中華民國第57屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030419

Chomp！鹿死誰手？

學校名稱：苗栗縣立頭份國民中學

作者：	指導老師：
國二 劉祐瑋	王素卿
國二 潘柏宏	張漢權
國二 陳禹蓁	

關鍵詞：Chomp、必勝策略

摘要

本研究探討 Chomp 遊戲中，先手與後手是否存在必勝策略和先手是否能必勝，並探索 n×n 與 n×m 矩形中，先手必勝策略局面的種類，推論該局是否為必勝局面。研究結果顯示此遊戲存在必勝策略，若先手知道必勝策略，那麼先手最終必然獲勝。在 n×n 矩形中，先手的必勝策略是第一步要放最接近左上角方格的對角線位置上，接著使用對稱的策略放置，持續到最後亦能夠獲得勝利。再者探究 n×m 矩形的必勝策略，得到一般化公式的結果。最後，利用 Grundy 數來推論每個局面是否為必勝局面，結果顯示 Grundy 數為零，則為必勝局面。若 Grundy 數為其他數值，並且對手知道每一步的必勝策略，則為必敗局面；反之則需搶先一步拿到 Grundy 數為零的局面，接著每一步都使用必勝策略，最後才能獲勝。

壹、研究動機

我們在一年級學習到直角平面座標單元時，老師為了讓我們紓解每日上課的疲勞與考試的壓力，因此讓我們全班進行了一個簡單的小遊戲。它的名字叫 Chomp，我們大家互相競爭，拼得你死我活，但卻怎麼玩怎麼輸，每況愈下，讓我們想要找出必勝的訣竅。由於好勝心強烈的我們，秉持著 NBA 球星林書豪永不放棄的精神與做好任何事情的執著，希望能找出必勝策略，也希望從這簡單的小遊戲中，找尋數學的奧妙之處。我們去尋求老師的幫忙與協助，並無數次的從遊戲中尋找是否有規律，而進行更進一步的研究與推理，我們發現這個小遊戲與我們所學的直角坐標平面及線對稱圖形觀念有相關，因此經過這個研究後，能讓我們從中獲得解決數學難題的成就感。

貳、研究目的

一、是否存在必勝策略的研究

二、n×n 矩形必勝策略的研究

三、n×m 矩形必勝策略的研究

四、推論每個局面是否為必勝局面

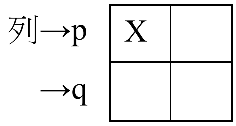
參、研究器材

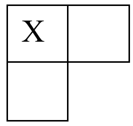
紙、筆、自製方格棋盤、電腦、Excel。

肆、符號定義

為了更清楚了解 Chomp 遊戲，故內容說明表示符號如下所述：

X 為左上角最後一個方格
第一列所剩的方格數為 p
第二列所剩的方格數為 q
〔p,q〕表示每個圖方格數





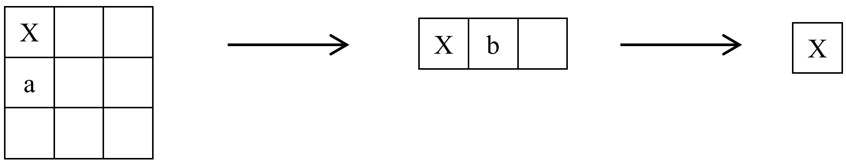
如上圖為[2,1]

伍、研究過程

一、是否存在必勝策略的研究

(一)遊戲規則

在 n×m 矩形中進行遊戲，由兩名玩家輪流交替的拿取其中一個方格。拿取方格時其位置右方與下方的所有方格亦一併全部拿取（即含此方格的第四象限所有方格）。直到最後，若玩家拿到左上角 X 這最後一個方格即是輸家。如下圖所示，a 為先手拿取方格的位置，b 為後手拿取方格的位置，X 為最後一個方格的位置，因此可知先手會拿到最後一個方格，而後手獲勝。



(二)是否有必勝策略的研究

只要方格數目是有限的情形下，那麼必定會有一方拿到最後一個方格而為輸家，而不會有平手的可能。然而，輸家是先手還是後手呢？這取決於是否存在必勝策略。

推論 1：先手或後手存在必勝策略。

證明：假設 n×m 矩形中，無論先手或後手都沒有必勝策略，因此先手每下的一步，都不確定自己可以獲勝，而後手依據先手的步數來決定下一步的位置，亦不確定自己可以獲勝。如此循環下去，那麼最終必定形成平手的局面。但因為方格數目是有限的，必定會有一方拿到最後一個方格而為輸家，換言之，無論是先手或後手，勝利的一方所有的步數，會形成一個必勝的策略，因此與假設矛盾，所以先手或後手存在必勝策略。

推論 2：如果存在必勝策略，先手必定獲勝。

證明：根據推論 1，先手或後手存在必勝策略。假設後手存在必勝策略，先手從第一步開始到第 n 步中，必定至少有一步會下到一個不確定是否可以獲勝的局面，但後手存在必勝策略，便可以至少在其中一步下到一個位置讓自己確定獲勝。然而如果先手知道後手的必勝策略，

那麼就可以仿照後手的必勝策略，從第一步開始就會形成對先手有利的局面，即便後手知道必勝策略，但是已被先手占得先機，也無法改變必敗的局面，因此先手必定獲勝。

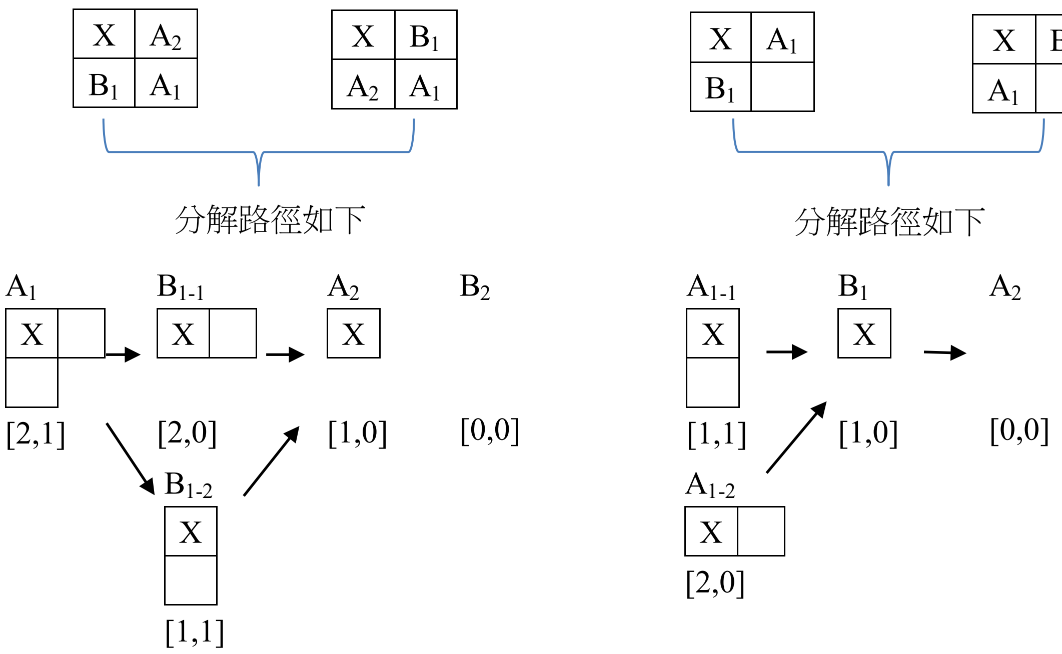
由上的結論得知，Chomp 遊戲存在必勝策略，然而如果先手不知道必勝策略，那麼就無法順利獲勝，因此如何找到必勝策略，成為下一個研究的重點課題。

二、n×n 矩形的研究

(一) 探索 2×2 矩形的必勝策略

假如雙方都不知必勝策略的情況，會有以下的情況。如圖所示，A 代表先手，B 代表後手，A 與 B 後面的數字代表回合數，並且[p,q]表示雙方選擇完方格後，每一列剩下的方格數。其中 p 代表玩家下完第一列剩下的方格數，q 代表玩家下完第二列剩下的方格數。

<第一種情況> A 贏 B 輸　　　　<第二種情況> A 輸 B 贏



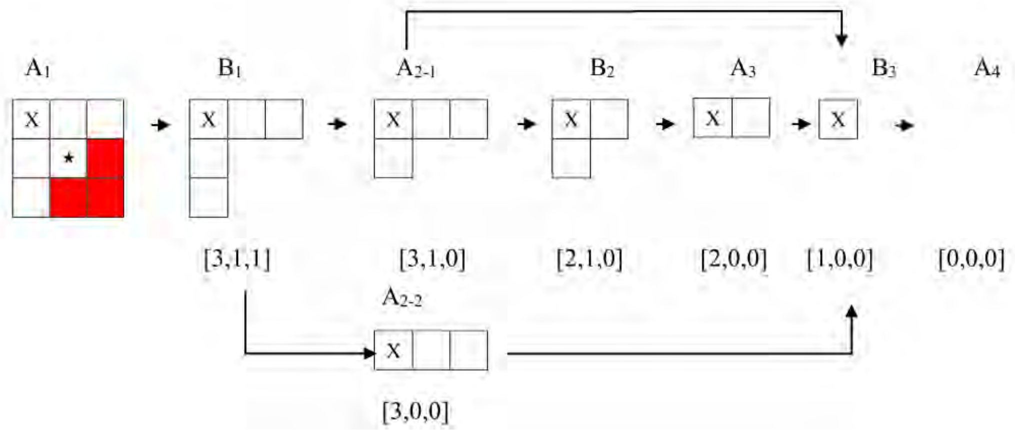
[小結]：2×2 矩形先手的必勝策略是第一步要放在「X」對角線的位置，如果沒有放在對角線位置，則變成後手會贏的局面。

(二) 探索 3×3 矩形的必勝策略

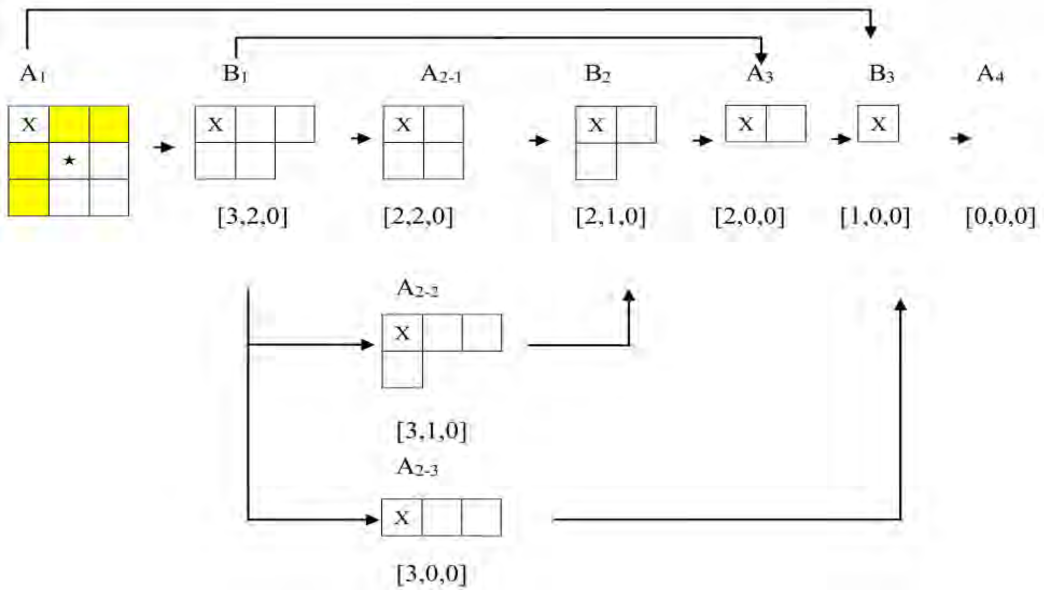
假如雙方都不知必勝策略的情況，以★的位置做為分隔點，先手可以使用其他位置的策略，會產生以下的兩種情況：

<第一種情況> A 第一步放在紅格的其中一個位置，然而 B 只要放在第一個對角線位置，接著

用對稱方式放置，造成 A 輸 B 贏的局面（以下只呈現不旋轉的圖形，旋轉與不旋轉圖形的放置策略相同）。



<第二種情況> A 第一步放黃格的其中一個位置，然而 B 只要放在第二列最右邊或第二行最下方的位置，或是 X 右邊或下邊的位置，造成 A 輸 B 贏的局面（以下只呈現不旋轉的圖形，旋轉與不旋轉圖形的放置策略相同）。

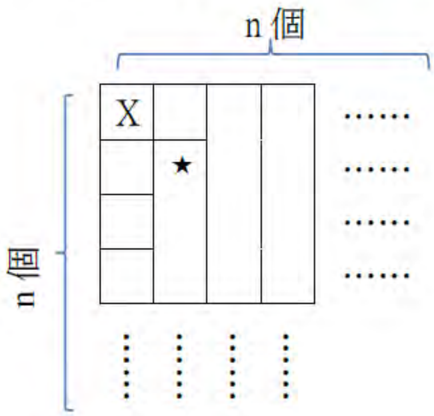


[小結]：在 3×3 矩形中，以上兩種情形皆由後手勝利，因此若先手要獲勝，則第一步要放最接近 X 的對角線位置，接著用對稱方式放置，最後就可以得到勝利。若先手第一步沒有放在對角線位置，無論先手放在哪個位置，後手能產生[3,1,1] →[2,1,0] → [1,0,0]或[3,1,1] → [1,0,0]的策略，以及產生[3,2,0] → [2,1,0] → [1,0,0]或[3,2,0] →[1,0,0]的策略，最後反而是後手獲勝，因此無論如何先手必須下對第一步。

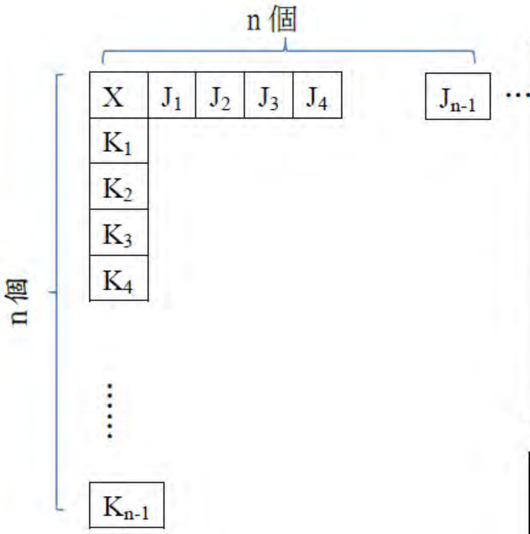
(三) 探索 n×n 矩形的必勝策略

根據前述 2×2 與 3×3 矩形的結果，我們猜測先手的必勝策略是第一步要放對角線的位置，即★所在的位置。如果 A 第一步放在★的位置，接續下來的推導步驟如下：

A_1：放置★的位置，形成$[n,\overbrace{1,1,\dots,1}^{n-1\text{ 個}}], n\in N$



B_1 到 B_n：可能放的位置為 J_i 或 K_i, $1 \le i \le n-1, i\in N$



B_1 到 B_n 可能局面一：

$[i,\overbrace{1,1,\dots,1}^{n-1\text{ 個}}]$，其中 $1 \le i \le n-1, i\in N, n\in N$

B_1 到 B_n 可能局面二：

$[n,\overbrace{1,1,\dots,1}^{i-1\text{ 個}}]$，其中 $1 \le i \le n-1, i\in N, n\in N$

旋轉後，這兩種局面可視為同一種

A_2 到 A_n：可能放的位置為是找與 B_1 到 B_{n-1} 所放位置的對稱位置，可能為 K_i 或 J_i, $1 \le i \le n-1, i\in N$

A_2 到 A_n 可能局面一：

$[i,\overbrace{1,1,\dots,1}^{i-1\text{ 個}}]$，其中 $1 \le i \le n-1, i\in N, n\in N$

A_2 到 A_n 可能局面二：

$[i-1,\overbrace{1,1,\dots,1}^{i-1\text{ 個}}]$，其中 $1 \le i \le n-1, i\in N, n\in N$

旋轉後，這兩種局面可視為同一種

依照上述步驟如此反覆下去，最後剩下 X 方格必然為 B 所得，因此在有限的方格數中，贏家必然為先手。

[小結]：在 n×n 矩形中，先手的必勝策略是第一步要放最接近 X 的對角線位置上，接著使用

對稱的策略，放置跟後手所放置的相對位置，最後就能夠獲得勝利。

三、n×m 矩形的研究

(一) 探索 2×3 矩形的必勝策略

假如雙方都不知必勝策略的情況，分成 A 贏 B 輸與 A 輸 B 贏的結果，討論雙方使用的策略。

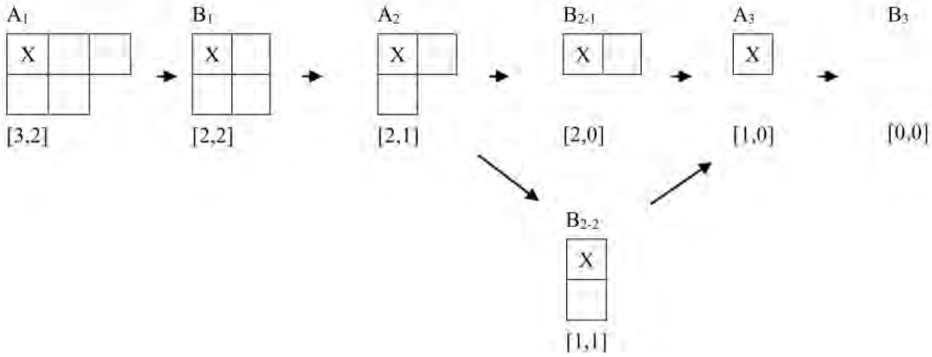
結果一：A 贏 B 輸

<第一種情況>

X	A_3	B1
B_2	A_2	A_1

X	B_2	B_1
A_3	A_2	A_1

分解路徑如下



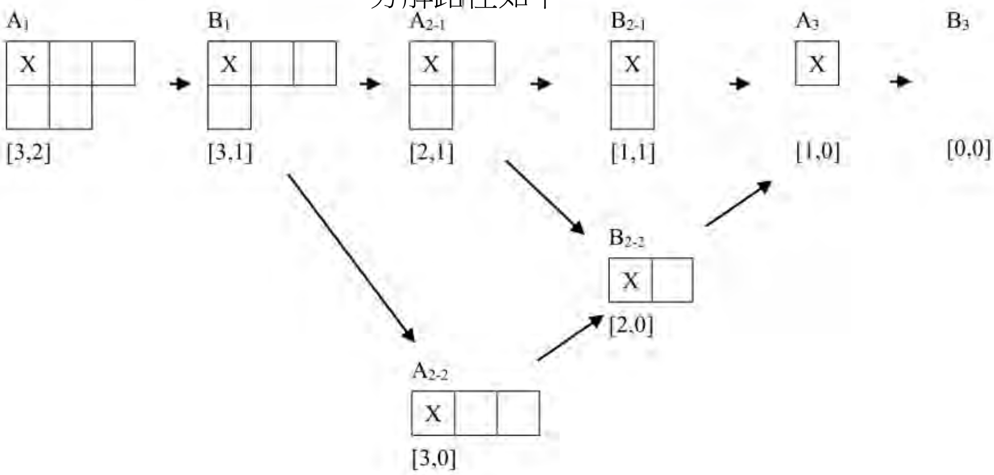
<第二種情況>

	B_2	A_2
A_3	B_1	A_1

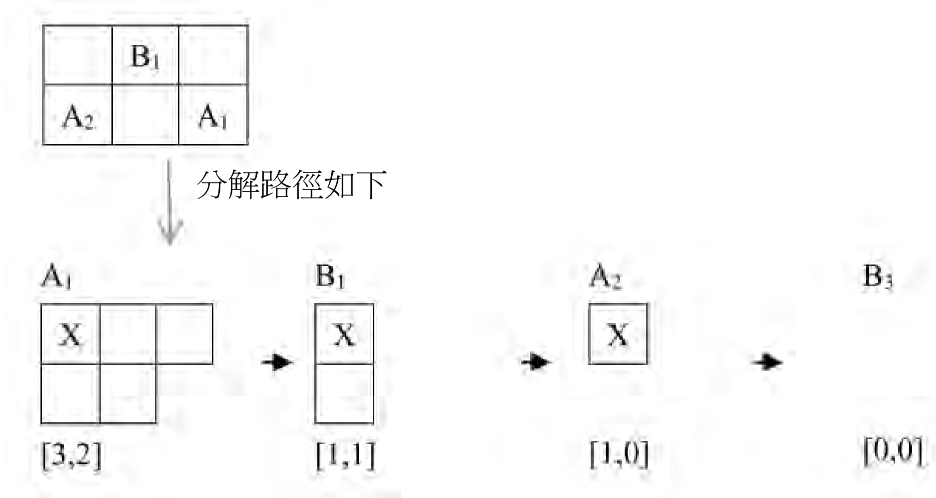
	A_3	A_2
B_2	B_1	A_1

	A_3	B_2
A_2	B_1	A_1

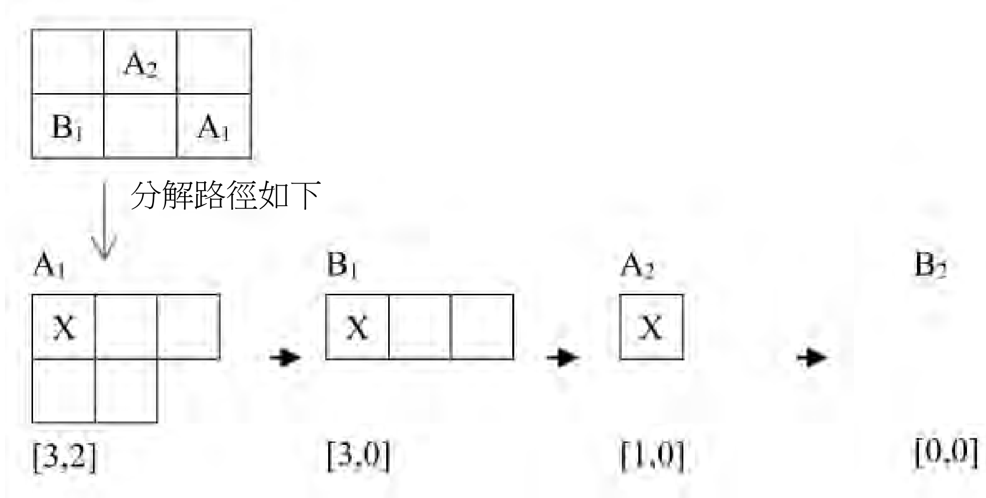
分解路徑如下



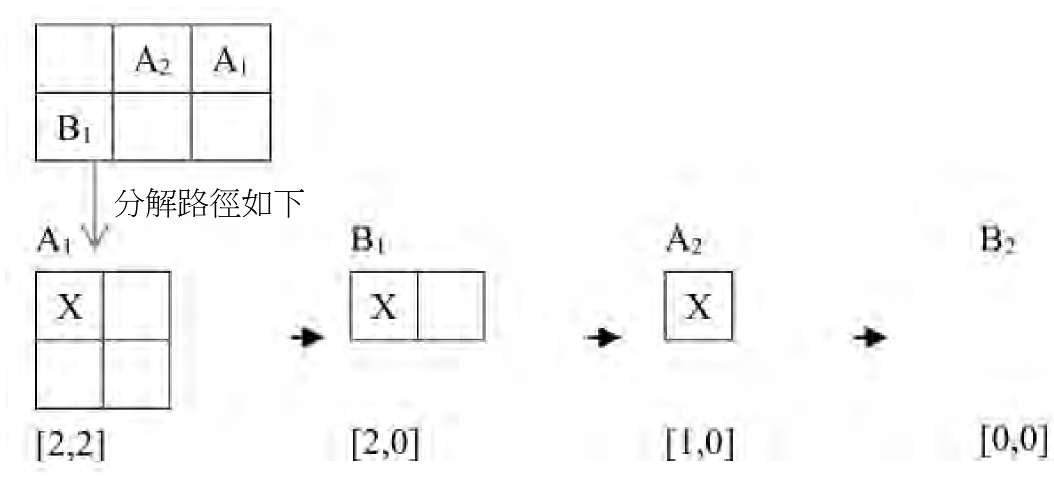
<第三種情況>



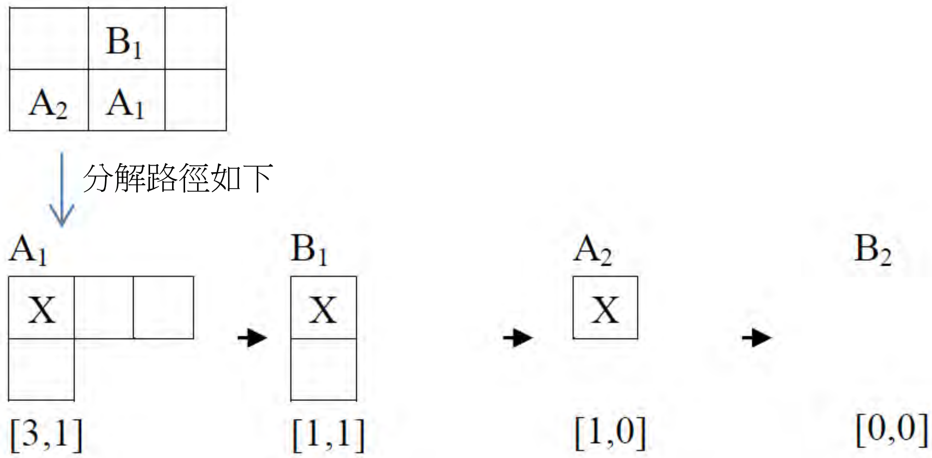
<第四種情況>



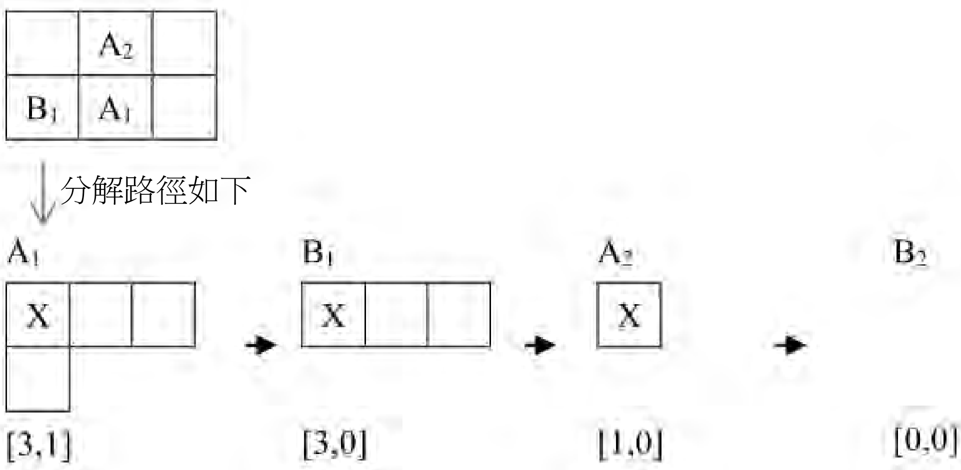
<第五種情況>



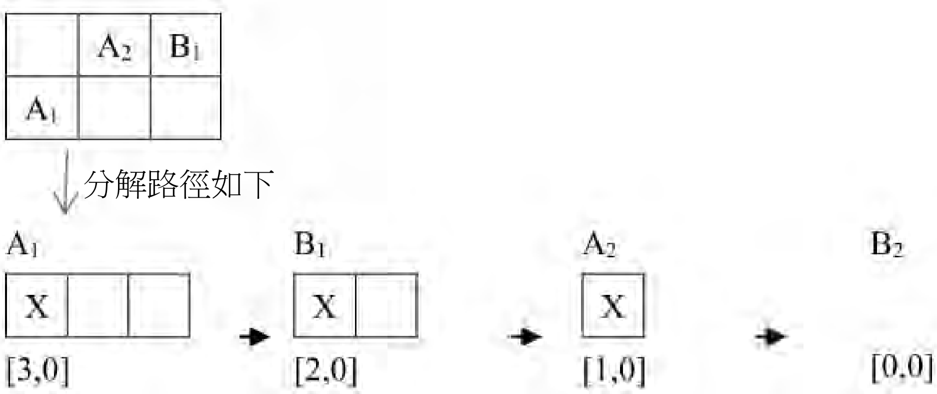
<第六種情況>



<第七種情況>

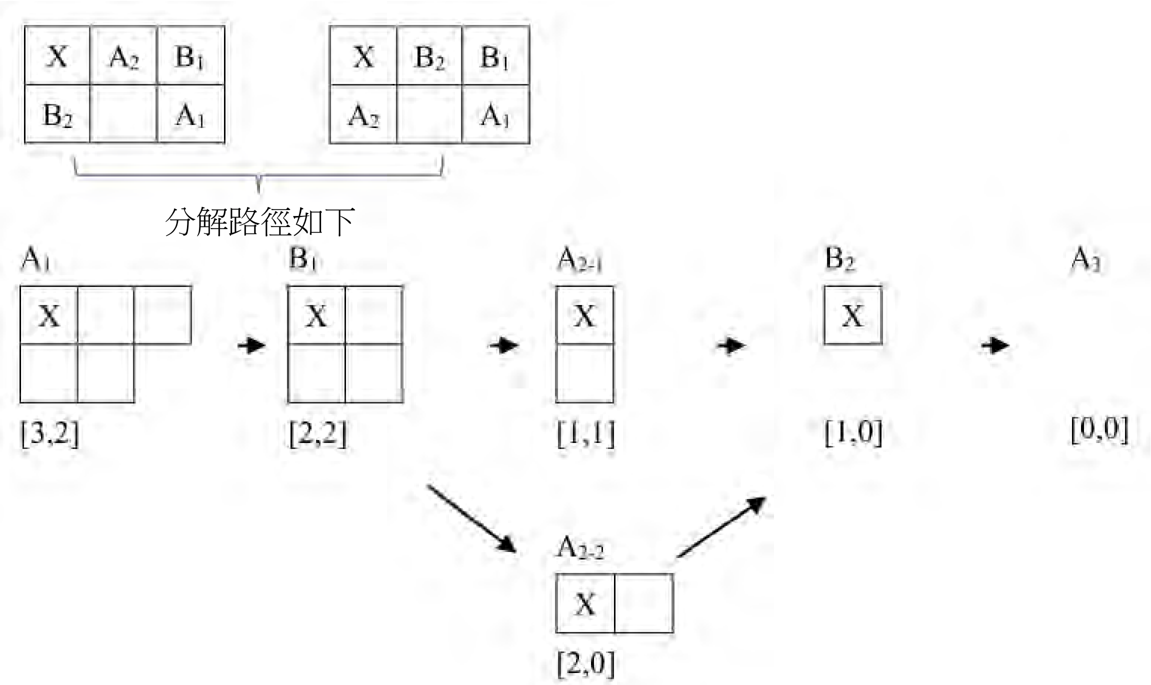


<第八種情況>

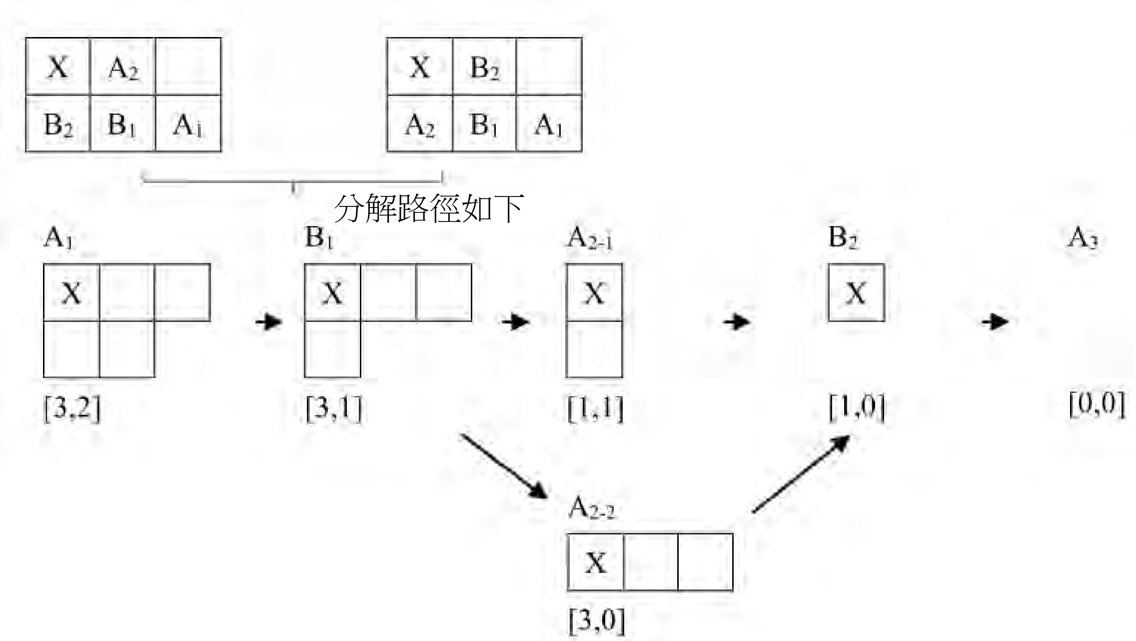


結果二：A 輸 B 贏

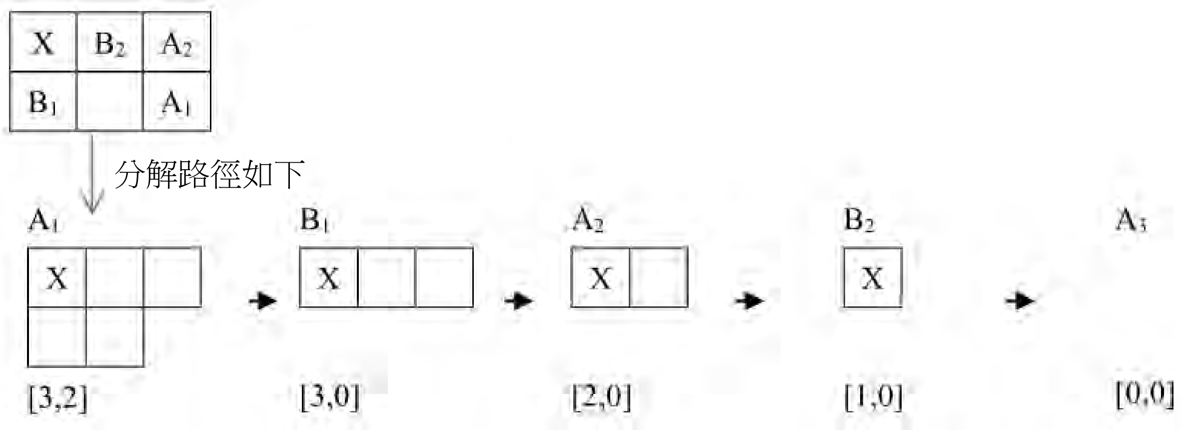
<第一種情況>



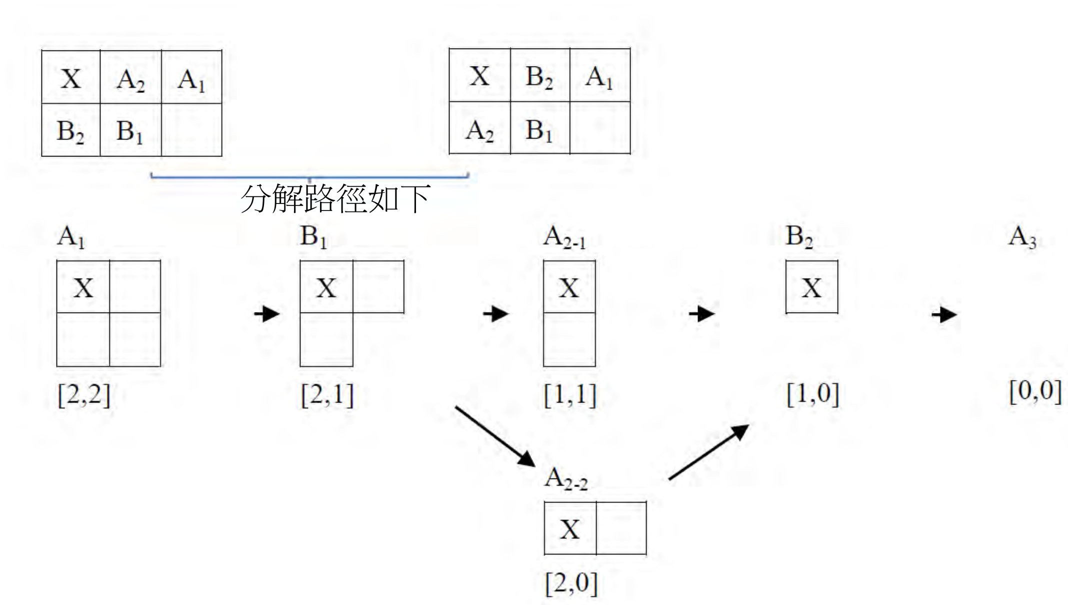
<第二種情況>



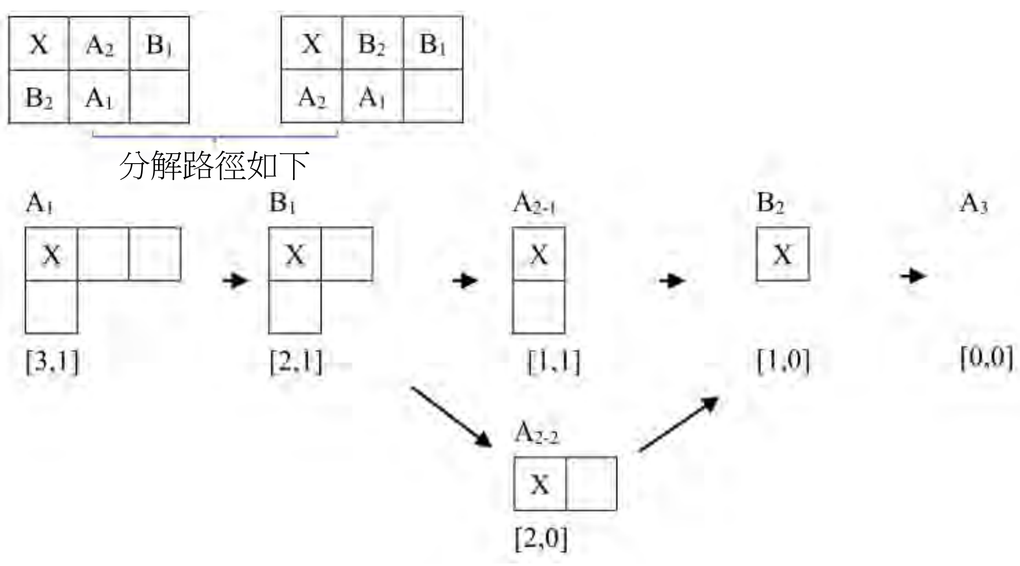
<第三種情況>



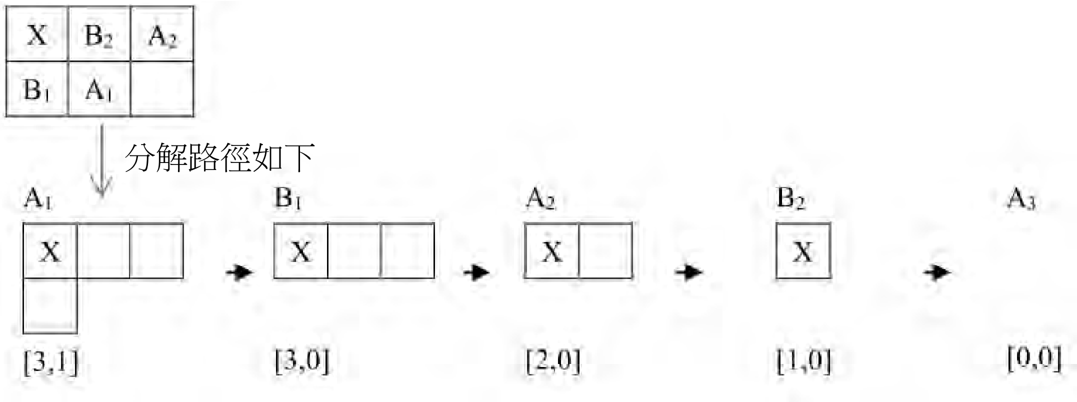
<第四種情況>



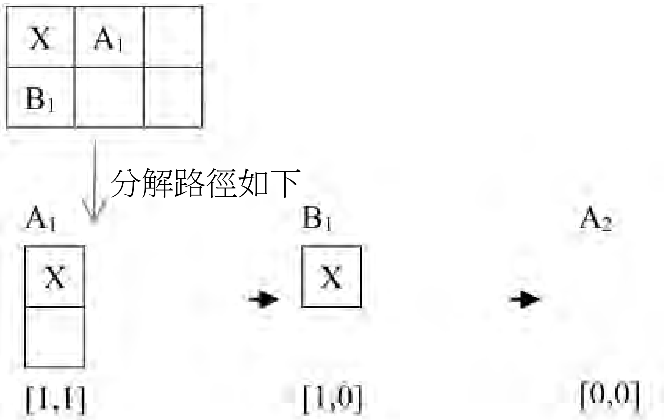
<第五種情況>



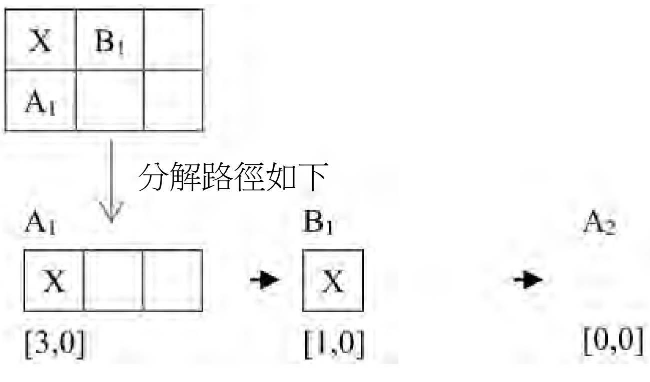
<第六種情況>



<第七種情況>



<第八種情況>



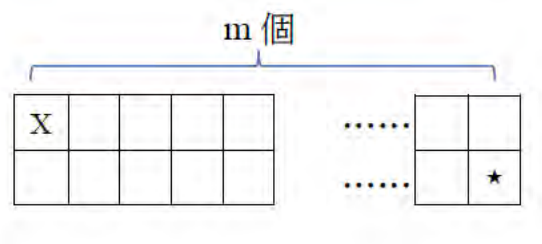
[小結]：由上 16 種情形可知，先手必勝策略的第一步是放第二列的最右邊的位置，使其變成[3,2]的局面，再變成[2,1]與[1,0]而最終獲得勝利。如果先手下錯了，後手只要讓局面變成[2,1]與[1,0]就會贏得勝利。

(二) 探索 2×m 矩形的必勝策略

根據前述2×3矩形的結果，我們猜測先手必勝策略的第一步是放第二列的最右邊的位置，

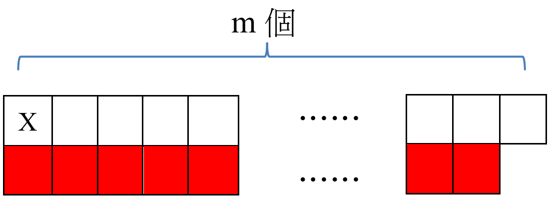
即★所在的位置。推導步驟如下：

A_1：放置★的位置，形成局面為[m, m-1], m∈N



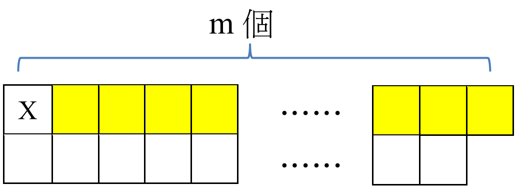
B_1 到 B_m：放置的策略有以下兩種可能：

（1）放置於紅色區域的策略



B_1 可能局面一：
[m,m-i]，其中 $2 \leq i \leq m$,i∈N,m∈N

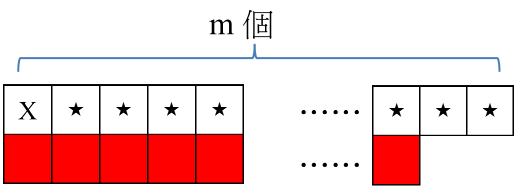
（2）放置於黃色區域的策略



B_1 可能局面二：
[m-j,m-j]，其中 $1 \leq j \leq m$,j∈N,m∈N

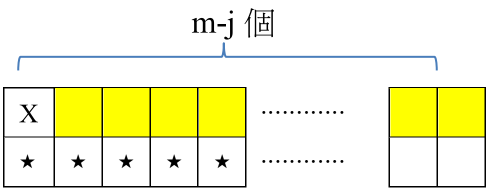
A_2 到 A_m：跟 B 所放置對角線位置的策略

（1）若 B 放置於紅色區域，則放置第一列最右位置，使其第一列個數多於第二列一個方格



A_2 可能局面一：
[m-i,m-i-1]，其中 $1 \leq i \leq m-1$,i∈N,m∈N

（2）若 B 放置於黃色區域，則放置第二列最右位置，使其第一列個數多於第二列一個方格



A_2 可能局面二：
[m-j,m-j-1]，其中 $1 \leq j \leq m-1$,j∈N,m∈N

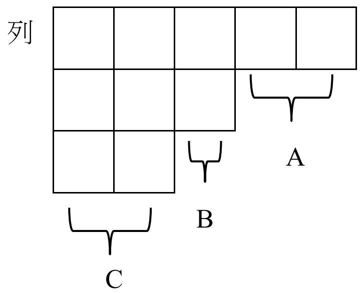
依照上述步驟如此反覆下去，最後剩下 X 方格必然為 B 所得，因此在有限的方格數中，贏家必然為先手。

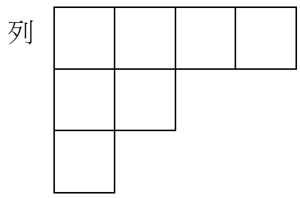
[小結]：先手必勝策略的第一步是放第二列的最右邊的位置，使其變成[m,m-1]的局面，持續此局面變成[1,0]而最終獲得勝利。如果先手下錯了，後手只要讓局面變成[m,m-1]的局面就會贏得勝利。

(三) 探索 3×m 矩形的必勝策略

為了獲得最後的勝利，3×m 矩形中，先手必勝的方格排列需要以[A,B,C]的型式代表每一列方格的數目。如下所示，例如[2,1,1]代表第一列方格數量為 4，第二列方格數量為 2，第三列方格數量為 1。

A 代表第一列減第二列方格數
B 代表第二列減第三列方格數
C 代表第三列方格數
[A,B,C]表示每個圖方格數





如上圖為〔2,1,1〕

依照第三列方格數量，我們找到先手必勝的方格排列如下表所示。並且依照第三列方格數量的不同，可區分為有限組解的必勝策略和無限組解的必勝策略。無論是有限組解或無限組的情況，都可以找到一個局面的 B 值為零，即第二列與第三列的方格數目相同，但第一列方格數目不同於第二列與第三列。另外，決定是否有限組解或無限組解的必勝策略，取決於是否存在一個局面的 A 值為零。若能夠找到一個局面的 A 值為零，則存在有限組解，若沒有一個局面的 A 值為零，則存在無限組解。

3×m 矩形中先手的必勝策略（無記號－有限組解；有⋆記號－無限組解）

C	先手必勝的方格排列[A,B,C]
1	[2,0,1]、[0,1,1]
2★	[2,0,2]、[2,Y,2] ,Y∈ N
3	[3,0,3]、[3,1,3]、[0,2,3]
4	[4,0,4]、[4,1,4]、[4,2,4]、[0,3,4]
5★	[5,0,5]、[3,1,5]、[4,Y,5] ,Y∈ N 且Y≥2
6	[5,0,6]、[5,1,6]、[5,2,6]、[0,3,6]
7★	[6,0,7]、[6,1,7]、[3,2,7]、[5,Y,7] ,Y≥3 且 Y∈ N
8	[7,0,8]、[5,1,8]、[6,2,8]、[6,3,8]、[0,4,8]
9★	[7,0,9]、[7,1,9]、[3,2,9]、[6,Y,9] ,Y≥3 且 Y∈ N
10	[8,0,10]、[8,1,10]、[8,2,10]、[8,3,10]、[0,4,10]
11★	[9,0,11]、[7,1,11]、[9,2,11]、[3,3,11]、[9,4,11]、[8,5,11]、[8,6,11]、[3,7,11]、[7,Y,11] ,Y≥8 且 Y∈ N
12	[9,0,12]、[10,1,12]、[8,2,12]、[9,3,12]、[3,4,12]、[0,5,12]
13	[11,0,13]、[9,1,13]、[7,2,13]、[9,3,13]、[9,4,13]、[9,5,13]、[0,6,13]
14★	[11,0,14]、[11,1,14]、[7,2,14]、[10,3,14]、[10,4,14]、[3,5,14]、[9,Y,14] ,Y≥6 且 Y∈ N
15	[12,0,15]、[10,1,15]、[11,2,15]、[11,3,15]、[3,5,15]、[10,6,15]、[0,7,15]
16	[12,0,16]、[12,1,16]、[8,2,16]、[12,3,16]、[10,4,16]、[11,5,16]、[11,6,16]、[0,7,16]
17★	[13,0,17]、[13,1,17]、[10,2,17]、[12,3,17]、[12,4,17]、[12,5,17]、[3,6,17]、[11,Y,17] ,Y≥7 且 Y∈ N
18	[14,0,18]、[14,1,18]、[11,2,18]、[8,3,18]、[13,4,18]、[11,5,18]、[12,6,18]、[12,7,18]、[0,8,18]
19★	[15,0,19]、[13,1,19]、[14,2,19]、[14,3,19]、[8,4,19]、[13,5,19]、[13,6,19]、[3,7,19]、[12,Y,19] ,Y≥8 且 Y∈ N
20	[15,0,20]、[15,1,20]、[15,2,20]、[10,3,20]、[14,4,20]、[14,5,20]、[14,6,20]、[14,7,20]、[3,8,20]、[0,9,20]
21	[16,0,21]、[16,1,21]、[13,2,21]、[15,3,21]、[8,4,21]、[15,5,21]、[13,6,21]、[14,7,21]、[14,8,21]、[14,9,21]、[0,10,21]
22★	[17,0,22]、[15,1,22]、[16,2,22]、[16,3,22]、[10,4,22]、[15,5,22]、[15,6,22]、[15,7,22]、[3,8,22]、[14,Y,22] ,Y≥9 且 Y∈ N
23	[17,0,23]、[17,1,23]、[17,2,23]、[12,3,23]、[18,4,23]、[8,5,23]、[16,6,23]、[16,7,23]、[13,8,23]、[15,9,23]、[0,10,23]
24★	[18,0,24]、[18,1,24]、[18,2,24]、[18,3,24]、[10,4,24]、[17,5,24]、[17,6,24]、[10,7,24]、[16,8,24]、[3,9,24]、[15,Y,24] ,Y≥10 且 Y∈ N
25	[19,0,25]、[17,1,25]、[19,2,25]、[13,3,25]、[18,4,25]、[8,5,25]、[17,6,25]、[13,7,25]、[16,8,25]、[16,9,25]、[16,10,25]、[0,11,25]

判斷 3×m 矩形中先手的第一步，利用上表判斷第一步的條件，如下:

1. C＜m

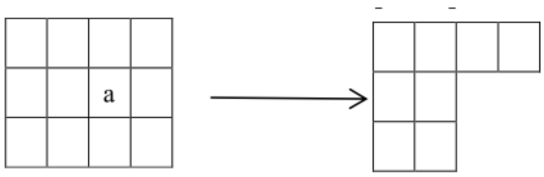
2. A+B+C=m

3. A=0 或 B=0

符合以上 3 個條件，即為必勝策略中的第一步。

例如 3×4

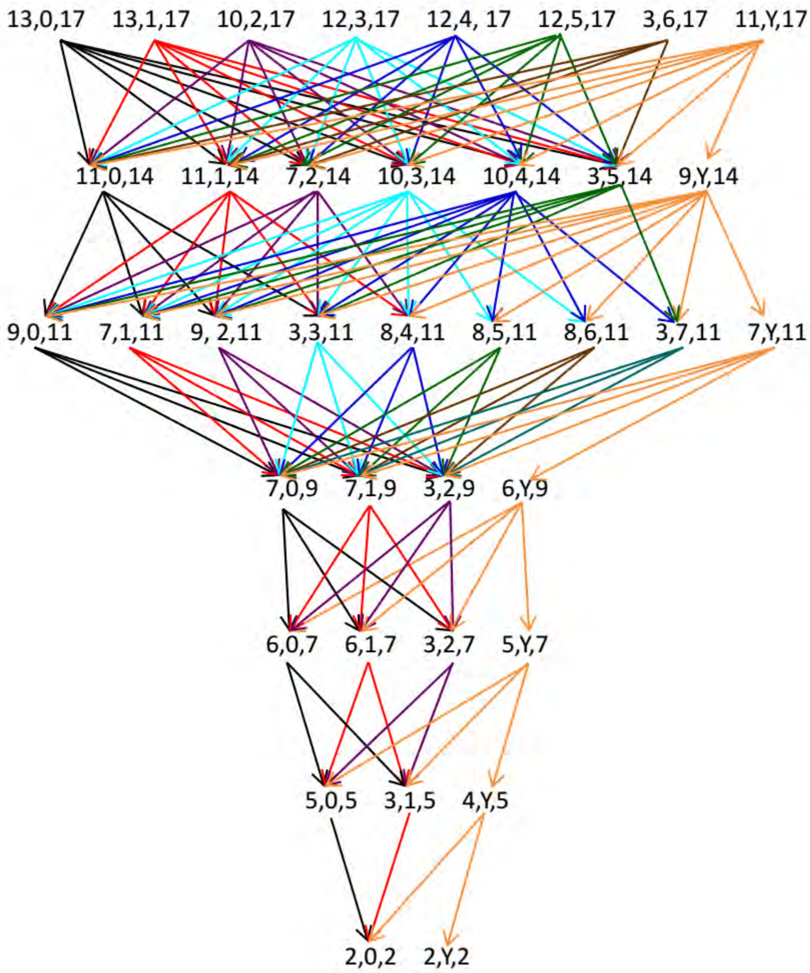
表中符合以上條件的只有[2,0,2]，所以要下在 a 的位置，使圖形變成[2,0,2]。



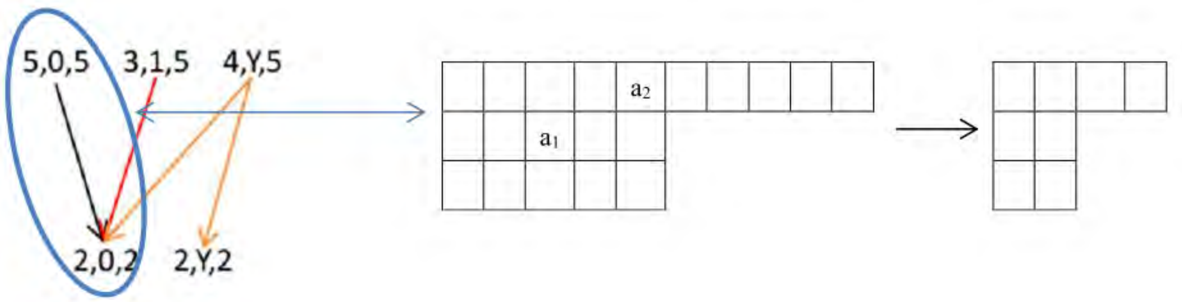
接著先手要贏得最後勝利， 則必須根據第三列的方格數，來找到必勝的局面，直到獲勝為止。

如下圖所示，為先手可以採用的其中一部分之連續必勝策略。

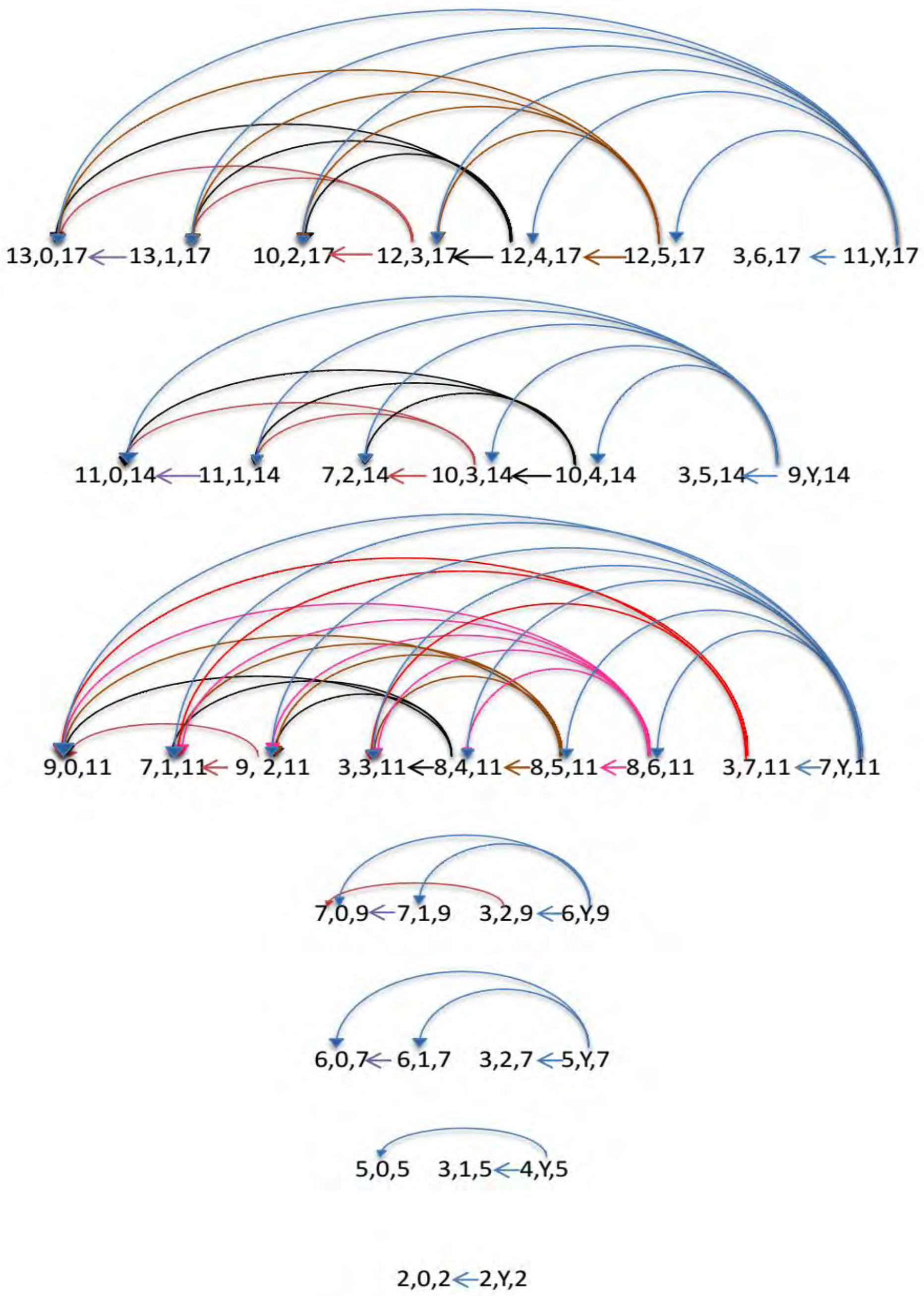
無限組解(縱向)



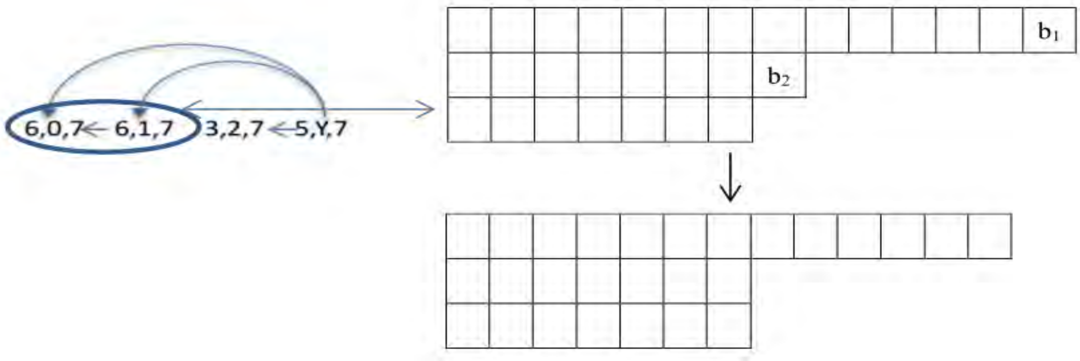
以上圖先手下完剩於方格數[5,0,5]為例，接著後手下在 a_1，而先手下一步只要下在 a_2，或後手下在 a_2，而先手下一步只要下在 a_1，使圖形變成[2,0,2]。



無限組解(橫向)



以上圖先手下完剩於方格數[6,1,7]為例，接著後手下在 b_1，而先手下一步只要下在 b_2，或後手下在 b_2，而先手下一步只要下在 b_1，使圖形變成[6,0,7]。



[小結]：3×m 矩形中先手的必勝策略，依照第三列方格不同的數量，可歸類各種必勝策略的局面。若先手要贏得最後勝利，除了第一步要形成必勝策略的局面外，無論後手形成何種局面，先手必須要找到下一步的必勝策略局面，直到獲勝為止。

(四) 探索 n×m 矩形的必勝策略

如下表所示，當從[2,1]開始的必勝策略，依次為[3,2]、[4,3]、[5,4]、[6,5]、…，均是先手的必勝策略局面，翻轉 90 度後會發現，[2,1]、[2,2,1]、[2,2,2,1]、[2,2,2,2,1]、…，也都是先手的必勝策略局面。3×m 矩形必勝策略從[3,1,1]開始，依次為[4,2,2]、[5,3,2]、[6,4,2] 、…，均是先手的必勝策略局面，翻轉 90 度後會發現，[3,1,1]、[3,3,1,1]、[3,3,2,1,1] 、…，也都是先手的必勝策略局面。

未翻轉	翻轉 90 度	未翻轉	翻轉 90 度
[2,1]	[2,1]	[3,1,1]	[3,1,1]
[3,2]	[2,2,1]	[4,2,2]	[3,3,1,1]
[4,3]	[2,2,2,1]	[5,3,2]	[3,3,2,1,1]
⋮	⋮	⋮	⋮

在這裡發現，翻轉90度後無論會有多少列，其最後一列的方格數必定為1。因此能用以下的式子來表示：

$$x = \begin{cases} \left\lfloor \frac{2a+b}{2} \right\rfloor & \text{if } \ a+b \text{ 為偶數} \\ min\left\{ \left\lceil \frac{2a-b}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{3(a-b)}{2} \right\rceil \right\} & \text{if } \ a+b \text{ 為奇數} \end{cases}$$

其中 x 代表列數，a 代表第一列方格數，b 代表第二列方格數，剩下列數方格數皆為 1。

如果中間方格數出現 2 的情形，可以以下的式子來表示：

$$x = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad a = 1 \\ 2 & \text{if} \quad a = b+1 \\ \left\lfloor \frac{2a+b}{2} \right\rfloor & \text{if} \quad a+b \text{ 為奇數且 } a \neq b+1 \\ \left\lfloor \frac{3a}{2} \right\rfloor + 1 & \text{if} \quad a = b \\ min \left\{ \left\lceil \frac{2a-b}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{3(a-b)}{2} \right\rceil \right\} & \text{if} \quad a+b \text{ 為偶數且} a \neq b \end{cases}$$

其中 x 代表列數，a 代表第一列的方格數，b 代表第二列的方格數，第三列的方格數為2，剩下的列數方格數皆為1。

陸、討論

一、推論該局面是否為必勝策略局面

為了方便之後的討論，我們要先定義兩個函數，分別為 mex 函數和 Grundy 函數。首先定義 mex 函數。設集合 S 中所有元素皆為非負整數，令 mex 函數為不在集合 S 中的最小非負整數，即:

$$\text{mex}\{S\} = \min\{Z^{+}_{0} - S\}$$

其中 $Z_0^+ = N \cup \{0\}$，接下來定義 Grundy 函數。令 T_i 為下完第 i 局後所得圖形，$D_i = \{T_{i+1,1}, T_{i+1,2}, \cdots, T_{i+1,\alpha_i}\}$ 為 T_{i+1} 之所有可能情形所成的集合（假設有 α_i 種可能）。Grundy 函數 $G: \cup_i D_i \to Z_0^+$ 定義為

$$G(T_i) = \text{mex}\left\{G(T_{i+1,1}), G(T_{i+1,2}), \cdots, G(T_{i+1,\alpha_i})\right\}$$

最後一個選取的方格☒，因為沒有其他可能的局面，因此 Grundy 數定義為 0，即 G(☒)=0。

接著分以下情況來探討：

(一)如果剩下兩個方格，無論是水平或垂直排列，只有一個可能局面:

☒□可以變成☒，所以 G(☒□) = G($\begin{matrix}☒\\□\end{matrix}$) = mex{G(☒)}= mex{0}=1

(二)如果剩下三個方格，則可能有兩種情況:

☒□□可以變成☒□或☒，所以 G(☒□□)=G($\begin{matrix}☒\\□\\□\end{matrix}$)= mex{G(☒□),G(☒)}= mex{1,0}=2

$\begin{smallmatrix}\boxtimes&\square\\\square&\end{smallmatrix}$可以變成☒□或 $\begin{smallmatrix}\boxtimes\\\square\end{smallmatrix}$, 所以 G($\begin{smallmatrix}\boxtimes&\square\\\square&\end{smallmatrix}$) =mex{G(☒□),G($\begin{smallmatrix}\boxtimes\\\square\end{smallmatrix}$)} = mex{1,1}=0

(三)如果剩下四個方格，則可能有三種情況：

☒□□□可以變成☒□□或☒□或☒,所以 G(☒□□□)=G($\begin{smallmatrix}\boxtimes\\\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}$)= mex{ G(☒),G(☒□),G(☒□□) } = mex{0,1,2}=3

$\begin{smallmatrix}\boxtimes&\square&\square\\\square&&\end{smallmatrix}$可以變成☒□□或 $\begin{smallmatrix}\boxtimes&\square\\\square&\end{smallmatrix}$ 或 $\begin{smallmatrix}\boxtimes\\\square\end{smallmatrix}$，所以 G($\begin{smallmatrix}\boxtimes&\square&\square\\\square&&\end{smallmatrix}$) =G($\begin{smallmatrix}\boxtimes&\square\\\square&\\\square&\end{smallmatrix}$)

= mex｛G($\begin{smallmatrix}\boxtimes&\square\\\square&\end{smallmatrix}$),G($\begin{smallmatrix}\boxtimes\\\square\end{smallmatrix}$),G(☒□□)｝= mex｛0,1,2｝=3

$\begin{smallmatrix}\boxtimes&\square\\\square&\square\end{smallmatrix}$ 可以變成 $\begin{smallmatrix}\boxtimes&\square\\\square&\end{smallmatrix}$ 或 $\begin{smallmatrix}\boxtimes\\\square\end{smallmatrix}$ 或 ☒□，所以 G($\begin{smallmatrix}\boxtimes&\square\\\square&\square\end{smallmatrix}$)= mex｛G($\begin{smallmatrix}\boxtimes&\square\\\square&\end{smallmatrix}$),G($\begin{smallmatrix}\boxtimes\\\square\end{smallmatrix}$),G(☒□)｝

= mex｛0,1,1｝=2

(四)如果剩下五個方格，則可能有四種情況：
☒□□□□可以變成☒□□□或☒□□或☒□或☒，
所以 G(☒□□□□)= mex｛G(☒),G(☒□),G(☒□□),G(☒□□□)｝= mex｛0,1,2,3｝＝4

$\begin{smallmatrix}\boxtimes&\square&\square&\square\\\square&&&\end{smallmatrix}$可以變成☒□□□或 $\begin{smallmatrix}\boxtimes&\square&\square\\\square&&\end{smallmatrix}$ 或 $\begin{smallmatrix}\boxtimes&\square\\\square&\end{smallmatrix}$ 或 $\begin{smallmatrix}\boxtimes\\\square\end{smallmatrix}$ ，

所以 G($\begin{smallmatrix}\boxtimes&\square&\square&\square\\\square&&&\end{smallmatrix}$)= mex｛G($\begin{smallmatrix}\boxtimes&\square\\\square&\end{smallmatrix}$),G($\begin{smallmatrix}\boxtimes\\\square\end{smallmatrix}$),G($\begin{smallmatrix}\boxtimes&\square&\square\\\square&&\end{smallmatrix}$),G(☒□□□)｝= mex｛0,1,3,3｝＝2，

$\begin{smallmatrix}\boxtimes&\square&\square\\\square&\square&\end{smallmatrix}$ 可以變成 $\begin{smallmatrix}\boxtimes&\square\\\square&\square\end{smallmatrix}$ 或 $\begin{smallmatrix}\boxtimes&\square&\square\\\square&&\end{smallmatrix}$ 或 ☒□□ 或 $\begin{smallmatrix}\boxtimes\\\square\end{smallmatrix}$ ，

所以 G($\begin{smallmatrix}\boxtimes&\square&\square\\\square&\square&\end{smallmatrix}$)= ｛G($\begin{smallmatrix}\boxtimes\\\square\end{smallmatrix}$),G(☒□□),G($\begin{smallmatrix}\boxtimes&\square\\\square&\square\end{smallmatrix}$),G($\begin{smallmatrix}\boxtimes&\square&\square\\\square&&\end{smallmatrix}$)｝= mex｛1,2,3,3｝＝0，

$\begin{smallmatrix}\boxtimes&\square&\square\\\square&&\\\square&&\end{smallmatrix}$可以變成 $\begin{smallmatrix}\boxtimes&\square&\square\\\square&&\end{smallmatrix}$或 ☒□□，所以 G($\begin{smallmatrix}\boxtimes&\square&\square\\\square&&\\\square&&\end{smallmatrix}$) = ｛G(☒□□),G($\begin{smallmatrix}\boxtimes&\square&\square\\\square&&\end{smallmatrix}$)｝

= mex｛2,3｝＝0

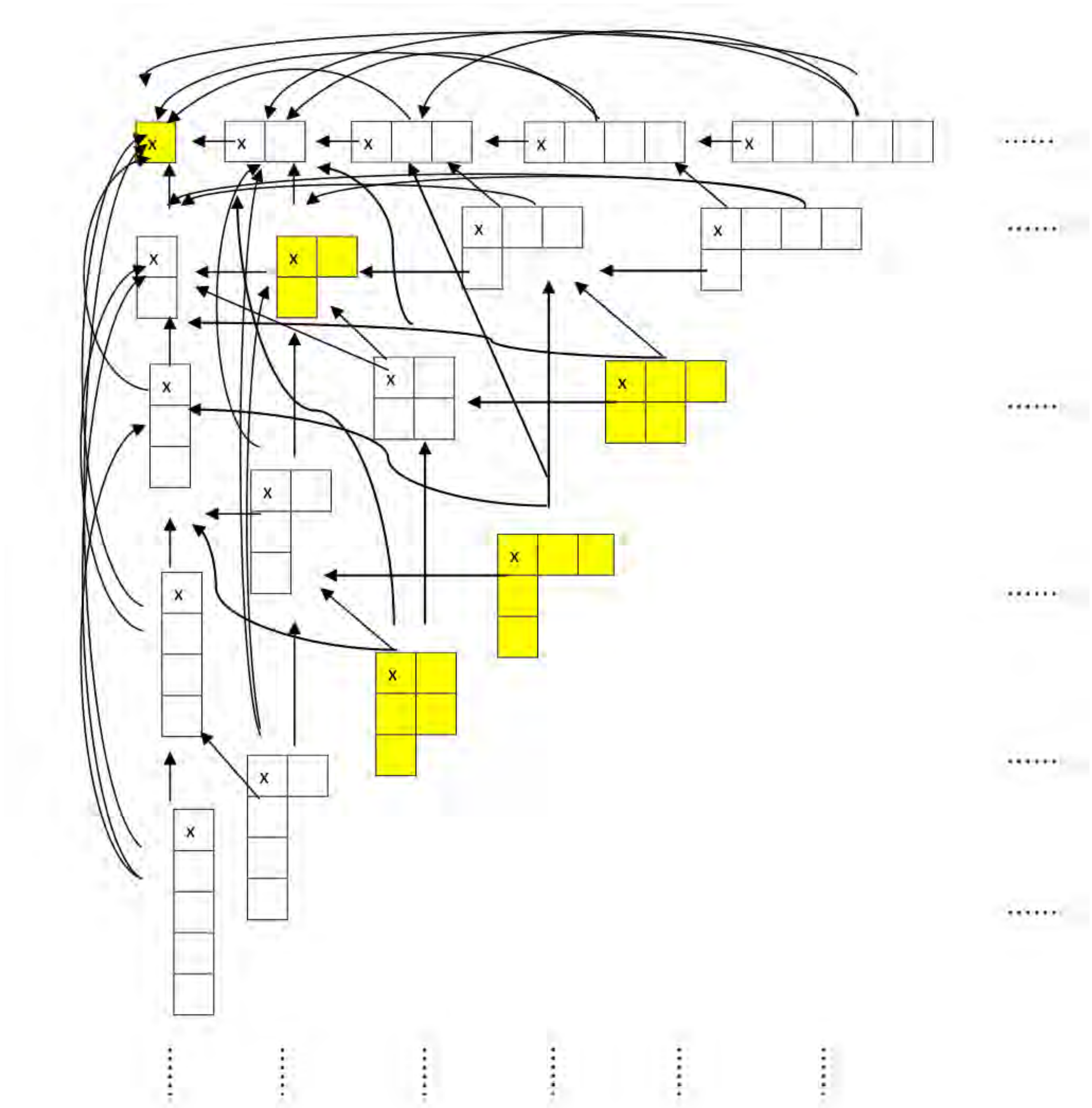
（五）各種剩下方格數與 Grundy 數

將剩下方格數以「行」為單位表示，如 $\begin{smallmatrix}\boxtimes&\square&\square\\\square&&\end{smallmatrix}$ 表示成(2,1,1) ，並且顯示其 Grundy 數，如下表所示。Grundy 數為零代表必勝局面，Grundy 數不為零代表必敗局面。

剩下格數 / Grundy 數	1	2	3	4	5	6	
0	G(1)		G(2,1)		G(2,2,1) G(3,2,0) G(3,1,1)		………
1		G(1,1) G(2,0)				G(3,1,1,1) G(4,1,1,0) G(3,2,1)	………
2			G(1,1,1) G(3,0,0)	G(2,2)	G(2,1,1,1) G(4,1,0,0)		………
3				G(1,1,1,1) G(4,0,0,0) G(2,1,1) G(3,1,0)			………
4					G(1,1,1,1,1) G(5,0,0,0,0)	G(2,1,1,1,1) G(5,1,0,0,0) G(2,2,1,1) G(4,2,0,0) G(2,2,2) G(3,3,0)	………
5						G(1,1,1,1,1,1) G(6,0,0,0,0,0)	………
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

二、討論 Grundy 數與必勝策略的關係

結果顯示若先手先下的位置能讓 Grundy 數為零，則為必勝局面。若先手先下的位置讓 Grundy 數不為零，並且如果對手知道每一步的必勝策略，則為必敗的局面。若對手不知道每一步的必勝局面，則需要搶先一步拿到 Grundy 數為零的局面，接著每一步都使用必勝策略，最後才能獲得勝利。如下圖所示，先手能評估 Grundy 數值而採用的連續必勝策略局面（黃色方格代表 Grundy 為零）。



柒、結論

根據以上的研究結果，得到以下的結論：

一、是否存在必勝策略的研究

（一）先手或後手存在必勝策略。

（二）如果存在必勝策略，先手必定獲勝。

二、n×n 矩形必勝策略的研究

（一）2×2 矩形中，先手必勝策略是第一步要放對角線的位置，如果沒有放在對角線位置，

則變成後手會贏的局面。

（二）3×3 矩形與 n×n 矩形中，先手的必勝策略是第一步要放最接近 X 的對角線位置上，接著使用對稱的策略，放置跟後手所放置的相對位置，最後就能夠獲得勝利。

三、n×m 矩形必勝策略的研究

（一）2×3 矩形中，先手必勝策略的第一步是放第二列的最右邊的位置，使其變成[3,2]的局面，再變成[2,1]與[1,0]而最終獲得勝利。

（二）2×m 矩形中，先手必勝策略的第一步是放第二列的最右邊的位置，使其變成[m,m-1]的局面，持續此局面變成[1,0]而最終獲得勝利。如果先手下錯了，後手只要讓局面變成[m,m-1]的局面就會贏得勝利。

（三）3×m 矩形中，先手的必勝策略，依照第三列方格不同的數量，可歸類各種必勝策略的局面。若先手要贏得最後勝利，除了第一步要形成必勝策略的局面外，無論後手形成何種局面，先手必須要找到下一步的必勝策略局面，直到獲勝為止。

（四）n×m 矩形中，其一般化的式子如下：

$$x = \begin{cases} \left\lfloor \frac{2a+b}{2} \right\rfloor & \text{if} \quad a+b \text{ 為偶數} \\ min\left\{\left\lceil \frac{2a-b}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{3(a-b)}{2} \right\rceil\right\} & \text{if} \quad a+b \text{ 為奇數} \end{cases}$$

其中x代表列數，a代表第一列方格數，b代表第二列方格數，剩下列數方格數皆為1。

如果中間方格數出現 2 的情形，可以以下的式子來表示：

$$x = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad a = 1 \\ 2 & \text{if} \quad a = b+1 \\ \left\lfloor \frac{2a+b}{2} \right\rfloor & \text{if} \quad a+b \text{ 為奇數且 } a \neq b+1 \\ \left\lfloor \frac{3a}{2} \right\rfloor + 1 & \text{if} \quad a = b \\ min\left\{\left\lceil \frac{2a-b}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{3(a-b)}{2} \right\rceil\right\} & \text{if} \quad a+b \text{ 為偶數且} a \neq b \end{cases}$$

其中 x 代表列數，a 代表第一列的方格數，b 代表第二列的方格數，第三列的方格數為2，剩下的列數方格數皆為1。

四、推論該局面是否為必勝策略局面

（一）可以利用 Grundy 數來推論該局面是否為必勝策略局面。Grundy 數為零代表必勝局面，Grundy 數不為零代表必敗局面。

（二）若先手先下的位置讓 Grundy 數為零，則為必勝局面，若先手先下的位置讓 Grundy 數不為零，並且如果對手知道每一步的必勝策略，則為必敗的局面。若對手不知道每一步的必勝局面，則需要搶先一步拿到 Grundy 數為零的局面，接著每一步都使用必勝策略，最後才能獲得勝利。

捌、參考資料

許介彥（2006）。唯一的可能。*數學新天地*，13，17-20。

Gale, D. (1974). A curious Nim-type game. *The American Mathematical Monthly*, *81*(8), 876-879.

Zeilberger, D. (2001). Three-rowed chomp. *Advances in Applied Mathematics*, *26*(2), 168-179.

【評語】030419

探討 chomp 遊戲的致勝規則。這是一個簡單的遊戲。作者們透過小的例子，分析致勝策略，針對 2×n 與 n×n 的情形給出了完整的解答。在分析 3×n，或是更一般化的 m×n 的情形，也藉由 Grundy function 作了一些討論。這類問題當然可用 Grundy function 來分析並找出致勝點。作者利用離散數學中的 Grundy 函數做了一些分析，但是隨著棋盤變大，Grundy 函數的表亦因愈加複雜而難以建構，無法得到完整的策略。但以遊戲者的角度，我們最想知道的應該還是這個遊戲對於先後手哪一方有利，如果對某一方有利，他的致勝策略是什麼。Chomp 的必勝法分析目前在數學上仍然是未解問題，選題時宜避免這類困難的未解問題。

作品海報

摘要

本研究探討Chomp遊戲中，先手與後手是否存在必勝策略和先手是否能必勝，並探索nxn與nxm矩形中，先手必勝策略局面的種類，推論該局是否為必勝局面。研究結果顯示此遊戲存在必勝策略，若先手知道必勝策略，那麼先手最終必然獲勝。在nxn矩形中，先手的必勝策略是第一步要放最接近左上角方格的對角線位置上，接著使用對稱的策略放置，持續到最後亦能夠獲得勝利。再者探究nxm矩形的必勝策略，得到一般化公式的結果。最後，利用Grundy數來推論每個局面是否為必勝局面，結果顯示Grundy數為零，則為必勝局面。若Grundy數為其他數值，並且對手知道每一步的必勝策略，則為必敗局面；反之則需搶先一步拿到Grundy數為零的局面，接著每一步都使用必勝策略，最後才能獲勝。

壹、研究動機

- 抒解每日上課的疲勞與考試的壓力
- 好勝心驅使玩Chomp遊戲，找出必勝的訣竅
- 尋求老師的幫忙，從遊戲中尋找是否有規律，更進一步的研究與推理
- 運用所學直角坐標平面及線對稱圖形

貳、研究目的

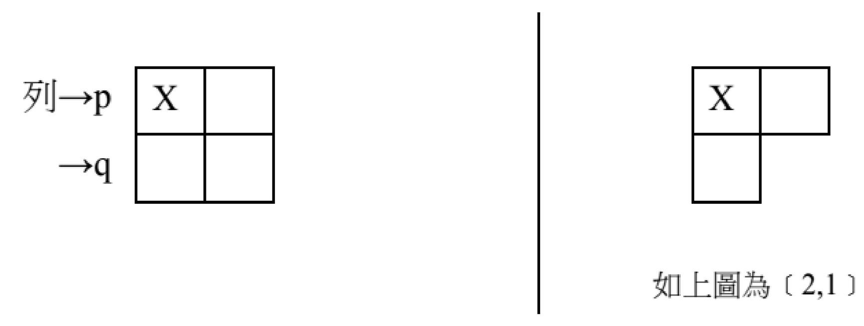
一、是否存在必勝策略的研究
二、nxn矩形必勝策略的研究
三、nxm矩形必勝策略的研究
四、推論每個局面是否為必勝局面

參、研究器材

紙
筆
自製方格棋盤
電腦
Excel

肆、符號定義

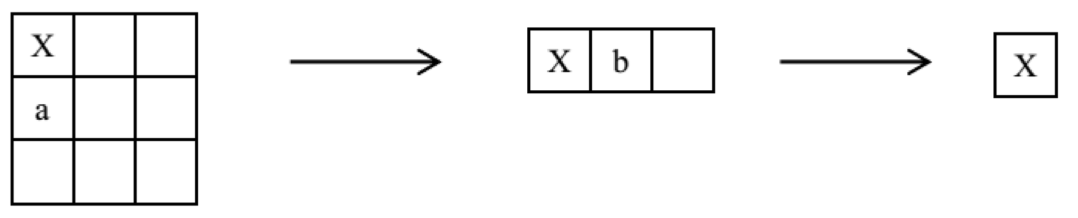
X 為左上角最後一個方格
第一列所剩的方格數為 p
第二列所剩的方格數為 q
〔p,q〕表示每個圖方格數



伍、研究過程

一、是否存在必勝策略的研究

(一)遊戲規則



(二)是否有必勝策略的研究

只要方格數目是有限的情形下，那麼必定會有一方拿到最後一個方格而為輸家，而不會有平手的可能。然而，輸家是先手還是後手呢？這取決於是否存在必勝策略。

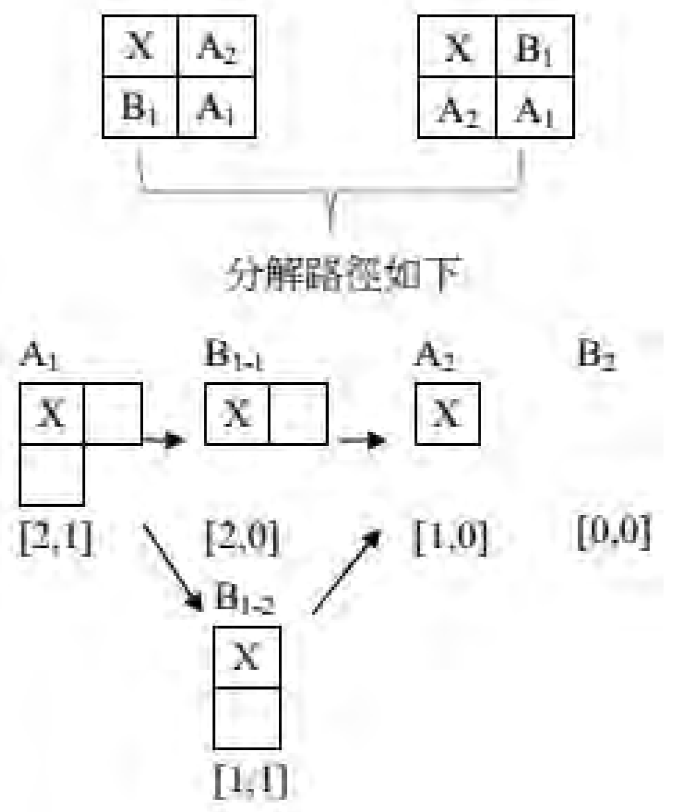
推論1：先手或後手存在必勝策略

推論2：如果存在必勝策略，先手必定獲勝

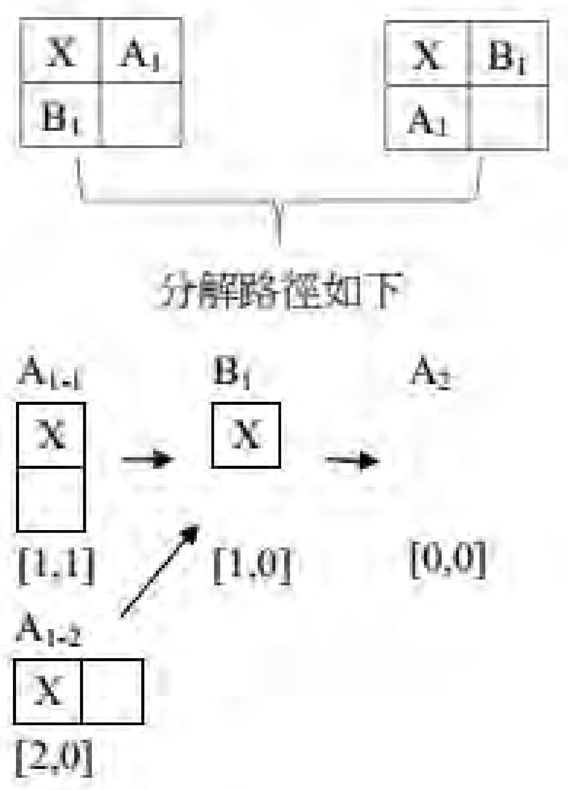
二、nxn矩形的研究

(一) 探索2x2矩形的必勝策略

<第一種情況> A贏B輸



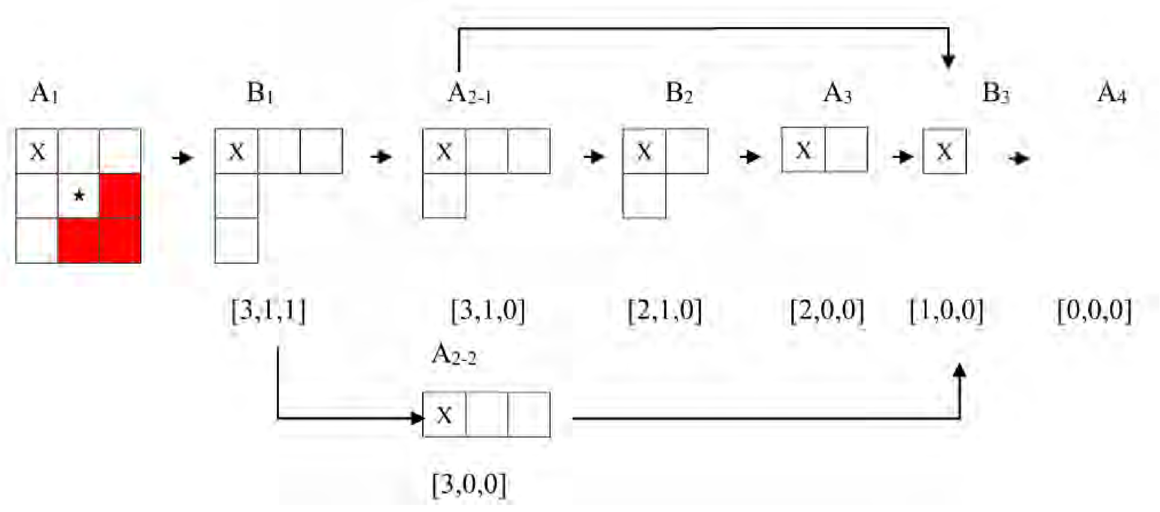
<第二種情況> A輸B贏



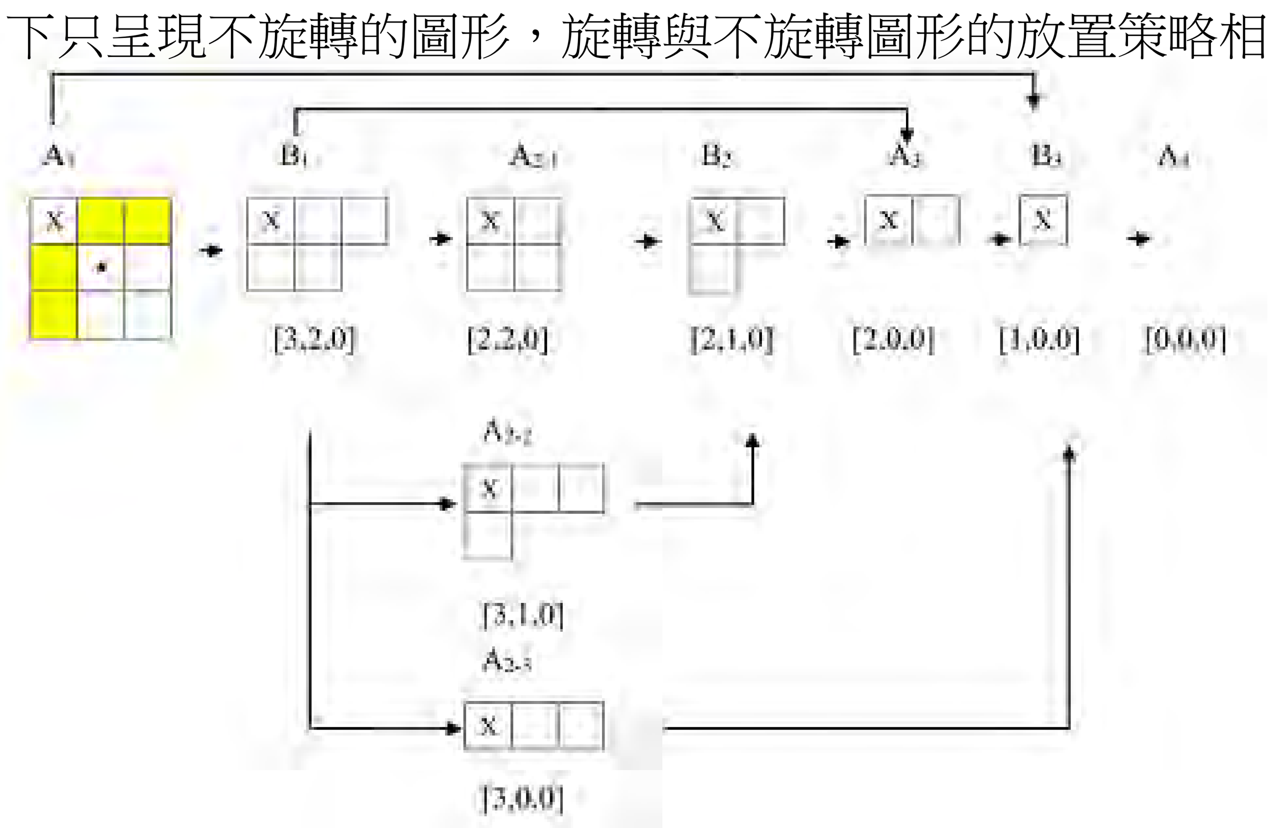
2x2矩形先手的必勝策略是第一步要放在「X」對角線的位置，如果沒有放在對角線位置，則變成後手會贏的局面

(二) 探索3x3矩形的必勝策略

<第一種情況> A第一步放在紅格的其中一個位置，然而B只要放在第一個對角線位置，接著用對稱方式放置（以下只呈現不旋轉的圖形，旋轉與不旋轉圖形的放置策略相同）。



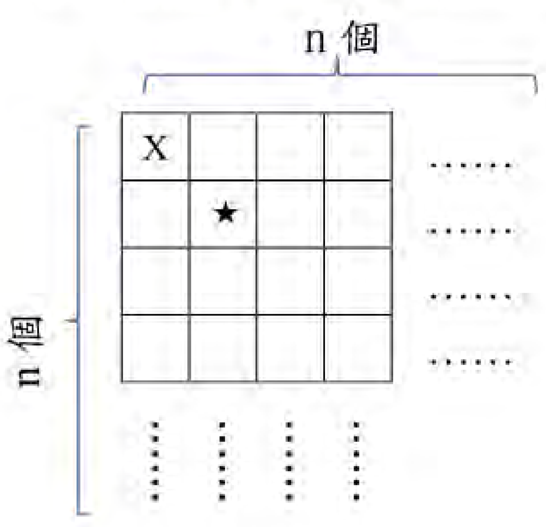
<第二種情況> A第一步放黃格的其中一個位置，然而B只要放在第二列最右邊或第二行最下方的位置，或是X右邊或下邊的位置（以下只呈現不旋轉的圖形，旋轉與不旋轉圖形的放置策略相同）。



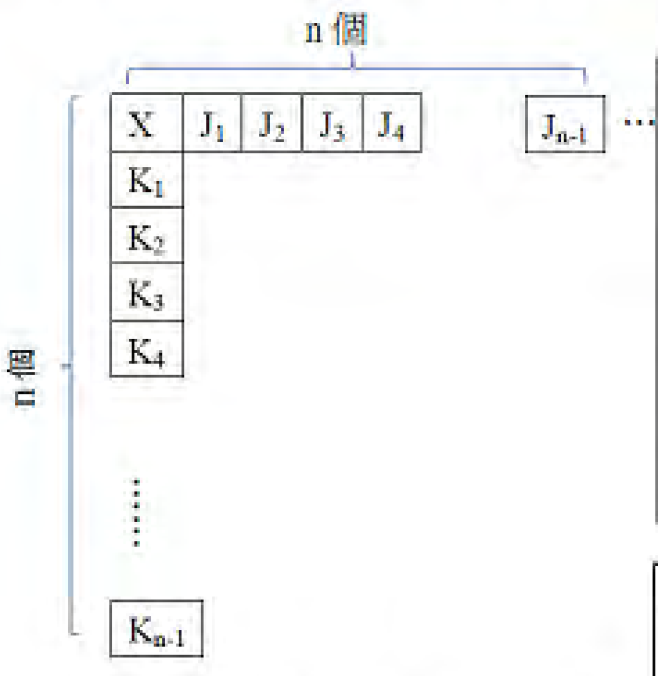
在3x3矩形中，以上兩種情形皆由後手勝利，因此若先手要獲勝，則第一步要放最接近X的對角線位置，接著用對稱方式放置，最後就可以得到勝利。

(三) 探索nxn矩形的必勝策略

A_1：放置★的位置，形成$[n,\overbrace{1,1,\ldots,1}^{n-1\text{ 個}}]$,n∈N



B_1 到 B_n：可能放的位置為 J_i 或 K_i, $1 \leq i \leq n-1$, i∈N



B_1 到 B_n 可能局面一：

$[i,\overbrace{1,1,\ldots,1}^{n-1\text{ 個}}]$，其中 $1 \leq i \leq n-1$, i∈N, n∈N

B_1 到 B_n 可能局面二：

$[n,\overbrace{1,1,\ldots,1}^{i-1\text{ 個}}]$，其中 $1 \leq i \leq n-1$, i∈N, n∈N

旋轉後，這兩種局面可視為同一種

A_2 到 A_n：可能放的位置為是找與 B_1 到 B_{n-1} 所放位置的對稱位置，可能為 K_i 或 J_i, $1 \leq i \leq n-1$, i∈N

A_2 到 A_n 可能局面一：

$[i,\overbrace{1,1,\ldots,1}^{i-1\text{ 個}}]$，其中 $1 \leq i \leq n-1$, i∈N, n∈N

A_2 到 A_n 可能局面二：

$[i-1,\overbrace{1,1,\ldots,1}^{i-1\text{ 個}}]$，其中 $1 \leq i \leq n-1$, i∈N, n∈N

旋轉後，這兩種局面可視為同一種

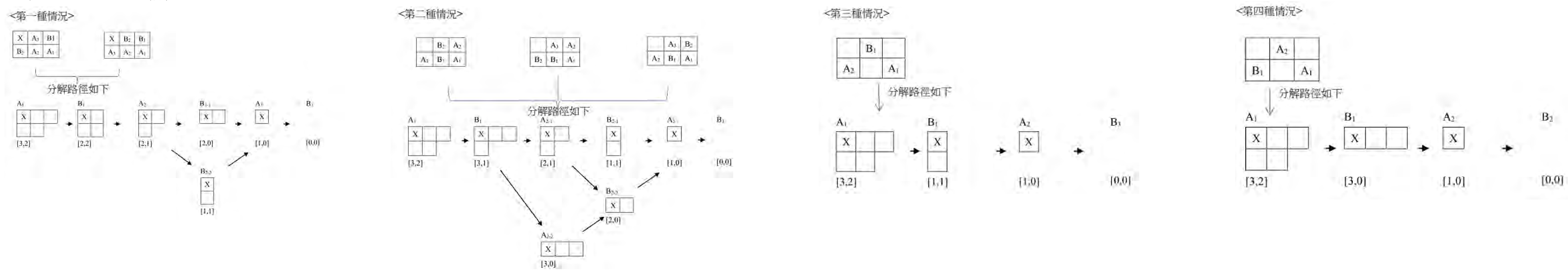
依照上述步驟如此反覆下去，最後剩下X方格必然為B所得，因此在有限的方格數中，贏家必然為先手

三、n×m矩形的研究

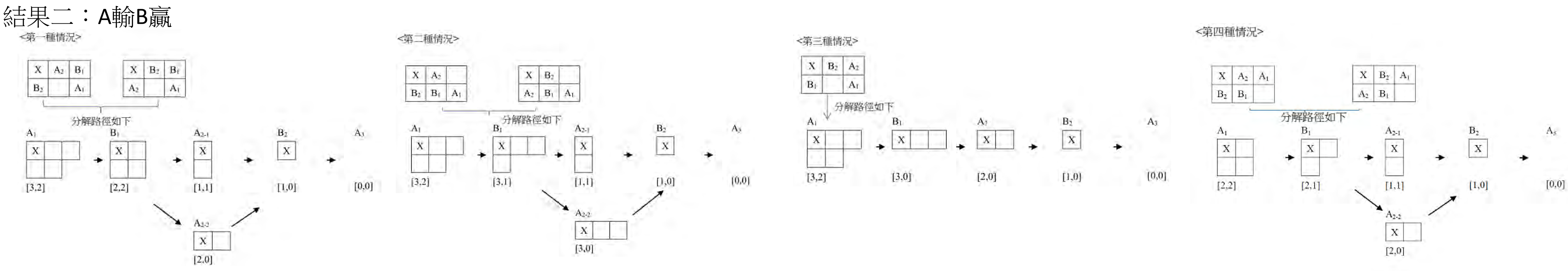
(一) 探索2×3矩形的必勝策略

假如雙方都不知必勝策略的情況，分成A贏B輸與A輸B贏的結果，討論雙方使用的策略。

結果一：A贏B輸



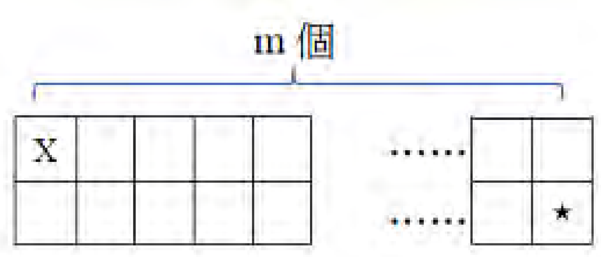
結果二：A輸B贏



由上8種情形可知，先手必勝策略的第一步是放第二列的最右邊的位置，使其變成[3,2]的局面，再變成[2,1]與[1,0]而最終獲得勝利

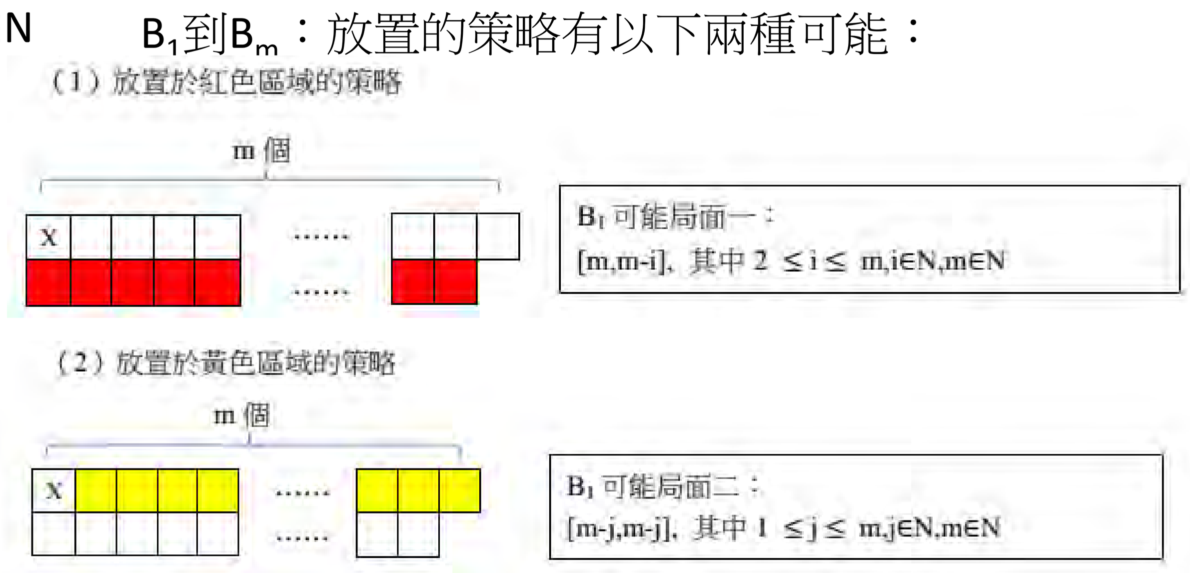
(二) 探索2×m矩形的必勝策略

A_1：放置★的位置，形成局面為[m, m-1], m∈N

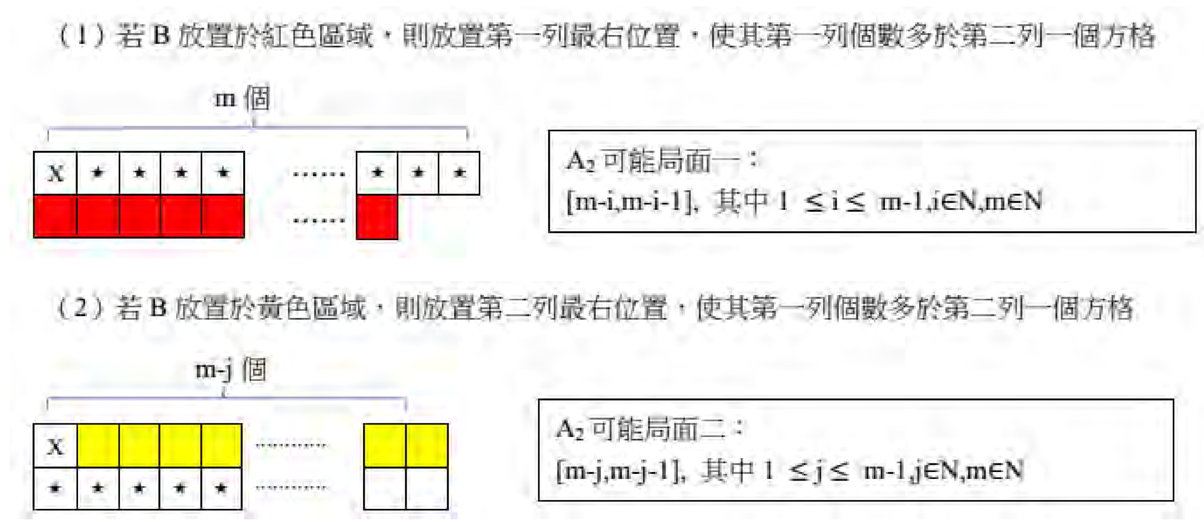


先手必勝策略的第一步是放第二列的最右邊的位置，使其變成[m,m-1]的局面，持續此局面變成[1,0]而最終獲得勝利

B_1到B_m：放置的策略有以下兩種可能：



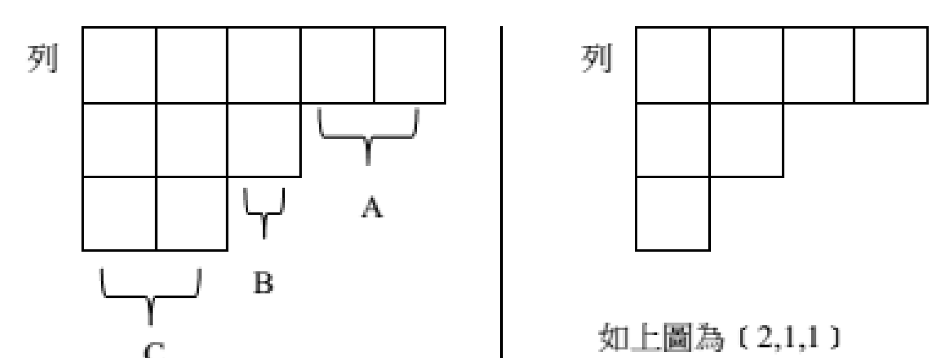
A_2到A_m：跟B所放置對角線位置的策略



(三) 探索3×m矩形的必勝策略

為了獲得最後的勝利，3×m矩形中，先手必勝的方格排列需要以[A,B,C]的型式代表每一列方格的數目

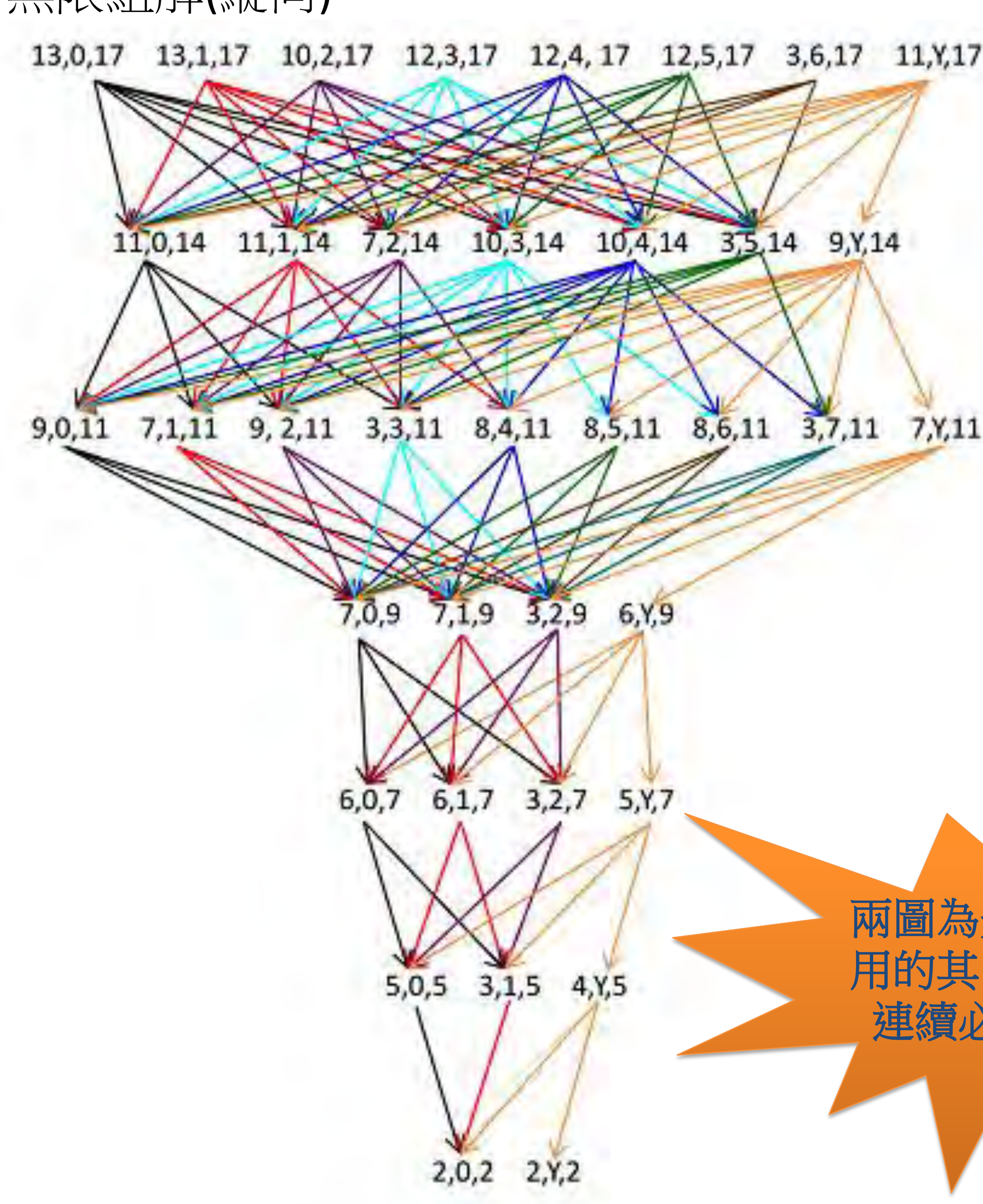
A 代表第一列減第二列方格數
B 代表第二列減第三列方格數
C 代表第三列方格數
[A,B,C]表示每個圖方格數



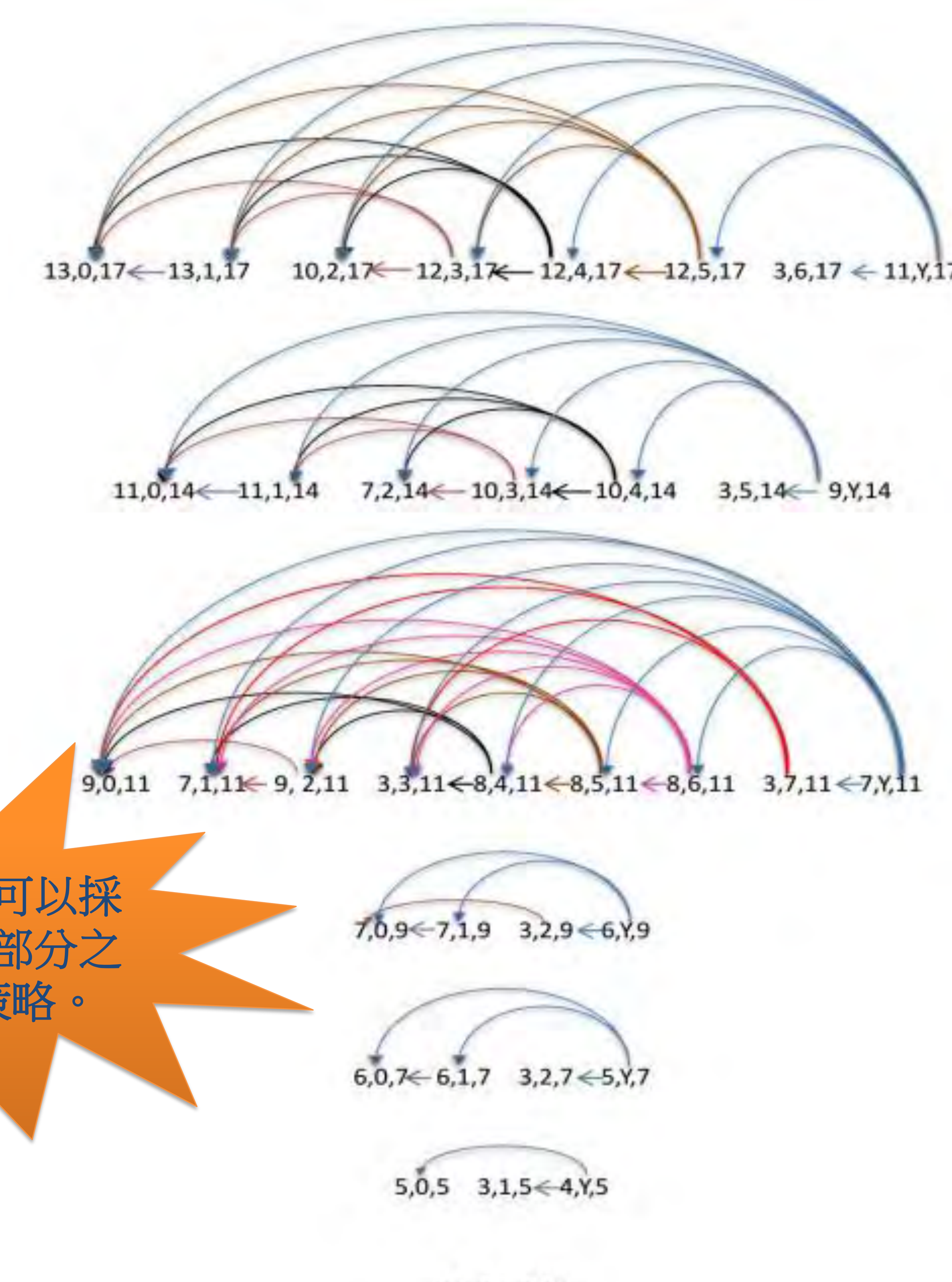
3×m矩形中先手的必勝策略（無記號－有限組解；有★記號－無限組解）

C	先手必勝的方格排列[A,B,C]
1	[2,0,1]、[0,1,1]
2★	[2,0,2]、[2,Y,2] ,Y∈ N
3	[3,0,3]、[3,1,3]、[0,2,3]
4	[4,0,4]、[4,1,4]、[4,2,4]、[0,3,4]
5★	[5,0,5]、[3,1,5]、[4,Y,5] ,Y∈ N 且Y≥2
6	[5,0,6]、[5,1,6]、[5,2,6]、[0,3,6]
7★	[6,0,7]、[6,1,7]、[3,2,7]、[5,Y,7] ,Y≥3 且 Y∈ N
8	[7,0,8]、[5,1,8]、[6,2,8]、[6,3,8]、[0,4,8]
9★	[7,0,9]、[7,1,9]、[3,2,9]、[6,Y,9] ,Y≥3 且 Y∈ N
10	[8,0,10]、[8,1,10]、[8,2,10]、[8,3,10]、[0,4,10]
11★	[9,0,11]、[7,1,11]、[9,2,11]、[3,3,11]、[9,4,11]、[8,5,11]、[8,6,11]、[3,7,11]、[7,Y,11] ,Y≥8 且 Y∈ N
12	[9,0,12]、[10,1,12]、[8,2,12]、[9,3,12]、[3,4,12]、[0,5,12]
13	[11,0,13]、[9,1,13]、[7,2,13]、[9,3,13]、[9,4,13]、[9,5,13]、[0,6,13]
14★	[11,0,14]、[11,1,14]、[7,2,14]、[10,3,14]、[10,4,14]、[3,5,14]、[9,Y,14] ,Y≥6 且 Y∈ N
15	[12,0,15]、[10,1,15]、[11,2,15]、[11,3,15]、[3,5,15]、[10,6,15]、[0,7,15]
16	[12,0,16]、[12,1,16]、[8,2,16]、[12,3,16]、[10,4,16]、[11,5,16]、[11,6,16]、[0,7,16]
17★	[13,0,17]、[13,1,17]、[10,2,17]、[12,3,17]、[12,4,17]、[12,5,17]、[3,6,17]、[11,Y,17] ,Y≥7 且 Y∈ N
18	[14,0,18]、[14,1,18]、[11,2,18]、[8,3,18]、[13,4,18]、[11,5,18]、[12,6,18]、[12,7,18]、[0,8,18]
19★	[15,0,19]、[13,1,19]、[14,2,19]、[14,3,19]、[8,4,19]、[13,5,19]、[13,6,19]、[3,7,19]、[12,Y,19] ,Y≥8 且 Y∈ N
20	[15,0,20]、[15,1,20]、[15,2,20]、[10,3,20]、[14,4,20]、[14,5,20]、[14,6,20]、[14,7,20]、[3,8,20]、[0,9,20]
21	[16,0,21]、[16,1,21]、[13,2,21]、[15,3,21]、[8,4,21]、[15,5,21]、[13,6,21]、[14,7,21]、[14,8,21]、[14,9,21]、[0,10,21]
22★	[17,0,22]、[15,1,22]、[16,2,22]、[16,3,22]、[10,4,22]、[15,5,22]、[15,6,22]、[15,7,22]、[3,8,22]、[14,Y,22] ,Y≥9 且 Y∈ N
23	[17,0,23]、[17,1,23]、[17,2,23]、[12,3,23]、[18,4,23]、[8,5,23]、[16,6,23]、[16,7,23]、[13,8,23]、[15,9,23]、[0,10,23]
24★	[18,0,24]、[18,1,24]、[18,2,24]、[18,3,24]、[10,4,24]、[17,5,24]、[17,6,24]、[10,7,24]、[16,8,24]、[3,9,24]、[15,Y,24] ,Y≥10 且 Y∈ N
25	[19,0,25]、[17,1,25]、[19,2,25]、[13,3,25]、[18,4,25]、[8,5,25]、[17,6,25]、[13,7,25]、[16,8,25]、[16,9,25]、[16,10,25]、[0,11,25]

無限組解(縱向)



無限組解(橫向)



兩圖為先手可以採用的其中一部分之連續必勝策略。

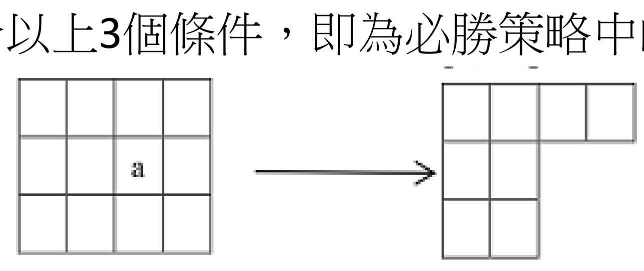
判斷3×m矩形中先手的第一步，利用上表判斷第一步的條件，如下:

C＜m

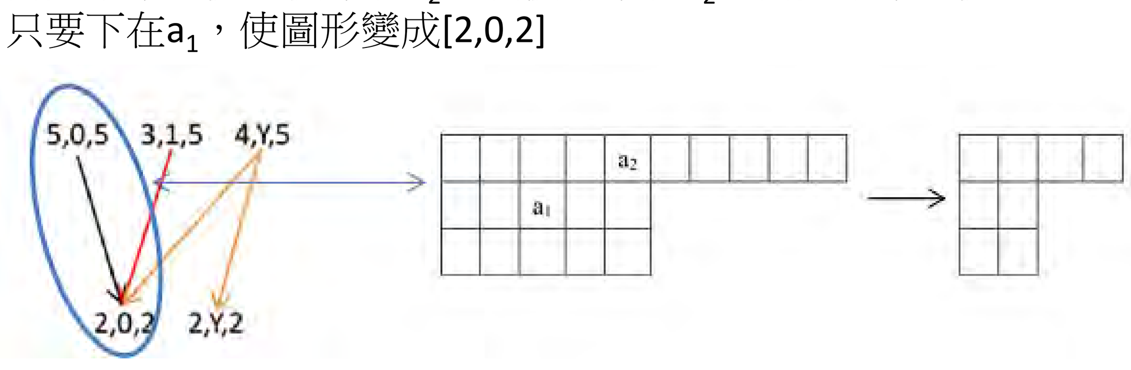
A+B+C=m

A=0或B=0

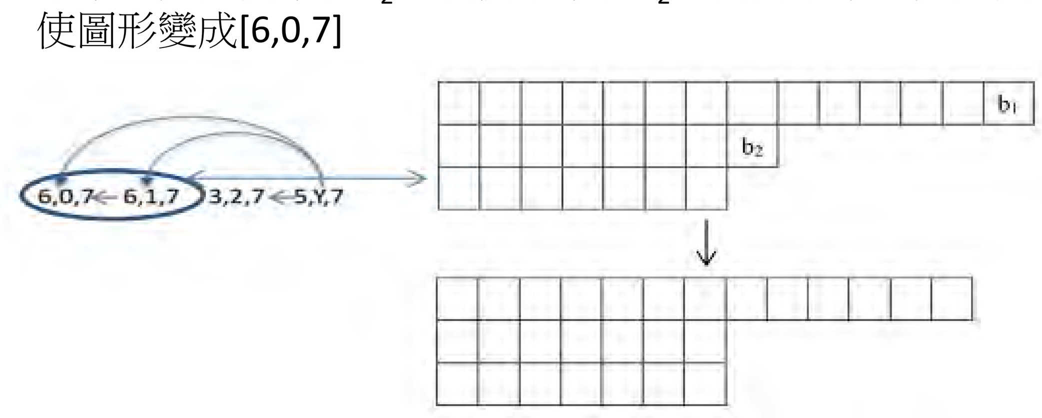
符合以上3個條件，即為必勝策略中的第一步。



以上圖先手下完剩於方格數[5,0,5]為例，接著後手下在a_1，而先手下一步只要下在a_2，或後手下在a_2，而先手下一步只要下在a_1，使圖形變成[2,0,2]



以上圖先手下完剩於方格數[6,1,7]為例，接著後手下在b_1，而先手下一步只要下在b_2，或後手下在b_2，而先手下一步只要下在b_1，使圖形變成[6,0,7]



3×m矩形中先手的必勝策略，依照第三列方格不同的數量，可歸類各種必勝策略的局面。若先手要贏得最後勝利，除了第一步要形成必勝策略的局面外，無論後手形成何種局面，先手必須要找到下一步的必勝策略局面，直到獲勝為止

(四) 探索n×m矩形的必勝策略

未翻轉	翻轉 90 度	未翻轉	翻轉 90 度
[2,1]	[2,1]	[3,1,1]	[3,1,1]
[3,2]	[2,2,1]	[4,2,2]	[3,3,1,1]
[4,3]	[2,2,2,1]	[5,3,2]	[3,3,2,1,1]
⋮	⋮	⋮	⋮

在這裡發現，翻轉90度後無論會有多少列，其最後一列的方格數必定為1。因此能用右方的式子來表示：

$$x=\begin{cases}\left\lfloor\frac{2a+b}{2}\right\rfloor & \text{if } a+b \text{ 為偶數}\\ \min\left\{\left\lfloor\frac{2a-b}{2}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{3(a-b)}{2}\right\rfloor\right\} & \text{if } a+b \text{ 為奇數}\end{cases}$$

其中 x 代表列數，a 代表第一列方格數，b 代表第二列方格數，剩下列數方格數皆為 1。

如果中間方格數出現2的情形，可以以下的式子來表示：

$$x=\begin{cases}1 & \text{if } a=1\\ 2 & \text{if } a=b+1\\ \left\lfloor\frac{2a+b}{2}\right\rfloor & \text{if } a+b \text{ 為奇數且} a\neq b+1\\ \left\lfloor\frac{3a}{2}\right\rfloor+1 & \text{if } a=b\\ \min\left\{\left\lfloor\frac{2a-b}{2}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{3(a-b)}{2}\right\rfloor\right\} & \text{if } a+b \text{ 為偶數且} a\neq b\end{cases}$$

其中 x 代表列數，a 代表第一列的方格數，b 代表第二列的方格數，第三列的方格數為2，剩下的列數方格數皆為 1。

陸、討論

一、推論該局面是否為必勝策略局面

為了方便之後的討論，我們要先定義兩個函數，分別為mex函數和Grundy函數。首先定義mex函數。設集合S中所有元素皆為非負整數，令mex函數為不在集合S中的最小非負整數，即:

$$\operatorname{mex}\{S\} = \min\{Z^+_0 - S\}$$

其中 $Z_0^+ = N \cup \{0\}$，接下來定義Grundy函數。令T_i為下完第i局後所得圖形 $D_i = \{T_{i+1,1}, T_{i+1,2}, \cdots, T_{i+1,\alpha_i}\}$ 為T_{i+1}之所有可能情形所成的集合（假設有 α_i 種可能）。Grundy函數 $G : \bigcup_i D_i \to Z_0^+$ 定義為

$$G(T_i) = \operatorname{mex}\{G(T_{i+1,1}), G(T_{i+1,2}), \cdots, G(T_{i+1,\alpha_i})\}$$

最後一個選取的方格☒，因為沒有其他可能的局面，因此Grundy數定義為0，即G(☒)=0。接著分以下情況來探討：

(一)如果剩下兩個方格，無論是水平或垂直排列，只有一個可能局面:
☒□可以變成☒，所以 G(☒□) = G(☒ □) = mex{G(☒)}= mex{0}=1

(二)如果剩下三個方格，則可能有兩種情況:

☒□□可以變成☒□或☒，所以 G(☒□□)=G(☒ □ □)= mex{G(☒□),G(☒)}= mex{1,0}=2

☒□ □可以變成☒□或 ☒ □，所以 G(☒□ □) =mex{G(☒□),G(☒ □)} = mex{1,1}=0

(三)如果剩下四個方格，則可能有三種情況：

☒□□□可以變成☒□□或☒□或☒，所以 G(☒□□□)=G(☒ □ □ □)= mex{ G(☒),G(☒□),G(☒□□) }
= mex{0,1,2}=3

☒□□ □可以變成☒□□或 ☒□ □ 或 ☒ □，所以 G(☒□□ □) =G(☒□ □ □)

= mex｛G(☒□ □),G(☒ □),G(☒□□)｝= mex｛0,1,2｝=3

☒□ □□ 可以變成 ☒□ □ 或 ☒ □ 或 ☒□，所以 G(☒□ □□)= mex｛G(☒□ □),G(☒ □),G(☒□)｝

= mex｛0,1,1｝=2

(四)如果剩下五個方格，則可能有四種情況：
☒□□□□可以變成☒□□□或☒□□或☒□或☒，
所以 G(☒□□□□)= mex｛G(☒),G(☒□),G(☒□□),G(☒□□□)｝= mex｛0,1,2,3｝=4

☒□□□ □可以變成☒□□□或 ☒□□ □ 或 ☒□ □ 或 ☒ □，

所以 G(☒□□□ □)= mex｛G(☒□ □),G(☒ □),G(☒□□ □),G(☒□□□)｝= mex｛0,1,3,3｝=2，

☒□□ □□ 可以變成 ☒□ □□ 或 ☒□□ □ 或 ☒□□ 或 ☒ □，

所以 G(☒□□ □□)= ｛G(☒ □),G(☒□□),G(☒□ □□),G(☒□□ □)｝= mex｛1,2,3,3｝=0，

☒□□ □ □可以變成 ☒□□ □ 或 ☒□□，所以 G(☒□□ □ □) = ｛G(☒□□),G(☒□□ □)｝

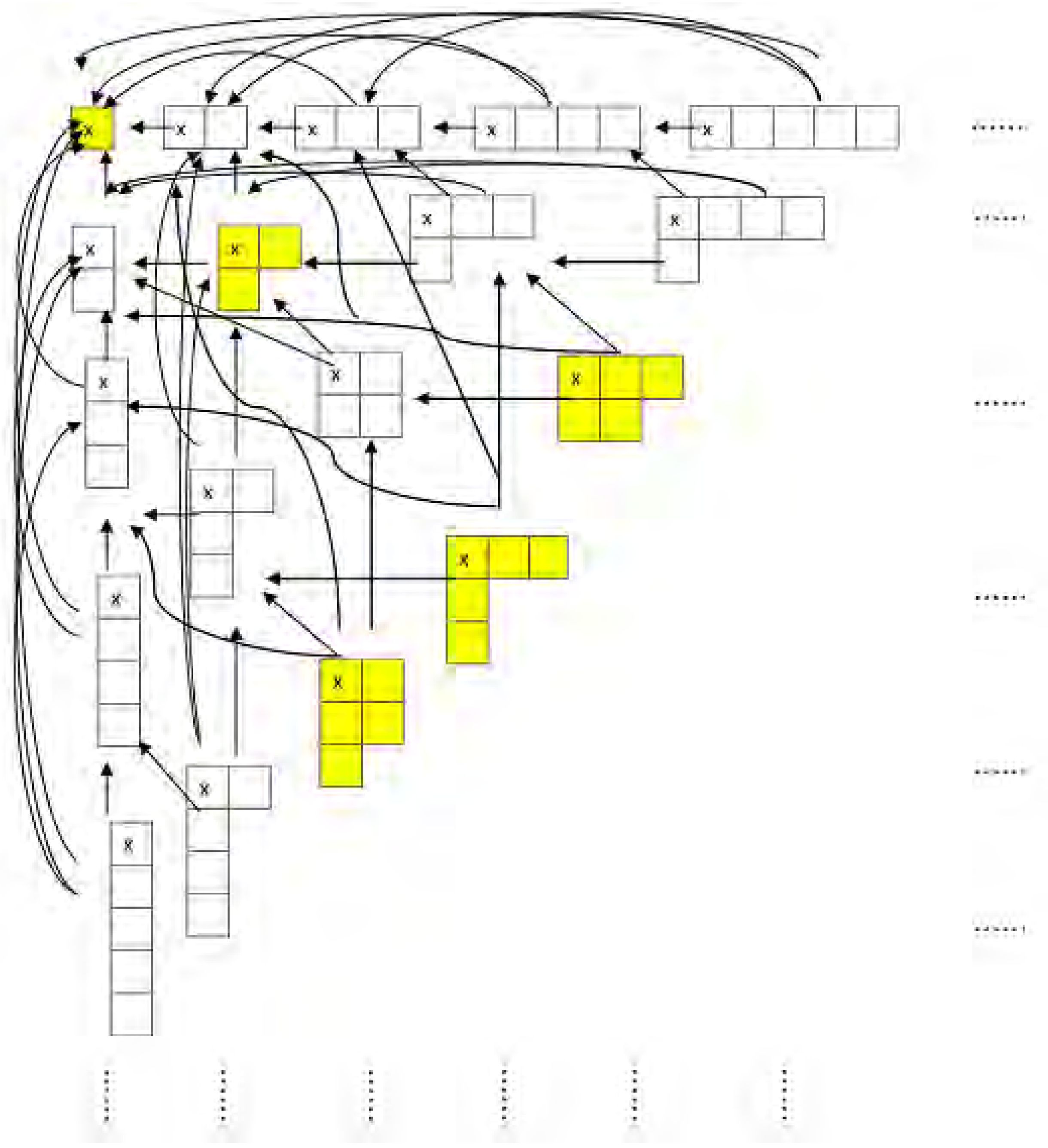
= mex｛2,3｝=0

（五）各種剩下方格數與 Grundy 數

將剩下方格數以「行」為單位表示，如 ☒□□ □ 表示成(2,1,1)，並且顯示其 Grundy 數，如下表所示。Grundy 數為零代表必勝局面，Grundy 數不為零代表必敗局面。

Grundy 數 \ 剩下格數	1	2	3	4	5	6	
0	G(1)		G(2,1)		G(2,2,1) G(3,2,0) G(3,1,1)		....
1		G(1,1) G(2,0)				G(3,1,1,1) G(4,1,1,0) G(3,2,1)	....
2			G(1,1,1) G(3,0,0)	G(2,2)	G(2,1,1,1) G(4,1,0,0)		....
3				G(1,1,1,1) G(4,0,0,0) G(2,1,1) G(3,1,0)			....
4					G(1,1,1,1,1) G(5,0,0,0,0)	G(2,1,1,1,1) G(5,1,0,0,0) G(2,2,1,1) G(4,2,0,0) G(2,2,2) G(3,3,0)	....
5						G(1,1,1,1,1,1) G(6,0,0,0,0,0)	....
.	.	.	.	.	.	.	

二、討論Grundy數與必勝策略的關係



柒、結論

一、是否存在必勝策略的研究

（一）先手或後手存在必勝策略。
（二）如果存在必勝策略，先手必定獲勝。

二、nxn矩形必勝策略的研究

（一）2x2矩形中，先手必勝策略是第一步要放對角線的位置，如果沒有放在對角線位置，則變成後手會贏的局面。
（二）3x3矩形與nxn矩形中，先手的必勝策略是第一步要放最接近X的對角線位置上，接著使用對稱的策略，放置跟後手所放置的相對位置，最後就能夠獲得勝利。

三、nxm矩形必勝策略的研究

（一）2x3矩形中，先手必勝策略的第一步是放第二列的最右邊的位置，使其變成[3,2]的局面，再變成[2,1]與[1,0]而最終獲得勝利。
（二）2xm矩形中，先手必勝策略的第一步是放第二列的最右邊的位置，使其變成[m,m-1]的局面，持續此局面變成[1,0]而最終獲得勝利。如果先手下錯了，後手只要讓局面變成[m,m-1]的局面就會贏得勝利。
（三）3xm矩形中，先手的必勝策略，依照第三列方格不同的數量，可歸類各種必勝策略的局面。若先手要贏得最後勝利，除了第一步要形成必勝策略的局面外，無論後手形成何種局面，先手必須要找到下一步的必勝策略局面，直到獲勝為止。
（四）nxm矩形中，其一般化的式子如下：

$$x = \begin{cases} \left\lfloor \frac{2a+b}{2} \right\rfloor & \text{if } a+b \text{ 為偶數} \\ \min\left\{\left\lceil \frac{2a-b}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{3(a-b)}{2} \right\rceil\right\} & \text{if } a+b \text{ 為奇數} \end{cases}$$

x代表列數，a代表第一列方格數，b代表第二列方格數，剩下列數方格數皆為1

如果中間方格數出現2的情形，可以以下的式子來表示：

$$x = \begin{cases} 1 & \text{if } a = 1 \\ 2 & \text{if } a = b+1 \\ \left\lfloor \frac{2a+b}{2} \right\rfloor & \text{if } a+b \text{ 為奇數且} a \neq b+1 \\ \left\lfloor \frac{3a}{2} \right\rfloor + 1 & \text{if } a = b \\ \min\left\{\left\lceil \frac{2a-b}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{3(a-b)}{2} \right\rceil\right\} & \text{if } a+b \text{ 為偶數且} a \neq b \end{cases}$$

x 代表列數，a 代表第一列的方格數，b 代表第二列的方格數，第三列的方格數為2，剩下的列數方格數皆為1。

四、推論該局面是否為必勝策略局面

（一）可以利用Grundy數來推論該局面是否為必勝策略局面。Grundy數為零代表必勝局面，Grundy數不為零代表必敗局面。
（二）若先手先下的位置讓Grundy數為零，則為必勝局面，若先手先下的位置讓Grundy數不為零，並且如果對手知道每一步的必勝策略，則為必敗的局面。若對手不知道每一步的必勝局面，則需要搶先一步拿到Grundy數為零的局面，接著每一步都使用必勝策略，最後才能獲得勝利。

捌、參考資料

許介彥（2006）。唯一的可能。*數學新天地*，13，17-20。
Gale, D. (1974). A curious Nim-type game. *The American Mathematical Monthly*, *81*(8), 876-879. Zeilberger, D. (2001). Three-rowed chomp. *Advances in Applied Mathematics*, *26*(2), 168-179.