道題目：「若有7個杯口全部朝上的杯子，一次翻4個，則是否有辦法將杯子全部由上而下全部翻轉？」
4. 便開始從全國中小學科展網站查詢到相關一系列 （ 第 36 & 43 & 45 & 46 屆 ） 翻轉杯子議題的資料做探討。
5. 搜尋發現第53屆全國科展國中組數學科「翻翻相連-翻杯問題任意狀態到任意狀態的連通與路徑探析」此作品有初步對漢米爾頓路徑做研究，但絕大部分在探討呈現狀態圖的連通與否，卻尚未對漢米爾頓路徑做深入的探析，對此評審評語也建議仍有其重要研究性價值，因此我們將其漢米爾頓路徑問題，做更為完整、深入且一般性的探究。

貳、研究目的

一、定義總杯數為M(>N)，翻杯數為N(>3)，初始向上杯數為R(>0)，探討以下情況是否有至少一條漢米爾頓路徑：

(一) M為偶數(=R)，N為奇數，M與N的關係再細分兩種情形討論：1. M>2N　2. M<2N

(二) M為奇數(=R)，N為奇數，M與N的關係再細分四種情形討論：1. M>2N　2. M<2N　3. M=2N-1　4. M=2N+1

(三) M為偶數(=R)，N為偶數，M與N的關係再細分兩種情形討論：1. M>2N　2. M<2N

(四) M為奇數(=R)，N為偶數，M與N的關係再細分兩種情形討論：1. M>2N　2. M<2N

(五) 為M個杯子(奇數個或偶數個)且有P個杯子(奇數個或偶數個)朝上，每次翻轉N個杯子(N為大於2的偶數)時：

二、找到一個方法(倒金字塔式)，能快速且無遺漏的列出漢米爾頓路徑。

三、當漢米爾頓路徑是2的次方組解(包含唯一)時，其所有漢米爾頓路徑都會有翻杯漢米爾頓路徑首尾相加現象的存在。我們嘗試找出其中的規律並證明其唯一性。

四、將以上所找出的規律，運用數學邏輯並加入排列組合因素，利用程式設計語言Visual C# 寫出程式執行，並以圖形使用者介面（Graphical User Interface，簡稱 GUI）予以呈現。

參、研究設備及器材

免洗紙杯、筆、筆記本、自備隨身碟、電腦、Microsoft Visual Studio Community 2017合法免費軟體。

肆、研究過程與方法

一、名詞定義：

(一)翻杯漢米爾頓路徑：給定任意兩正整數M、N(M>N)，可將M個杯子翻成全部朝下，讓每個不大於M且不小於0的朝上杯數，都翻過一次且不得重複出現，即為漢米爾頓路徑。

(二)總杯數：總共的杯數，以M表示。

(三)翻杯數：一次要翻的杯數，以N表示。

(四)X_i：將一條漢米爾頓路徑看為一個數列，首項為X_0，末項為X_M　。

(五)X_j：為符合該條件中的第一項，但在與下一個符合該規律的X_i比較時，仍以X_i看待。

(六)首尾相加現象：從唯一解的漢米爾頓路徑發現，將其前後相對應的項相加都等於總杯數，亦發現在M、N任意情況下，皆至少有一組漢米爾頓路徑首尾相加等於總杯數。　* 註: 在翻杯數為偶數且總杯數為奇數時為M+1

(七)初始向上杯數：剛開始的朝上杯數，以R表示。

(八)向上狀態 P ：則是指初始向上杯數是奇數或偶數。

(九)數對：表示為(向上杯數,向下杯數)，連接代表兩數對可連通(雙向)。

(十)單一點：只有一條路徑可以連接的數對，而其在初始向上杯數為0或M時存在。如果一條漢米爾頓路徑的單一點大於兩個，則沒有漢米爾頓路徑。而如果兩個單一點(翻杯數為奇數就是兩個單一點)，則(M,0)、(0,M)兩數對做為起點與終點時，會有漢米爾頓路徑。

對於探討漢米爾頓路徑中有出現首尾相加等於總杯數時的情形，故以下為總路徑長的前一半之規律，後一半則為總杯數減掉對應位置的朝上杯數(對應的數=總杯數-所需的數)，探討其是否有漢米爾頓路徑：

首先我們發現X_i和X_{i+1}的關係：1. X_i、X_{i+1}的和不能比N小， 2. 也不能比2M-N大，並且 3. 兩者之差的絕對值不能大於N。

(1)因為如果小於N的話，則能翻的杯子將小於翻杯數。例如:N=7，X_i=3，要使X_{i+1}=4，便要將3個杯子往下翻、4個往上翻；然而要使X_{i+1}=2，便還要再翻2個，就會有重複翻的現象。(2)同理。(3)沿用剛剛的例子，X_{i+1}最大值是10，超過10就會有翻杯子不足的情形。我們藉由這樣的條件推演出倒金字塔式。

二、將M與N的關係再細分以下四大類型討論：

(一)M為偶數(=R)，N為奇數；(二)M為奇數(=R)，N為奇數；(三)M為偶數(=R)，N為偶數；(四)M為奇數(=R)，N為偶數。

三、M個杯子(奇數個或偶數個)且有P(<M)個杯子(奇數個或偶數個)朝上，每次翻轉N個杯子(N為大於2的偶數)時：

1.我們探究的是翻杯數N為偶數且與向上狀態P相同之奇數或偶數的漢米爾頓路徑。有以下五種情況：

(1) N=2，其路徑唯一。

(2) N>2， M為奇數，向上狀態P為奇數，只有一個單一點(M,0)。

(3) N>2， M為奇數，向上狀態P為偶數，只有一個單一點(0,M)。

(4) N>2， M為偶數，向上狀態P為奇數，沒有單一點。

(5) N>2， M為偶數，向上狀態P為偶數，有兩個單一點(M,0)、(0,M)。

2.向上狀態P為偶數，只討論偶數，只要經過所有的偶數即為偶數漢米爾頓路徑。

3.向上狀態P為奇數，只討論奇數，只要經過所有的奇數即為奇數漢米爾頓路徑。

偶數漢米爾頓路徑和奇數漢米爾頓路徑，合稱單一數漢米爾頓路徑。

4.作法: (1)先把與向上狀態P相同且≤M的數對，以圓環狀表示。　(2)連接所有可連接的數對。

(3)以向上杯數為起點，若可將所有數對恰走過一次，即為單一數漢米爾頓路徑。

四、關於【翻轉杯子的漢米爾頓路徑演算法，其倒金字塔型式之推演說明】：

倒金字塔式便是把某數可翻到的向上杯數一一列出，為方便在當走到某數而不知道有哪幾種可能的路徑時：

(一)當M與N不論為何，某數可走的最多組為 $\frac{M-|(M-N)-N|}{2}+1$

(二)M與N不論差幾，我們皆可從M-N可走至的最小值再加上1，便為最多組個數。

(三)最多組個數的式子，可用: $|N-(M-N)|+1$，而這個式子不論M與N為何，皆可適用，並可解釋在前述的數據。

(四)當M與N差7以上(含7)，M-N為可走到最多組裡面的最大數字；相反的，M與N差6以下(含6)，則M-N變為可走到最多組裡面的最小數字。

(五)可不必擔心會不會到了某點又得做遞增(遞增→遞減→遞增)，而這是不會發生的。

綜合以上(二)&(三)兩結論，又得到M-N可走至的最小值(最後一格)即為 $|N-(M-N)|$ 。

【關於翻轉杯子的漢米爾頓路徑演算法，其倒金字塔型式】：

1→ N+1 \ N-1

2→ N+2 \ N \ N-2

:

M-N→M\M-2\M-4……(視最多組之值為何，4 則到 M-6，5 則到 M-8…等等)

M-N+1 → M-1 \ M-3 \ M-5 ……

:

M-N+k → M-k \ M-k-2……

:

M→N

以上之式子為方便尋解用。

例子二： M=15，N=9 ；15→6→3\5\7\11\13→ ……. →2\4\6\8\10\12→9→0

1→10\8
2→11\9\7
3→12\10\8\6
4→13\11\9\7\5
5→14\12\10\8\6\4
6→15\13\11\9\7\5\3
7→14\12\10\8\6\4\2
8→13\11\9\7\5\3\1
9→12\10\8\6\4\2\0
10→11\9\7\5\3\1
11→10\8\6\4\2
12→9\7\5\3
13→8\6\4
14→7\5
15→6

例子一： M=12，N=5 ；12→7→2\4\6\8\10→ ……… →2\4\6\8\10→5→0

1→6\4
2→7\5\3
3→8\6\4\2
4→9\7\5\3\1
5→10\8\6\4\2\0
6→11\9\7\5\3\1
7→12\10\8\6\4\2
8→11\9\7\5\3
9→10\8\6\4
10→9\7\5
11→8\6
12→7

伍、研究結果

一、將M與N的關係再細分以下四大類型討論：

翻杯數 N ＼ 總杯數 M	奇數	偶數
偶數	(一) 1. M>2N 2. M<2N	(三) 1. M>2N 2. M<2N
奇數	(二) 1. M>2N ($M \neq 2N+1$) 2. M<2N ($M \neq 2N-1$) 3. M=2N-1 4. M=2N+1	(四) 1. M>2N 2. M<2N

當每次翻轉N個奇數杯子時，關係式為：

$$
N=2k+1\begin{cases}
M=2k\begin{cases}
M>2N\begin{cases} i=2k, & X_j=M,\ X_{i+2}=X_i-2 \\ i=2k+1\begin{cases} i\le N, & X_j=M-N,\ X_{i+2}=X_i+2 \\ i>N, & X_j=M-N-2,\ X_{i+2}=X_i-2\end{cases}\end{cases}\\
M<2N\begin{cases} i=2k, & X_j=M,\ X_{i+2}=X_i-2 \\ i=2k+1\begin{cases} i\le M-N, & X_j=M-N,\ X_{i+2}=X_i+2 \\ i>M\text{-}N, & X_j=M-N+2,\ X_{i+2}=X_i+2\end{cases}\end{cases}
\end{cases}\\
M=2k+1\begin{cases}
M>2N(M\neq 2N+1)\begin{cases} i=2k, & X_j=M,\ X_{i+2}=X_i-2 \\ i=2k+1\begin{cases} i\le N, & X_j=M-N,\ X_{i+2}=X_i+2 \\ i>N, & X_j=M-N-2,\ X_{i+2}=X_i-2\end{cases}\end{cases}\\
M<2N(M\neq 2N-1)\begin{cases}
i\le\frac{N-3}{2}\begin{cases} i\le\frac{M-N}{2}\begin{cases} i=2k, X_j=M, X_{i+2}=X_i-2 \\ i=2k+1, X_j=M-N, X_{i+2}=X_i-2\end{cases}\\ i>\frac{M-N}{2}\begin{cases} i=2k, X_j=M-2j, X_{i+2}=X_i-4 \\ i=2k+1, X_j=2j, X_{i+2}=X_i+4\end{cases}\end{cases}\\
\frac{N-3}{2}<i\le\frac{N+3}{2}\begin{cases} N=4s+1\begin{cases} i=\frac{N-1}{2}, X_i=M-N+1 \\ i=\frac{N+1}{2}, X_i=M-1 \\ i=\frac{N+3}{2}, X_i=M-N-1\end{cases}\\ N=4s+3\begin{cases} i=\frac{N-1}{2}, X_i=N-1 \\ i=\frac{N+1}{2}, X_i=1 \\ i=\frac{N+3}{2}, X_i=N+1\end{cases}\end{cases}\\
i>\frac{N+3}{2}\begin{cases} N=4s+1\begin{cases} i=2k, X_j=M-N-3, X_{i+2}=X_i-2 \\ i=2k+1, X_j=M-2, X_{i+2}=X_i-2\end{cases}\\ N=4s+3\begin{cases} i=2k, X_j=3, X_{i+2}=X_i+2 \\ i=2k+1, X_j=N+3, X_{i+2}=X_i+2\end{cases}\end{cases}
\end{cases}\\
M=2N-1\begin{cases} i=4k, X_j=M, X_{i+4}=X_i-2 \\ i=4k+1, X_j=N-1, X_{i+4}=X_i-2 \\ i=4k+2, X_j=1, X_{i+4}=X_i+2 \\ i=4k+3, X_j=N+1, X_{i+4}=X_i+2\end{cases}\\
M=2N+1\begin{cases} i=4k, X_j=M, X_{i+4}=X_i-2 \\ i=4k+1, X_j=N+1, X_{i+4}=X_i+2 \\ i=4k+2, X_j=1, X_{i+4}=X_i+2 \\ i=4k+3, X_j=N-1, X_{i+4}=X_i-2\end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
$$

當每次翻轉N個偶數杯子時，關係式為：

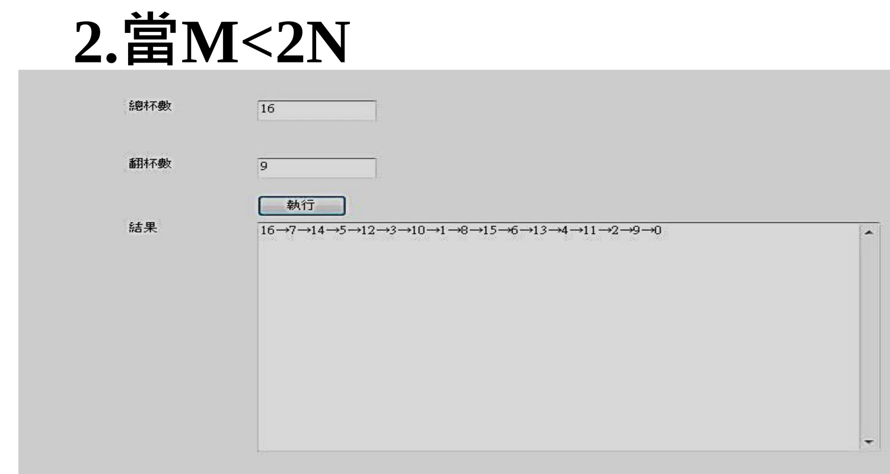
$$
N=2k\begin{cases}
M=2k\begin{cases}
M>2N\begin{cases} i\le\frac{N}{2}\begin{cases} i=2k, X_j=M, X_{i+2}=X_i-2 \\ i=2k+1, X_j=M-N, X_{i+2}=X_i+2\end{cases}\\ i>\frac{N}{2} \quad X_j=M-N-1, X_{i+2}=X_i-2\end{cases}\\
M<2N\begin{cases} i\le\frac{M-N}{2}\begin{cases} i=2k, X_j=M, X_{i+2}=X_i-2 \\ i=2k+1, X_j=M-N, X_{i+2}=X_i-2\end{cases}\\ i>\frac{M-N}{2}\begin{cases} i=2k, X_j=M-N, X_{i+2}=X_i+2 \\ i=2k+1, X_j=M-N+2, X_{i+2}=X_i+2\end{cases}\end{cases}
\end{cases}\\
M=2k+1\begin{cases}
M>2N\begin{cases} i\le\frac{N}{2}\begin{cases} i=2k, X_j=M, X_{i+2}=X_i-2 \\ i=2k+1, X_j=M-N, X_{i+2}=X_i+2\end{cases}\\ i>\frac{N}{2} \quad X_j=M-N-2, X_{i+2}=X_i-2\end{cases}\\
M<2N\begin{cases} i\le\frac{M-N-1}{2}\begin{cases} i=2k, X_j=M, X_{i+2}=X_i-2 \\ i=2k+1, X_j=M-N, X_{i+2}=X_i-2\end{cases}\\ i>\frac{M-N-1}{2}\begin{cases} i=2k, X_j=N-1, X_{i+2}=X_i-4 \\ i=2k+1, X_j=M-N+2, X_{i+2}=X_i+4\end{cases}\end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
$$

探討其是否至少存在一條漢米爾頓路徑，並以GUI來呈現：

(一)M為偶數(=R)，N為奇數，M、N關係有兩種情形：

1.當M>2N

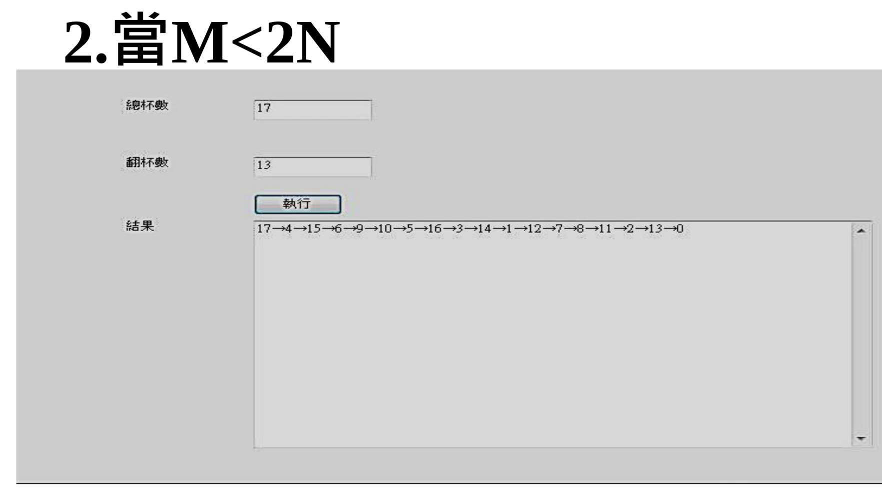
2.當M<2N



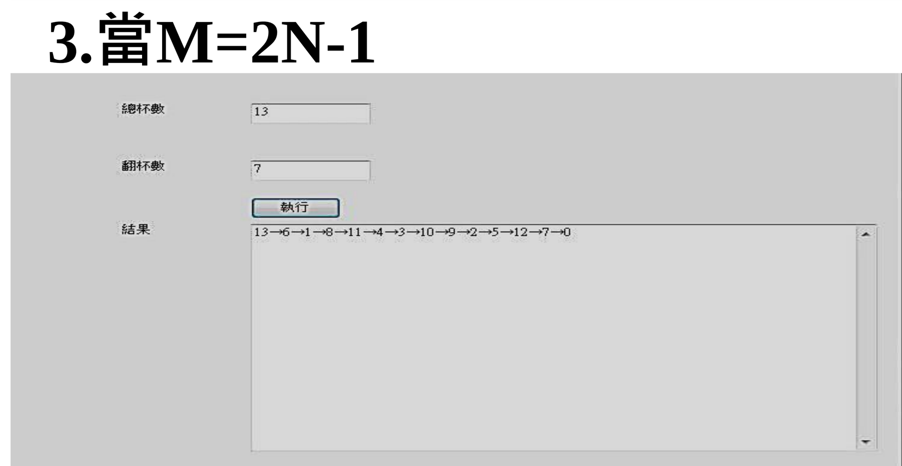
(二)M為奇數(=R)，N為奇數，M、N關係有四種情形：

1.當M>2N

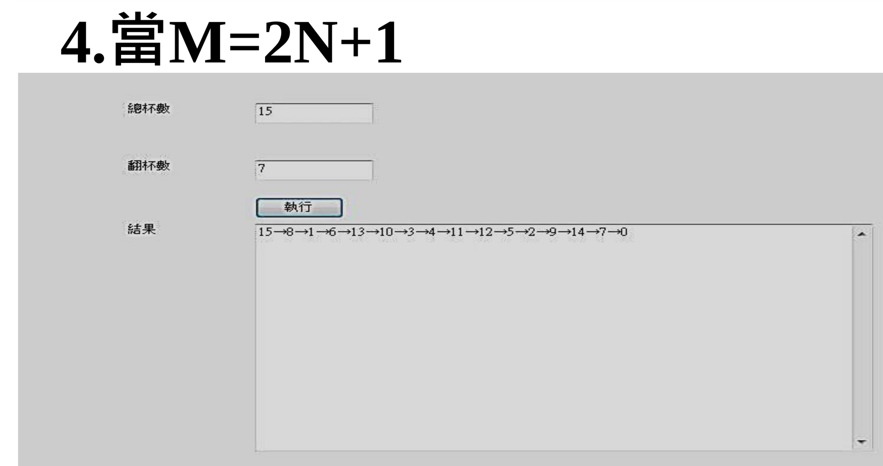
2.當M<2N



3.當M=2N-1



4.當M=2N+1



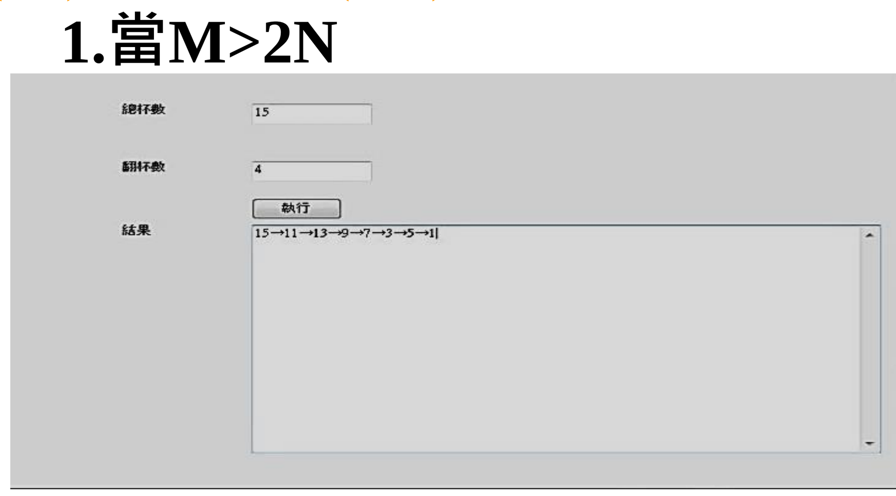
(三)M為偶數(=R)，N為偶數，M、N關係有兩種情形：

1.當M>2N

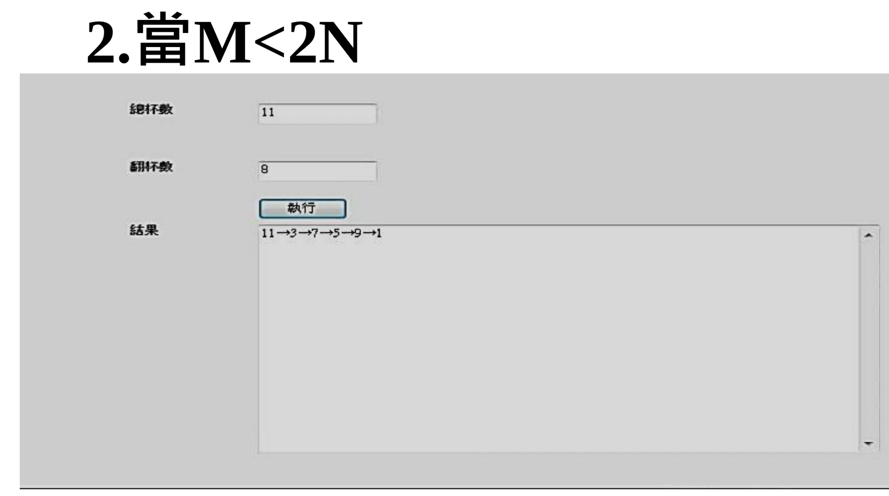
2.當M<2N

(四)M為奇數(=R)，N為偶數，M、N關係有兩種情形：

1.當M>2N

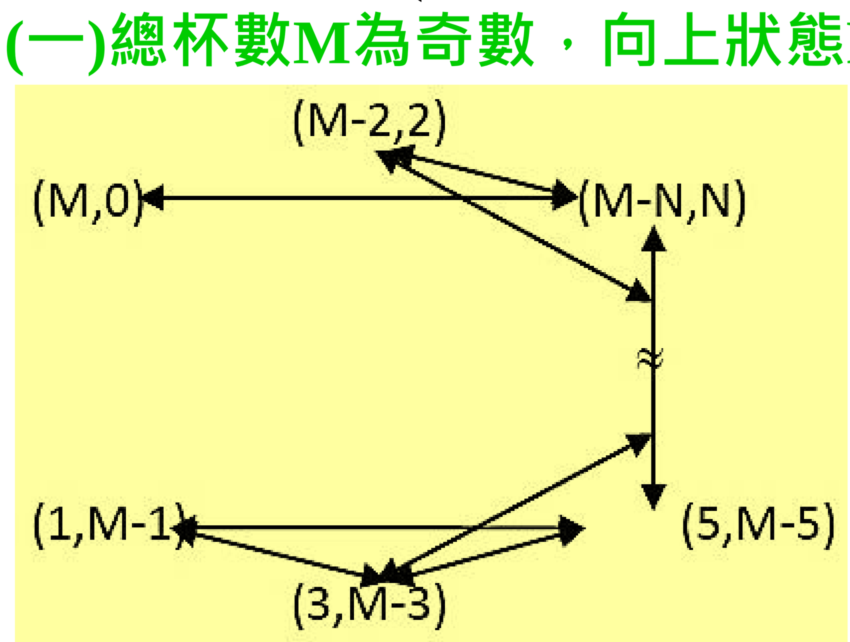


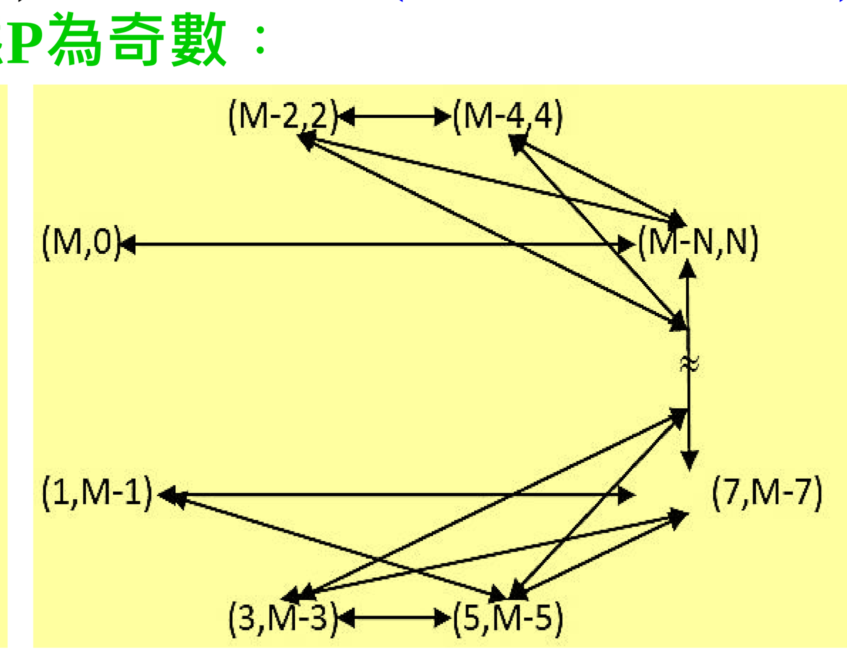
2.當M<2N



二、為M個杯子(奇數個或偶數個)且有P個杯子(奇數個或偶數個)朝上，每次翻轉N個杯子(N為大於2的偶數)時：

(一)總杯數M為奇數，向上狀態P為奇數：





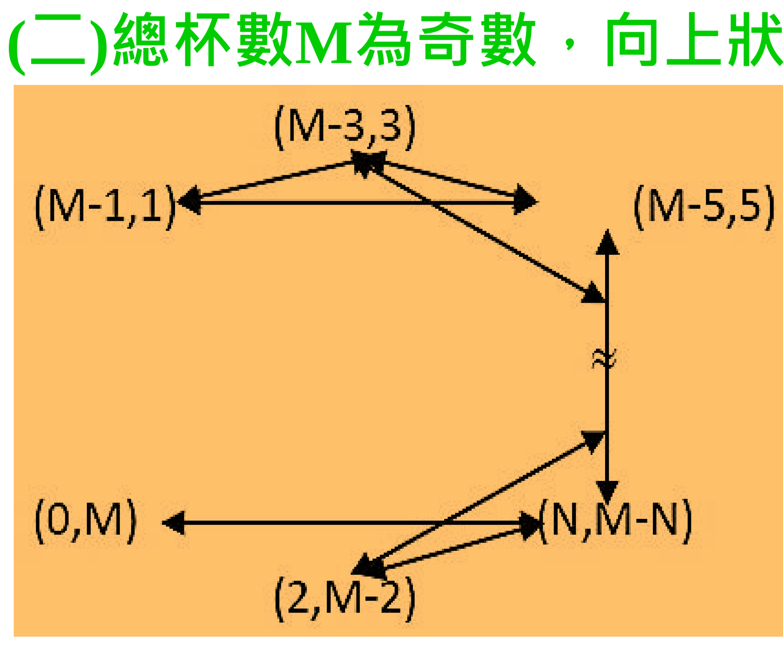
然而，當總杯數M為偶數時，會遇到M=2N的問題：

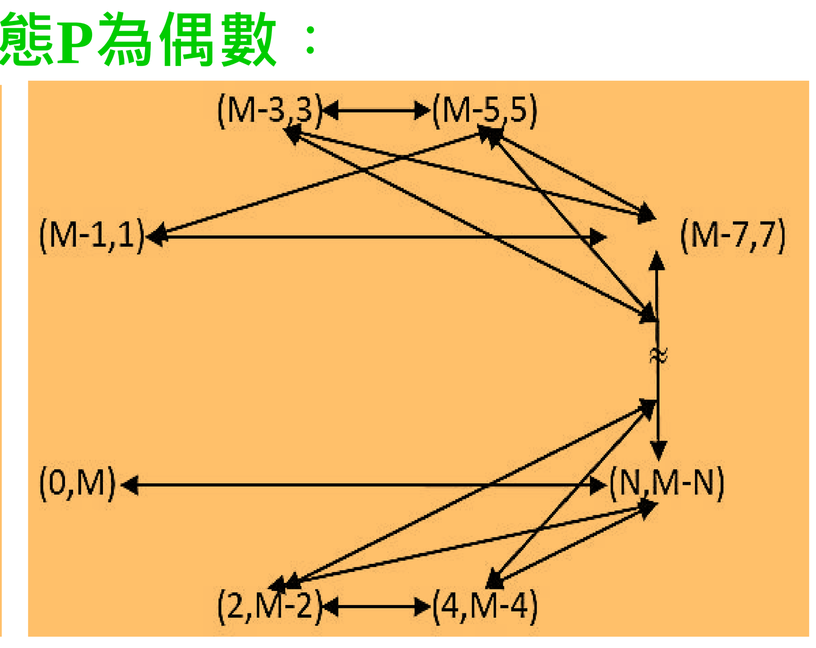
1.M=2N，N=2有單一數漢米爾頓路徑，所以只討論N>2的偶數。

2.M=2N，向上狀態P為偶數時，無單一數漢米爾頓路徑，因為(M,0)、(0,M) 為單一點，(M-N,N)、(N,M-N)為同一點，因此無單一數漢米爾頓路徑。

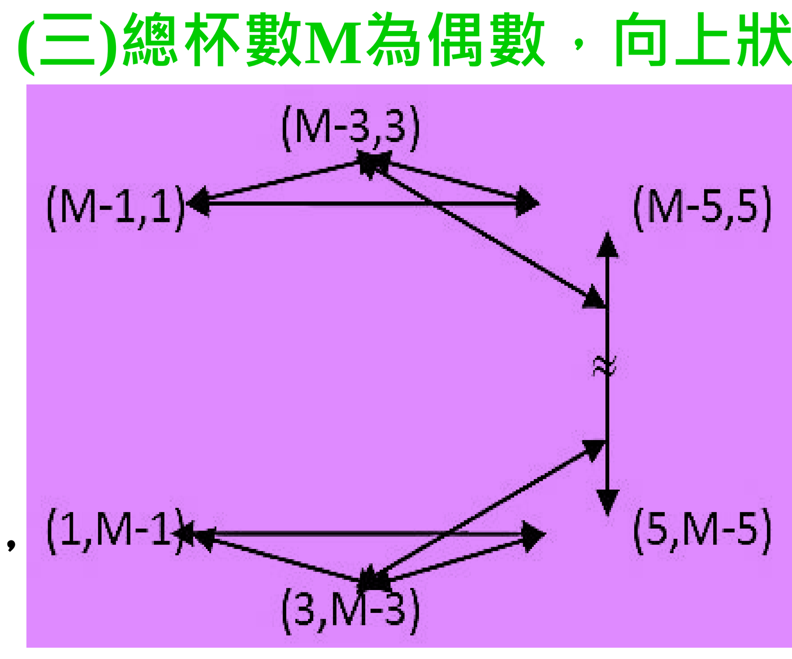
3.M=2N，向上狀態P為奇數時，有單一數漢米爾頓路徑，因為(M-1,1)、(1,M-1)不是單一點，(M-1,1)可以連接(M-(N+1),N+1)、(M-(N-1),N-1)、(1,M-1)可以連接(N+1,M-(N+1))、(N-1,M-(N-1))，因此有單一數漢米爾頓路徑。

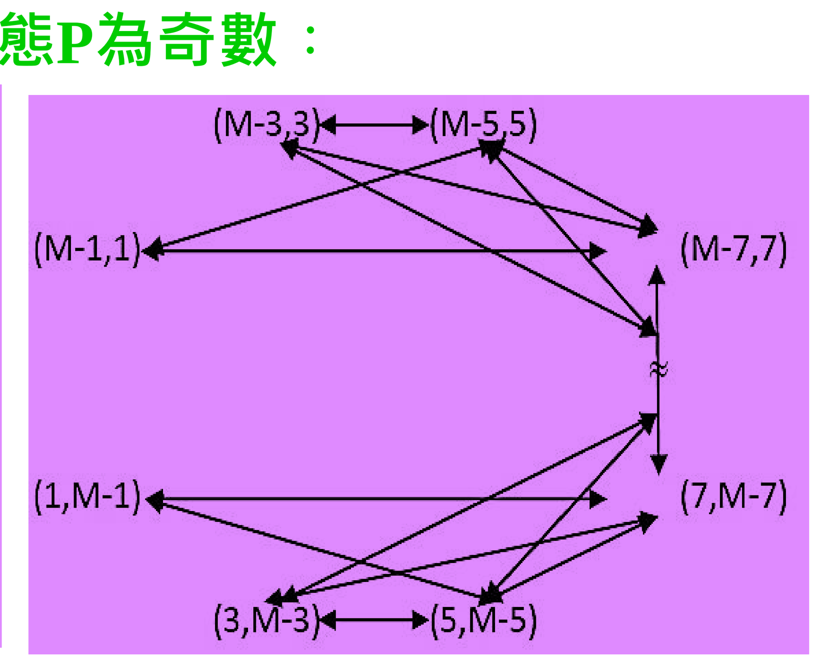
(二)總杯數M為奇數，向上狀態P為偶數：





(三)總杯數M為偶數，向上狀態P為奇數：





(上述六圖都可無限延伸，連接到縱線代表還有其他的數對可連接)

(四)總杯數M為偶數，向上狀態P為偶數：

有兩個單一點(M,0)、(0,M)並且有M=2N的問題，因此只有在M≠2N且向上杯數為(M,0)、(0,M)時，才有單一數漢米爾頓路徑。

總杯數M (M>N)	向上狀態P ($P \le M$)	翻杯數N	單一數漢米爾頓路徑向上的杯數 最大值	最小值	可否走出與向上狀態P相同的所有杯數
奇數	奇數	N為大於2的偶數	M	1	P=M-N 不可 其餘皆可
	偶數		M-1	0	P=N 不可 其餘皆可
偶數	奇數		M-1	1	皆可
	偶數		M	0	M≠2N 且 P=M 可 M≠2N 且 P=0 可 其餘皆不可

三、當漢米爾頓路徑是2的次方組解時(包含唯一)，其所有漢米爾頓路徑都會有翻杯漢米爾頓路徑首尾相加現象的存在，再進一步找出其規律並以GUI呈現，其中兩種情形如下：

(一)當M=N+1時，此漢米爾頓路徑只有一種解

一般式規律: M→M-N→M-2→M-N+2→M-4→M-N+4→ … →M-s→M-N+s→0

其中s=N-1

(二)當M=N+2時，此漢米爾頓路徑只有一種解

一般式規律: M→2→M-4→6→M-8→10→ …

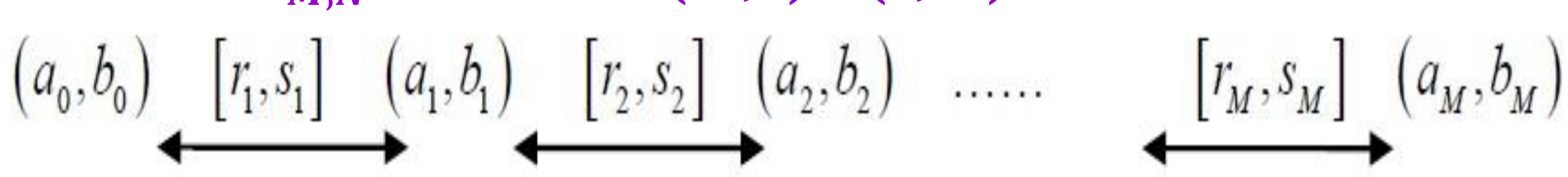
… →M-10→8→M-6→4→M-2→0

由上式取(M+1)/2項，剩餘由下式取

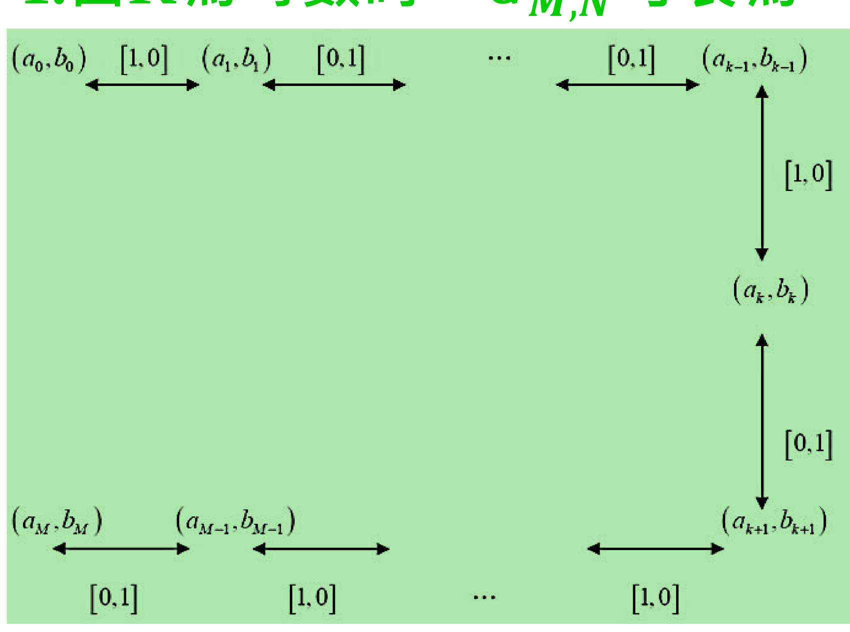
四、對於漢米爾頓路徑M=N+1及M=N+2的唯一性，其定理如下:

定理一：當$M = 2k(k \ge 1)$，N=M-1時，

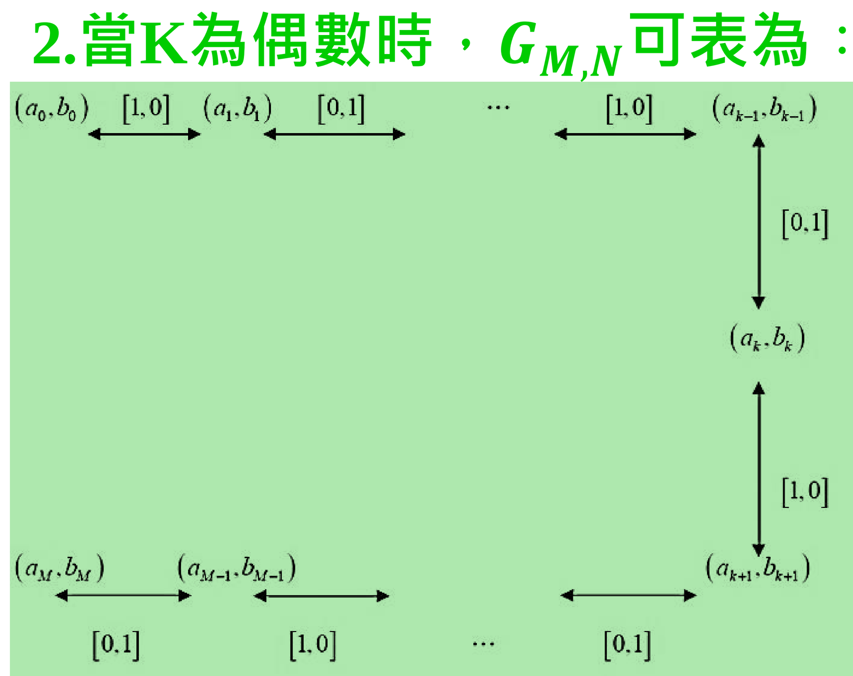
$G_{M,N}$是一條連接(M,0)與(0,M)的漢米爾頓路徑：



1.當K為奇數時，$G_{M,N}$可表為：



2.當K為偶數時，$G_{M,N}$可表為：



其中(1) $b_0,a_1,b_2,a_3,\dots,a_{M-1},b_M$分別為0,1,2,3,…,M-1,M

且(2) $a_0,b_1,a_2,b_3,\dots,b_{M-1},a_M$分別為M,M-1,M-2,M-3,…,1,0

定理二：設$M = 2k + 1(k \ge 1)$，N=M-2時，

令$v_i = (a_i, b_i)$，i=0,1, …,M，則：

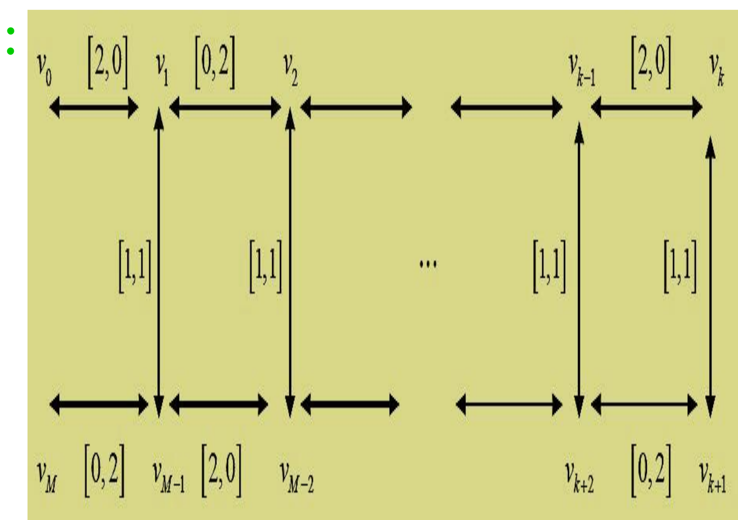
1.當K為奇數時，$G_{M,N}$可表為：

且(1) $b_0,a_1,b_2,\dots,b_{k-1},a_k$ 分別為0,2,4,…,2k-2,2k

(2) $a_0,b_1,a_2,\dots,a_{k-1},b_k$ 分別為M,M-2,M-4,…,3,1

(3) $a_{k+1},b_{k+2},a_{k+3},\dots,a_{M-1},b_M$ 分別為1,3,5,…,M-2,M

(4) $b_{k+1},a_{k+2},b_{k+3},\dots,b_{M-1},a_M$ 分別為2k,2k-2,2k-4,…,2,0



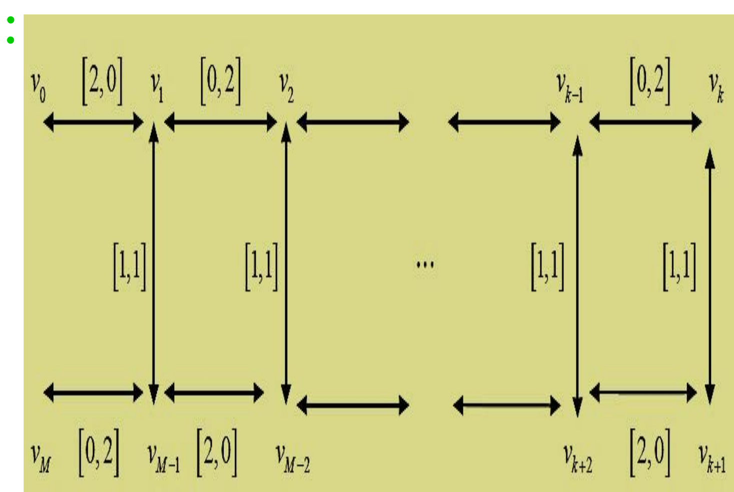
2.當K為偶數時，$G_{M,N}$可表為：

且(1) $b_0,a_1,b_2,\dots,a_{k-1},b_k$ 分別為0,2,4,…,2k-2,2k

(2) $a_0,b_1,a_2,\dots,b_{k-1},a_k$ 分別為M,M-2,M-4,…,3,1

(3) $b_{k+1},a_{k+2},b_{k+3},\dots,a_{M-1},b_M$ 分別為1,3,5,…,M-2,M

(4) $a_{k+1},b_{k+2},a_{k+3},\dots,b_{M-1},a_M$ 分別為2k,2k-2,2k-4,…,2,0



$G_{M,N}$有唯一的漢米爾頓路徑連接$v_0 = (M,0)$與$v_M = (0,M)$。

陸、討論

雖我們已更深入探究、發掘並解決相當部分問題，而還未解決或未來可繼續研究的問題，歸納如下：

一、若M=N+1,M=N+2,$M = 2N \pm 1$,$M = 2N \pm 2$時，會有2的次方組(包含唯一)解，且其數列首尾相加(第1個數加倒數第1個數，第2個數加倒數第2個數，……)之和會等於總杯數。還有，在其餘的式子中，也至少會有一條漢米爾頓路徑，出現這樣的情形。然而，其餘未符合翻杯漢米爾頓路徑首尾相加現象的漢米爾頓路徑，又會有呈現什麼規律呢？值得我們進一步探究。

二、在一般漢米爾頓路徑中，所有不大於M、不小於0正整數都恰翻過一次，並且起始狀態為M，最後要翻到為0。然而，其最短路徑則是從任意正整數，翻到任意正整數且不須要翻過所有不大於M、不小於0的正整數，則翻轉的過程又為何？可再進一步剖析驗證。

三、對於歷屆文獻研究翻轉杯數為連續翻、因數翻、倍數翻時，且同時需滿足質數翻的條件下，是否存在著任意狀態到任意狀態？而此漢米爾頓路徑的問題，又將呈現何種的結果？對此將是我們日後繼續研究精進其完備的方向之一。

柒、結論

中小學科展	組 別	作 品 名 稱	研 究 範 疇 與 貢 獻
第36屆	高小組	翻來覆去乾坤轉—翻硬幣遊戲的新發現	探討硬幣遊戲的規律性：(1)固定數翻；(2)連續數翻；(3)倍數翻；(4)因數翻。
第43屆	高小組	最佳全翻位的探討	找出N個硬幣、每次同時翻M個硬幣，包含全部狀況的最佳K值與最佳全翻位的翻硬幣模式。
第45屆	高小組	翻出一片天	以嘗試各種情形並分類出可成功的組合；同時在所有可成功例子中尋找規則，看可否用最少次數完成。
第46屆	國中組	再翻出一片天	當有m個開口朝上杯子，若每回合翻 n個杯子(m > n)，且同一個回合內，同一個杯子僅能翻轉一次，最少需多少回合翻轉，才能使所有杯子開口朝下?可否找到迅速達成目標的策略？
第53屆	國中組	翻翻相連—翻杯問題任意狀態到任意狀態的連通與路徑探析	當有n個杯子，其中t_1個杯子朝上，每次翻轉m個杯子，討論m、n、t_1、t_2在何種條件下，可將n個杯子翻成t_2個杯子朝上，n - t_2個杯子朝下，且最少翻轉次數為何？其翻轉的過程又為何？當翻轉次數固定時，探討哪些狀態互不互通及一個狀態翻轉到另一個狀態時，共有幾種不同方法數，把問題變成狀態圖討論。
第57屆	國中組	從翻杯問題探究漢米爾頓路徑解析 (本作品是我們所研究的)	(1)以總杯數及翻杯數的奇偶性將其分成四類，以及初始向上杯數不等於總杯數的情形。 (2)使用我們所研發的倒金字塔式轉化成漢米爾頓路徑，並觀察其結果，找出規律。 (3)同時探討這些在符合某些條件的情況下，至少存在一條漢米爾頓路徑，以說明其會有解 (4)將至少存在一條的漢米爾頓路徑運用數學邏輯，寫出程式並執行之。 (5)利用數學歸納法將特殊情況予以驗證其唯一性。 (6)藉由圖形使用者介面（GUI）來呈現漢米爾頓路徑的走法。

捌、參考資料

(一)林妍樺、徐詠涵，第53屆全國科展國中組數學科佳作「翻翻相連—翻杯問題任意狀態到任意狀態的連通與路徑探析」

(二)張桓瑞，第46屆全國科展國中組數學科佳作「再翻出一片天」

(三)蘇百毅、楊久霆、林宜靚、葉書豪、洪綉茹，第45屆全國科展高小組數學科第三名「翻出一片天」

(四)林昱諠、黃中道，第43屆全國科展高小組數學科第二名「最佳全翻位的探討」

(五)戴湞琮，第36屆全國科展高小組數學科第一名「翻來覆去乾坤轉—翻硬幣遊戲的新發現」

(六)馬榮喜、陳世易，國中數學第四冊，初版，新北市，康軒文教事業股份有限公司，2015

(七)葉晉宏，高中數學第二冊，高雄市，晟景文化企業股份有限公司，2013

(八)李啟龍 著，Visual C# 2015程式設計16堂課，碁峯出版社，2016

(九)徐力行 著，沒有數字的數學，天下文化，2003

(十)國中資優數學推理問題，取自 https://tw.answers.yahoo.com/question/index?qid=20090922000015KK09172

(十一)杯子翻轉的奧秘，取自 http://www.documentsky.com/6683033978/