中華民國第57屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

最佳團隊合作獎

030418

以比例探討四邊形面積等量三角化

學校名稱：彰化縣立彰泰國民中學

作者：	指導老師：
國三 吳宥蓁 國三 蕭宇承 國一 陳毓修	陳曉煒 林政瑋

關鍵詞：n 切等分點、等分三角形

摘要

研究目的有三：（一）探討平行四邊形 n 切等分點的數量。（二）探討梯形 n 切等分點的數量。（三）探討任意凸四邊形 n 切等分點的數量。結果如下：

（一）平行四邊形之 $2n$ 切等分點共有 $(n+1)^2$ 個，

（二）若將梯形切成 n 等分三角形，則令上下兩塊三角形共可切成 $(\alpha_i+\beta_i)$ 塊，並利用梯形之性質代入後求出其 n 切等分點為 $\sum_{i=1}^{k}(n-\alpha_i-\beta_i+1)$ 個。

（三）若將任意凸四邊形 $ABCD$ 切成 n 等分三角形，則將頂點坐標化並分三種情形：

1. 若 X 點在四邊形內部時，即 $p+q+r+s=n$，其中 $p,q,r,s\in\mathbb{N}$，若交點 (x_1,y_1) 與 (x_2,y_2) 相同，則比例成立；

2. 若 X 點在頂點上時，即 $\overleftrightarrow{AE}=\overleftrightarrow{CG}$ 或 $\overleftrightarrow{BF}=\overleftrightarrow{DH}$，由克拉瑪公式可知，若 $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$，則比例成立；

3. 若 X 點在邊上時，即 $q+s+r=n$、$p+q+s=n$、$p+q+r=n$、$p+r+s=n$，其中 $p,q,r,s\in\mathbb{N}$，由三點共線可知，若行列式為 0 時比例成立。

壹、研究動機

在二年級下學期 4-2 平行四邊形單元中，老師在課堂上出了一個題目：「如圖 1-1，若三角形 AED 的面積為 16，請問平行四邊形 $ABCD$ 面積為多少？」此題老師利用平行四邊形的性質：「兩條對角線可切成四個面積相同的三角形」解出平行四邊形 $ABCD$ 面積為 64。此時，我們對平行四邊形可以分成四塊等面積三角形感到有趣，這樣的點只有一個嗎？可不可以切成其他等分呢？其他的四邊形是否也會有這樣的點呢？

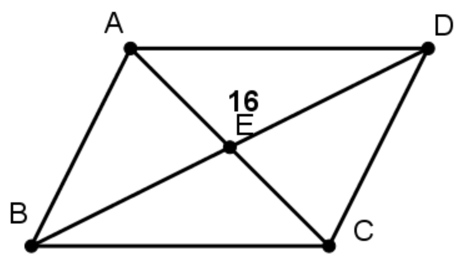


圖 1-1

貳、名詞釋義

一、n 切等分點：四邊形內部、頂點或邊上一點 X，將點 X 與邊上 n 個點連線可將四邊形等分成 n 個等分三角形。

二、等分三角形：面積相等的三角形。

參、研究目的

一、探討平行四邊形 n 切等分點的數量。

二、探討梯形 n 切等分點的數量。

三、探討任意凸四邊形 n 切等分點的數量。

肆、研究設備及器材

紙、筆、電腦、Microsoft Word、Microsoft Excel、圖書館、書籍文獻

伍、研究過程或方法

一、探討平行四邊形 n 切等分點的數量。

（一） 彙整相關文獻

首先，我們得先確定平行四邊形中是否一定存在一個點可將其切成等面積三角形，在請問老師後，我們知道三角形是幾何圖形中最基本的圖形，任何多邊形皆可由三角形組成，因此將平行四邊形分割成數塊三角形是可行的；若可將平行四邊形分成數塊三角形，那必能再將數塊三角形切為等面積三角形。

在確定平行四邊形內存在一點可切成等面積三角形後，本文定義此點為 **n 切等分點**並進一步搜尋相關文獻。在《點分天下》一文中，主要討論的是：在三角形和四邊形內部中找到一點 P，使得 P 連接到各邊上給定的點後即可等分面積，在文中利用向量來解決四邊形中的面積等分點問題，但是此文所切出的等分面積不一定是三角形，與我們所想討論的問題不同，因此我們進一步搜尋。

在《無限的分割－射線分割點》一文中定義：在正方形內部的一點 X，如果以點 X 為起點，畫出 n 條射線可將正方形分割成 n 個等面積的三角形，則稱點 X 為「n-射線分割點」，此 n-射線分割點和四個頂點連線，可以分割出上下左右四塊三角形，因為上下兩塊三角形的和與左右兩塊三角形的和相同，因此必可將正方形分為 $2k$ 等分，其中正方形裡的 $2k$-射線分割點有 $(k-1)^2$ 個。

雖然《無限的分割－射線分割點》一文中只討論了正方形與正六邊形，但是其方法給了我們靈感，因此本文以《無限的分割－射線分割點》一文中的概念來進行推論，以此計算平行四邊形分成 n 塊等面積三角形的 n 切等分點之數量。

（二）利用比例求平行四邊形中 n 切等分點的數量。

由《無限的分割－射線分割點》一文可知，在正方形內部可以找到一點 X，將 X 與四個頂點連線後，可以將正方形切成上下左右四塊三角形，其中上下兩塊面積和與左右兩塊面積和相同，因此若將上下兩塊三角形切成等面積三角形；左右兩塊三角形也切成等面積三角形，則可將正方形平分成面積相等的三角形，如圖 5-1

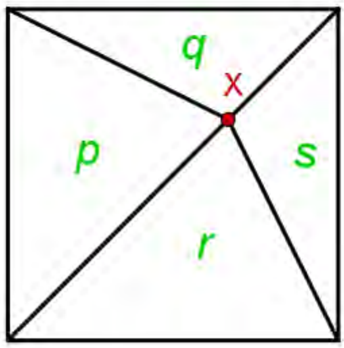


圖 5-1

由上圖可知，三角形面積 p、s 之和與 q、r 之和相同，因此若由點 X 畫出射線將 p 和 s 共切成 m 塊等面積三角形，則必可畫出等量射線將 q 和 r 共切成 m 塊等面積三角形，則可將正方形平分成 $2m$ 塊等面積三角形且 $2m$ 必為偶數。

以此進一步推論，若有一線段 $\overline{AB}$ 平行正方形的上下兩邊，且與兩邊的距離比為整數比 $a:b$ ，則此線段上任意一點 X 皆可將上下兩塊三角形平分成 $a+b$ 塊面積相等的小三角形，如圖 5-2

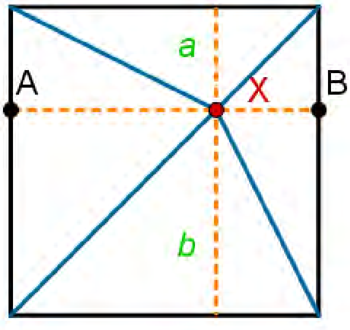


圖 5-2

又因為上下三角形面積和與左右三角形面積和相同，因此也能將左右兩塊三角形平分成 $a+b$ 塊面積相等的小三角形。由此可知，若要找能將正方形切成 $2n$ 塊等面積三角形的點，則上下與左右各要切成 n 塊三角形，其中上下三角形可能切成的比例有 $n+1$ 種；左右三角形可能切成的比例是 $n+1$ 種，因此正方形 $2n$ 切等分點共有 $(n+1)^2$ 個。

由前述可知，正方形其性質是因為上下兩塊三角形的面積和與其左右兩塊三角形面積和相同，所以只要能找到特定的比例就能找到正方形的等分點。以此概念代入有相同性質的平行四邊形，如圖 5-3

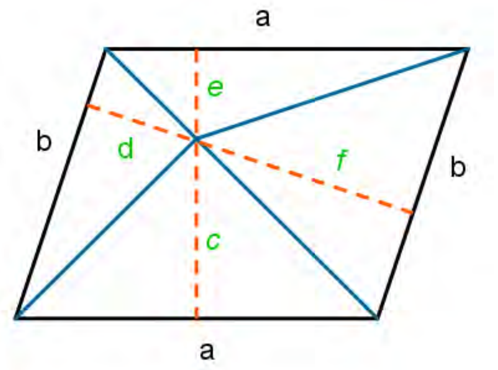


圖 5-3

由上圖可知，上下兩塊三角形面積比為 $\frac{ae}{2}:\frac{ac}{2}$；左右兩塊三角形面積比為 $\frac{bd}{2}:\frac{bf}{2}$，且 $\frac{ae}{2}+\frac{ac}{2}=\frac{bd}{2}+\frac{bf}{2}$，則可推出

$\frac{bd}{2}:\frac{ae}{2}:\frac{ac}{2}:\frac{bf}{2}=p:q:r:s$，其中 p,q,r,s 為非負整數，並推出

$$\frac{p+s}{p+q+r+s}=\frac{q+r}{p+q+r+s}=\frac{1}{2}，$$

因此平行四邊形必可切成 2 的倍數塊等面積三角形。所以若要將平行四邊形切成 $2n$ 等分，則令 $p+s=n$，$q+r=n$，則 $p:s$ 共有 $n+1$ 種可能；$q:r$ 也有 $n+1$ 種可能，由此可推出平行四邊形 $2n$ 切等分點共有 $(n+1)^2$ 個。

將此結論代入實際例子中，以下討論平行四邊形中等分點的數量：

1. 若要找能將平行四邊形切成 6 塊等面積三角形的點，則上下與左右各要切成 3 塊三角形，則點的可能位置可能在**頂點、邊上或內部**，因此比例有上:下 = 0:3、

上:下＝1:2、上:下＝2:1、上:下＝3:0；左:右＝0:3、左:右＝1:2、左:右＝2:1、左:右＝3:0，此時**比例出現 0 是因為點在邊上或頂點，與一般比例式後項不可為 0 不同**，因此平行四邊形 6 切等分點共有 4×4=16 個，如圖 5-4。

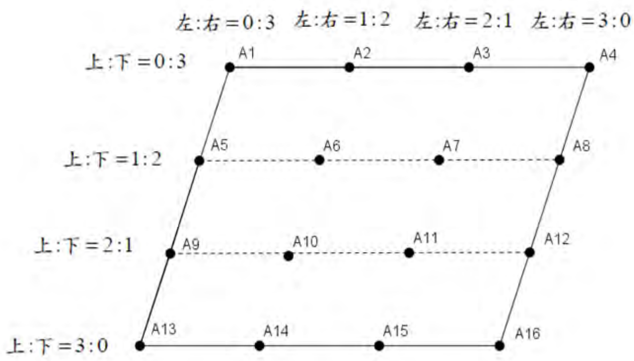


圖 5-4

點落在邊上的情形如圖 5-5，點落在頂點上的情形如圖 5-6

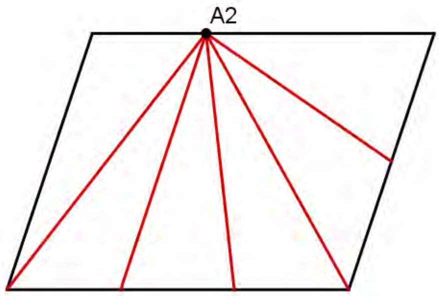


圖 5-5

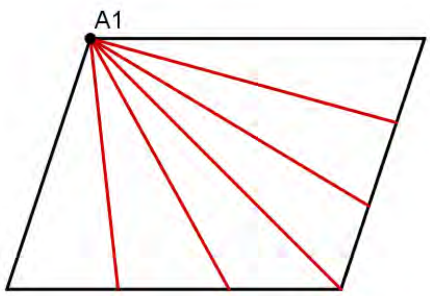


圖 5-6

點落在內部上的情形如圖 5-7

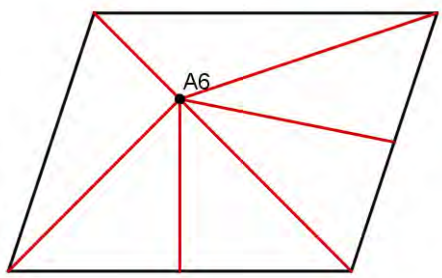


圖 5-7

2. 若要找能將平行四邊形切成 8 塊等面積三角形的點，則上下與左右各要切成 4 塊三角形，可能的比例有上:下＝0:4、上:下＝1:3、上:下＝2:2、上:下＝3:1、上:下＝4:0；左:右＝0:4、左:右＝1:3、左:右＝2:2、左:右＝3:1、左:右＝4:0，

因此平行四邊形 8 切等分點共有 $5\times5=25$ 個，如圖 5-8

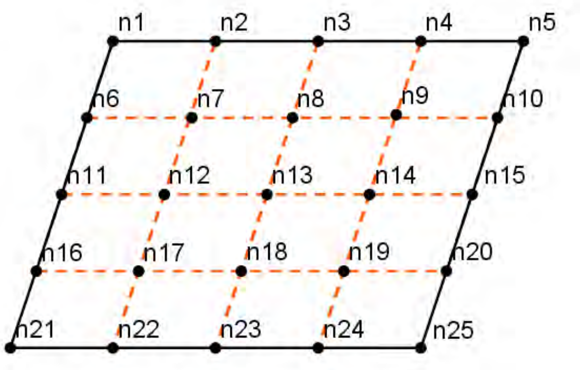


圖 5-8

二、探討梯形 n 切等分點的數量。

（一）利用比例將梯形切成等面積三角形。

前文中，我們利用平行四邊形中上下兩塊三角形的面積和與左右兩塊三角形面積和相同解出等分點數量，以同樣的想法，我們來求梯形中的等分點數量。由於梯形中並沒有上下三角形面積和與左右三角形面積和相同的性質，不過其上下底平行的性質代表圖形內也可以找到固定的比例，因此我們以上下底為基礎來進行討論，如圖 5-9

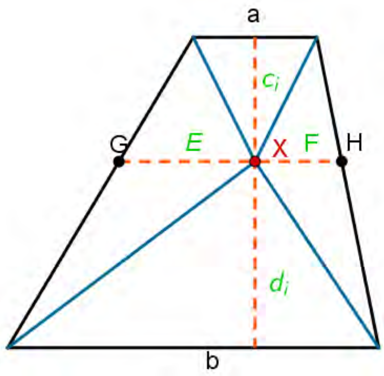


圖 5-9

做 $\overline{GH}$ 平行上下底，找到一動點 X 在 $\overline{GH}$ 上，則上下兩塊三角形面積分別為 $\frac{ac_i}{2}$ 和 $\frac{bd_i}{2}$，其中 $a\le b$，$c_i+d_i=h$ 為梯形的高。由此可知上下兩塊三角形面積占整塊梯形面積的範圍為

$$\frac{a(c_i+d_i)}{(a+b)(c_i+d_i)}\le\frac{ac_i+bd_i}{(a+b)(c_i+d_i)}\le\frac{b(c_i+d_i)}{(a+b)(c_i+d_i)}，$$

化簡為

$$\frac{a}{a+b}\le\frac{ac_i+bd_i}{(a+b)(c_i+d_i)}\le\frac{b}{a+b}\ ,$$

又令 $ac_i:bd_i=\alpha_i:\beta_i$ ，其中 α_i 和 β_i 為非負整數，以此推得

$(ac_i+bd_i):(a+b)(c_i+d_i)=(\alpha_i+\beta_i):n$ ，其中 $i=1,2,\cdots,k$ ，k 為滿足 c_i,d_i 之總數，代表若此梯形可切成 n 等分，其中上下兩塊三角形面積和共可切成 $(\alpha_i+\beta_i)$ 等分。

以此我們已經可以找出上下兩塊三角形面積的比，此時剩下左右兩塊三角形面積的部份。如圖 5-9，因為 X 為一個在 $\overline{GH}$ 上的動點，所以左右兩塊三角形面積比為 $E:F$，其中 E,F 可為任意非負整數，因此若上下兩塊三角形可以切成 $(\alpha_i+\beta_i)$ 塊，則左右兩塊三角形共可切成 $(n-\alpha_i-\beta_i)$ 塊。

（二）利用比例求梯形中 n 切等分點的數量。

此時我們有個疑問：若上下兩塊三角形面積和共可切成 p 塊，其上三角形面積與下三角形面積的比例有幾種？

若要將上下兩塊三角形切成 p 塊並將整塊梯形切成 n 塊，則上下兩塊三角形面積占整塊梯形面積的式子化簡為

$$\frac{ac_i+bd_i}{(a+b)(c_i+d_i)}\overset{\times l}{\underset{\times l}{=}}\frac{p}{n}$$ ，其中 $l\in\mathbb{Q}$ ，$i=1,2,\cdots,k$ ，k 為滿足 c_i,d_i 之總數，

可推得

$$ac_i+bd_i=\frac{p}{l}$$ ，又因為 $c_i+d_i=h$ ，

則可得二元一次聯立方程式

$$\begin{cases}ac_i+bd_i=\dfrac{p}{l}\\ c_i+d_i=h\end{cases}$$ ，其中 a,b,p,l,h 為已知數，$a\ne b$ ，

可得此二元一次聯立方程式之 (c_i,d_i) 只有一組解，因此將上下兩塊三角形面積切成 p 塊並將整塊梯形切成 n 塊時，其上下三角形面積比例只會有一種。

由此可知，若梯形中上下兩塊三角形可以切成 $(\alpha_i+\beta_i)$ 塊，左右兩塊三角形可

切成$\left(n-\alpha_i-\beta_i\right)$塊，則梯形內共有$\sum_{i=1}^{k}\left(n-\alpha_i-\beta_i+1\right)$個等分點。

將此結論代入實際例子中，以下討論梯形中等分點的數量：

例 1. 若要將一上底為 4、下底為 8、高為 6 之梯形切成 9 塊等面積三角形，將數值代入前述結論：

$$\frac{4}{4+8}\le\frac{4c_i+8d_i}{(4+8)\times 6}\le\frac{8}{4+8}\text{ ，}$$

$$\Rightarrow\frac{3}{9}\le\frac{\frac{4c_i+8d_i}{8}}{9}\le\frac{6}{9}\text{ ，}$$

$$\Rightarrow\frac{4c_i+8d_i}{8}=3,4,5,6\text{ ，}$$

$$\Rightarrow\frac{c_i}{2}+d_i=3,4,5,6\text{ 且 }c_i+d_i=6\text{ ，}$$

因此(c_i,d_i)的解為$(6,0),(4,2),(2,4),(0,6)$，將解與上下底代入檢查，推出$4c_i:8d_i=\alpha_i:\beta_i$且$\alpha_i+\beta_i=3,4,5,6$，求出$(\alpha_i,\beta_i)$為$(3,0),(2,2),(1,4),(0,6)$，代表$(c_i,d_i)$的解皆可成立，也就是是$\alpha_i+\beta_i=3,4,5,6$皆可成立，其中$\alpha_i$或$\beta_i$為 0 代表點落在頂點或邊上。則此梯形 9 切等分點共有$7+6+5+4=22$個，如圖 5-10

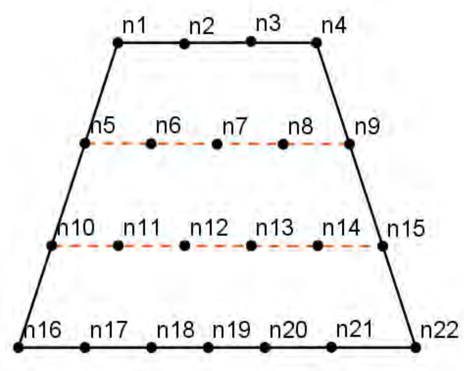


圖 5-10

點落在邊上的情形如圖 5-11，點落在頂點上的情形如圖 5-12

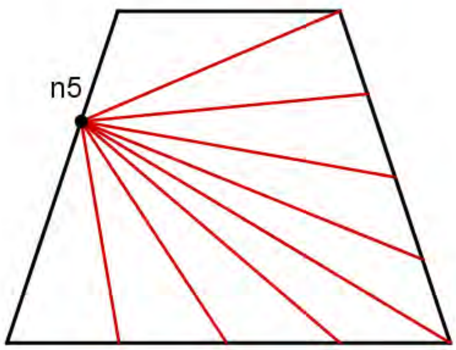


圖 5-11

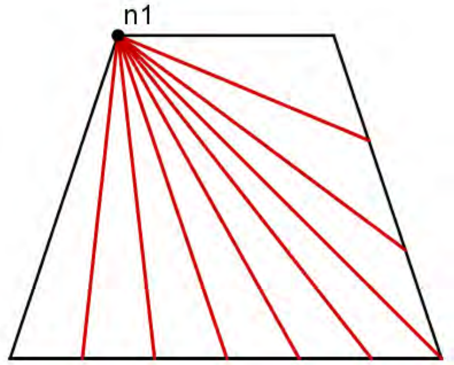


圖 5-12

點落在內部上的情形如圖 5-13

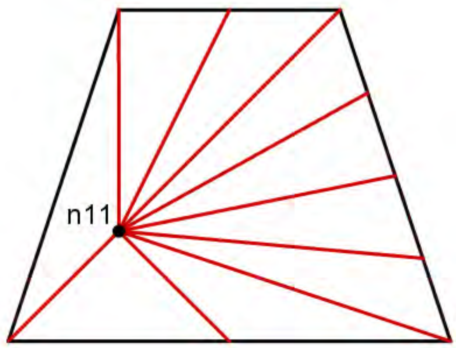


圖 5-13

例 2. 若要將一上底為 $\sqrt{3}$、下底為 $7\sqrt{3}$、高為 $4\sqrt{2}$ 之梯形切成 16 塊等面積三角形，將數值代入前述結論：

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+7\sqrt{3}} \le \frac{\sqrt{3}c_i+7\sqrt{3}d_i}{\left(\sqrt{3}+7\sqrt{3}\right)\times 4\sqrt{2}} \le \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{3}+7\sqrt{3}} \text{，}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{16} \le \frac{\frac{c_i+7d_i}{2\sqrt{2}}}{16} \le \frac{14}{16} \text{，}$$

$$\Rightarrow \frac{c_i+7d_i}{2\sqrt{2}} = 2,3,4,\cdots,14 \text{，}$$

$$\Rightarrow c_i+7d_i = 4\sqrt{2},6\sqrt{2},8\sqrt{2},\cdots,28\sqrt{2} \text{ 且 } c_i+d_i = 4\sqrt{2} \text{，}$$

因此 (c_i,d_i) 的解為 $\left(4\sqrt{2},0\right),\left(2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right),\left(0,4\sqrt{2}\right)$，將解與上下底代入後，

推出 $c_i:7d_i=\alpha_i:\beta_i$ 且 $\alpha_i+\beta_i=2,8,14$，求出 (α_i,β_i) 為 $(2,0),(1,7),(0,14)$，

代表(c_i, d_i)的解皆可成立，也就是$\alpha_i + \beta_i = 2,8,14$皆可成立，則此梯形 16 切等分點共有$15+9+3=27$個，如圖 5-14。

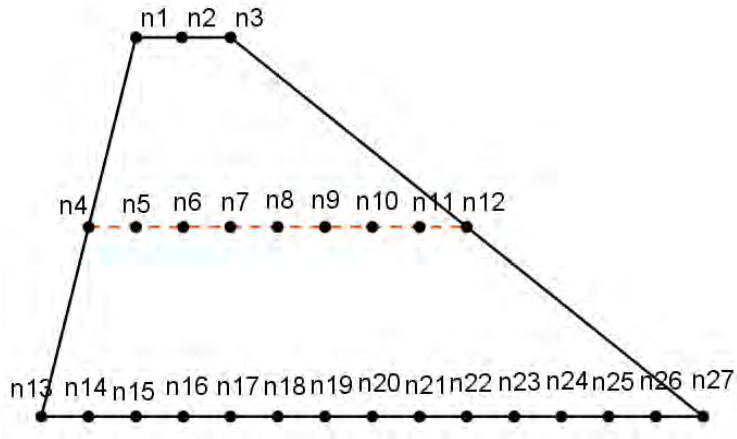


圖 5-14

三、探討任意凸四邊形n切等分點的數量。

(一) 利用比例將凸四邊形切成等面積三角形。

在利用比例的性質找到平行四邊形與梯形內等分點數量後，我們進一步想研究任意凸四邊形內等分點的數量，但是與平行四邊形和梯形不同的是，未出現平行的凸四邊形內部沒有可利用的性質。此時我們突發奇想，既然沒辦法從圖形中找到可以利用的比例性質，那為什麼我們不直接固定四邊形內三角形的比例後下去思考呢？**(本文所討論的為凸四邊形，以下所提之四邊形皆為凸四邊形)**如圖 5-15

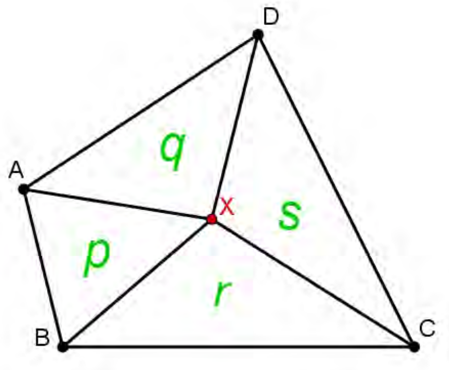


圖 5-15

在四邊形$ABCD$中，若要將其切成n塊等面積三角形，則我們假設內部一點X與$ABCD$四點連線後可將其分為四塊三角形，分別為ΔAXB、ΔAXD、ΔBXC、ΔCXD，其中$\Delta AXB : \Delta AXD : \Delta BXC : \Delta CXD = p:q:r:s$且$p+q+r+s=n$，$p,q,r,s$為非負整數。

以此想法來找 X 點的位置，分兩點來討論：

1. **當 X 點落在 $\overline{BD}$ 上時**，找出 X 點位置使 $\Delta AXB:\Delta AXD=p:q$ 且 $\Delta BXC:\Delta CXD=r:s$；

   此時我們觀察圖形可發現，ΔAXB 與 ΔAXD 等高且 ΔBXC 與 ΔCXD 也等高，若 $\overline{BD}$ 上一點 X 能同時滿足 $\overline{BX}:\overline{XD}=p:q=r:s$，則 $\Delta AXB:\Delta AXD=\overline{BX}:\overline{XD}=p:q$ 且 $\Delta BXC:\Delta CXD=\overline{BX}:\overline{XD}=r:s$，則代表此種比例切法成立，如圖 5-16。

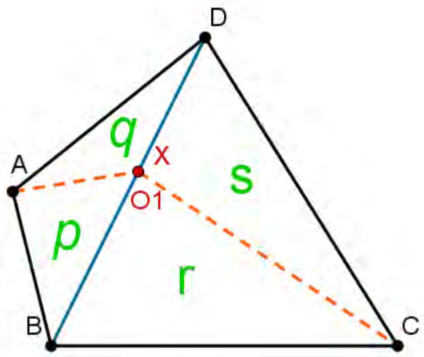


圖 5-16

2. **當 X 點落在 $\overline{BD}$ 上方**，找出 X 點位置使 $\Delta AXB:\Delta AXD=p:q$ 且 $\Delta BXC:\Delta CXD=r:s$；

   在 $\overline{BD}$ 上找一 O_1 點使得 $\overline{BO_1}:\overline{O_1D}=p:q$，連接 $\overline{AO_1}$ 且令 X_1 為 $\overline{AO_1}$ 上一動點，由前述 1 可知 ΔAO_1B 與 ΔAO_1D 等高且 ΔBX_1O_1 與 ΔDX_1O_1 也等高，則

   $$\Delta AO_1B:\Delta AO_1D=\overline{BO_1}:\overline{O_1D}=p:q \text{ 且 } \Delta BX_1O_1:\Delta DX_1O_1=\overline{BO_1}:\overline{O_1D}=p:q，$$

   以此可推得

   $$(\Delta AO_1B-\Delta BX_1O_1):(\Delta AO_1D-\Delta DX_1O_1)=\Delta AX_1B:\Delta AX_1D=\overline{BO_1}:\overline{O_1D}=p:q；$$

   同理在 $\overline{BD}$ 上找一 O_2 點使得 $\overline{BO_2}:\overline{O_2D}=r:s$，連接 $\overline{CO_2}$ 且令 X_2 為 $\overline{CO_2}$ 上一動點，則可得

   $$\Delta BO_2C:\Delta CO_2D=\overline{BO_2}:\overline{O_2D}=r:s \text{ 且 } \Delta BX_2O_2:\Delta DX_2O_2=\overline{BO_2}:\overline{O_2D}=r:s，$$

   以此可推得

   $$(\Delta BO_2C+\Delta BX_2O_2):(\Delta CO_2D+DX_2O_2)=\Delta BX_2C:\Delta CX_2D=\overline{BO_2}:\overline{O_2D}=r:s。$$

若 X_1 點與 X_2 點為同一點，則代表此種比例切法成立，如圖 5-17。

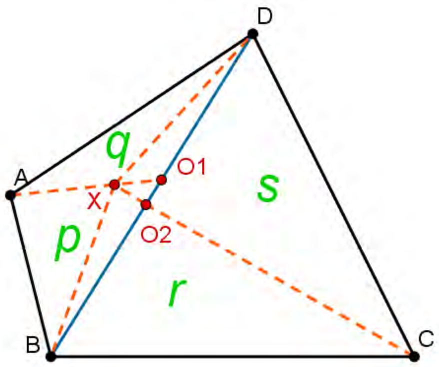


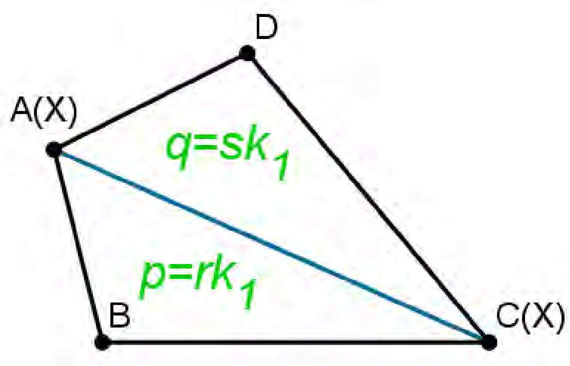
圖 5-17

綜合以上 2 點可知，若要利用比例找出任意四邊形內 n 切等分點的數量，則需先令 $p+q+r+s=n$， p,q,r,s 為非負整數，再以此比例一一代入驗證。

(二) 找出任意四邊形頂點與邊上之等分三角形求法。

處理完任意凸四邊形內部等分三角形比例後，我們進一步討論 X 點落在頂點與邊上時的比例問題，以下分別討論：

1. **當 X 點落在頂點上時**，代表四邊形只能切成上下兩塊三角形或是左右兩塊三角形，如圖 5-18、5-19



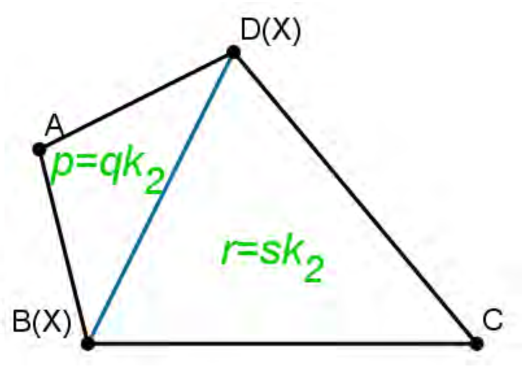


圖 5-18　　圖 5-19

因此我們只需確認當對角兩個頂點連線時，其比例是否與我們所要求的相同，即 $\Delta ABC:\Delta ADC=p:q=r:s$ 、 $\Delta ABD:\Delta BCD=p:r=q:s$ 。

2. **當 X 點落在邊上時**，代表四邊形只能切成三塊三角形，如圖 5-20、5-21、5-22、5-23

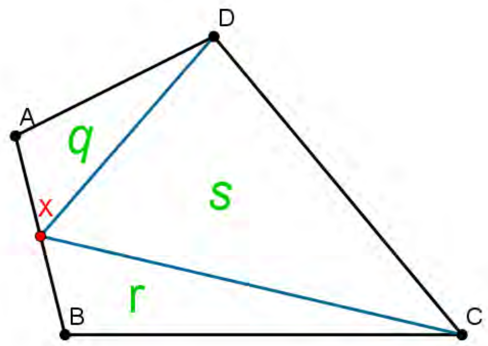


圖 5-20

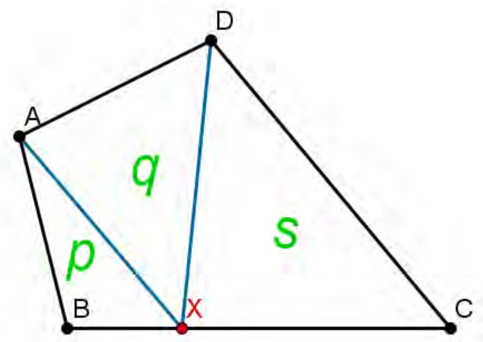


圖 5-21

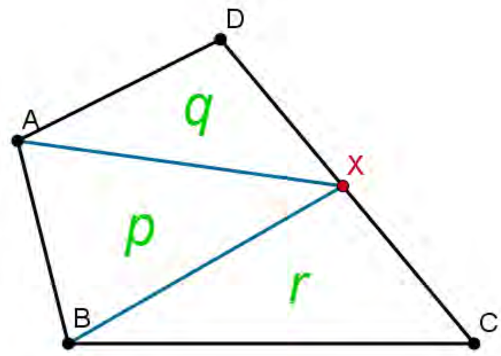


圖 5-22

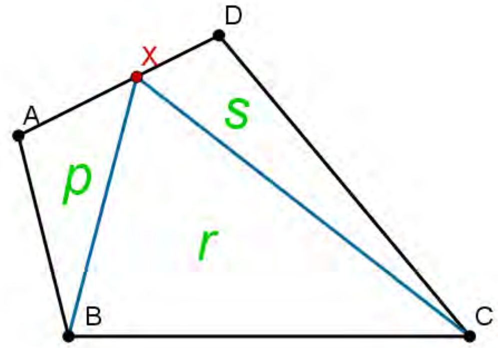


圖 5-23

因此我們只需確認其中三個三角形，其比例是否與我們所要求的相同，即

$\Delta AXD:\Delta CXD:\Delta BXC=q:s:r$ 、 $\Delta AXB:\Delta AXD:\Delta CXD=p:q:s$ 、

$\Delta AXB:\Delta AXD:\Delta BXC=p:q:r$ 、 $\Delta AXB:\Delta BXC:\Delta CXD=p:r:s$ 。

(三) 建立任意四邊形中 n 切等分點數量之運算方法。

由前文中，我們知道了任意四邊形中 n 切等分點的找法，但在實際例子中以此方法慢慢計算實在太過浪費時間且繁複，因此我們進一步利用坐標化來將過程簡化，先將任意四邊形的四個頂點坐標化後再進行運算，首先我們討論等分點在四邊形內部時的情形，如圖 5-24

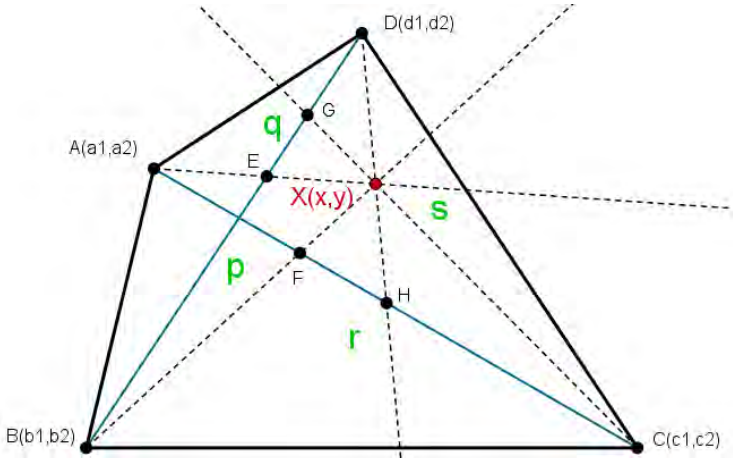


圖 5-24

1. 為了滿足$\Delta AXB:\Delta AXD=p:q$、$\Delta BXC:\Delta CXD=r:s$、$\Delta AXB:\Delta BXC=p:r$、$\Delta AXD:\Delta DXC=q:s$，我們定義四個新的點$E$、$F$、$G$、$H$，坐標分別為$E\left(e_1,e_2\right)$、$F\left(f_1,f_2\right)$、$G\left(g_1,g_2\right)$、$H\left(h_1,h_2\right)$，其中$e_1=\dfrac{pd_1+qb_1}{p+q}$、$e_2=\dfrac{pd_2+qb_2}{p+q}$；$f_1=\dfrac{pc_1+ra_1}{p+r}$、$f_2=\dfrac{pc_2+ra_2}{p+r}$；$g_1=\dfrac{rd_1+sb_1}{r+s}$、$g_2=\dfrac{rd_2+sb_2}{r+s}$；$h_1=\dfrac{qc_1+sa_1}{q+s}$、$h_2=\dfrac{qc_2+sa_2}{q+s}$，由上圖可知$X$點必在$\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{CG}$、$\overleftrightarrow{DH}$四條直線的交點，令$X$點坐標為$\left(x,y\right)$，因此我們可以利用兩點式找出四條直線的方程式，如下

$$\begin{aligned}
&\overleftrightarrow{AE}\Rightarrow\left(e_1-a_1\right)\left(y-a_2\right)=\left(e_2-a_2\right)\left(x-a_1\right)\\
&\overleftrightarrow{BF}\Rightarrow\left(f_1-b_1\right)\left(y-b_2\right)=\left(f_2-b_2\right)\left(x-b_1\right)\\
&\overleftrightarrow{CG}\Rightarrow\left(g_1-c_1\right)\left(y-c_2\right)=\left(g_2-c_2\right)\left(x-c_1\right)\\
&\overleftrightarrow{DH}\Rightarrow\left(h_1-d_1\right)\left(y-d_2\right)=\left(h_2-d_2\right)\left(x-d_1\right)
\end{aligned}\quad,$$

化簡後可得

$$\overleftrightarrow{AE} \Rightarrow (e_2-a_2)x+(a_1-e_1)y+a_2e_1-a_1e_2=0$$

$$\overleftrightarrow{BF} \Rightarrow (f_2-b_2)x+(b_1-f_1)y+b_2f_1-b_1f_2=0$$

，

$$\overleftrightarrow{CG} \Rightarrow (g_2-c_2)x+(c_1-g_1)y+c_2g_1-c_1g_2=0$$

$$\overleftrightarrow{DH} \Rightarrow (h_2-d_2)x+(d_1-h_1)y+d_2h_1-d_1h_2=0$$

由圖 5-24 可知，X 點為四線之交點，因此將 A、B、C、D 四點坐標代入，解出此組聯立方程式：

$$\begin{cases}\left(\dfrac{pd_2+qb_2}{p+q}-a_2\right)x+\left(a_1-\dfrac{pd_1+qb_1}{p+q}\right)y=a_1\cdot\dfrac{pd_2+qb_2}{p+q}-a_2\cdot\dfrac{pd_1+qb_1}{p+q}\\ \left(\dfrac{pc_2+ra_2}{p+r}-b_2\right)x+\left(b_1-\dfrac{pc_1+ra_1}{p+r}\right)y=b_1\cdot\dfrac{pc_2+ra_2}{p+r}-b_2\cdot\dfrac{pc_1+ra_1}{p+r}\\ \left(\dfrac{rd_2+sb_2}{r+s}-c_2\right)x+\left(c_1-\dfrac{rd_1+sb_1}{r+s}\right)y=c_1\cdot\dfrac{rd_2+sb_2}{r+s}-c_2\cdot\dfrac{rd_1+sb_1}{r+s}\\ \left(\dfrac{qc_2+sa_2}{q+s}-d_2\right)x+\left(d_1-\dfrac{qc_1+sa_1}{q+s}\right)y=d_1\cdot\dfrac{qc_2+sa_2}{q+s}-d_2\cdot\dfrac{qc_1+sa_1}{q+s}\end{cases},$$

即可得 X 點，本文為了方便計算，將上組聯立方程式簡化為

$$\begin{cases}m_{11}x+m_{12}y=m_{13}\\ m_{21}x+m_{22}y=m_{23}\\ m_{31}x+m_{32}y=m_{33}\\ m_{41}x+m_{42}y=m_{43}\end{cases}。$$

雖然找出了 X 點的聯立方程式，但是若以消去法來解這組聯立方程式會是相當繁瑣的一件事，因此我們再請問老師有沒有更快速的方法，從老師那我們學會了高中解聯立方程式的克拉瑪公式，以此來解我們的聯立方程式，過程如下：

由圖 5-24 可知，若$\overleftrightarrow{AE}$和$\overleftrightarrow{BF}$之交點(x_1,y_1)與$\overleftrightarrow{CG}$和$\overleftrightarrow{DH}$之交點(x_2,y_2)相同，則點(x,y)存在，利用克拉瑪公式可得下列結果：

$$x_1=\frac{m_{13}m_{22}-m_{12}m_{23}}{m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}}\ ，\ y_1=\frac{m_{11}m_{23}-m_{13}m_{21}}{m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}}\ ，$$

$$x_2=\frac{m_{33}m_{42}-m_{32}m_{43}}{m_{31}m_{42}-m_{32}m_{41}}\ ，\ y_2=\frac{m_{31}m_{43}-m_{33}m_{41}}{m_{31}m_{42}-m_{32}m_{41}}\ ，$$

若上式中 $x_1 = x_2$ 且 $y_1 = y_2$，即代表有一組 (x, y) 同時滿足四條方程式。

2. 當 X 點落在頂點時，即左右三角形比例 $\Delta XBC : \Delta XDC = \Delta ABX : \Delta ADX = p : q = r : s$、上下三角形比例 $\Delta AXD : \Delta XCD = \Delta ABX : \Delta BCX = p : r = q : s$，如圖 5-18、5-19，由圖 5-18 可知當 X 點落在 A 點或 C 點時，即 $\overleftrightarrow{AE} = \overleftrightarrow{CG}$；由圖 5-19 可知當 X 點落在 B 點或 D 點時，即 $\overleftrightarrow{BF} = \overleftrightarrow{DH}$，其中當 X 點落在 A 點或 C 點時，即 $\overleftrightarrow{AE} = \overleftrightarrow{CG}$，由克拉瑪公式可知

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0，$$

也就是行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} (e_2 - a_2) & (a_1 - e_1) \\ (g_2 - c_2) & (c_1 - g_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{31} & m_{32} \end{vmatrix} = 0，$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a_2 e_1 - a_1 e_2 & (a_1 - e_1) \\ c_2 g_1 - c_1 g_2 & (c_1 - g_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{13} & m_{12} \\ m_{33} & m_{32} \end{vmatrix} = 0，$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} (e_2 - a_2) & a_2 e_1 - a_1 e_2 \\ (g_2 - c_2) & c_2 g_1 - c_1 g_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{13} \\ m_{31} & m_{33} \end{vmatrix} = 0，$$

同理，當 X 點落在 B 點或 D 點時，即 $\overleftrightarrow{BF} = \overleftrightarrow{DH}$，由克拉瑪公式可知

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0，$$

也就是行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} (f_2 - b_2) & (b_1 - f_1) \\ (h_2 - d_2) & (d_1 - h_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{21} & m_{22} \\ m_{41} & m_{42} \end{vmatrix} = 0，$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_2 f_1 - b_1 f_2 & (b_1 - f_1) \\ d_2 g_1 - d_1 g_2 & (d_1 - g_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{23} & m_{22} \\ m_{43} & m_{42} \end{vmatrix} = 0，$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} (f_2 - b_2) & b_2 f_1 - b_1 f_2 \\ (h_2 - d_2) & d_2 h_1 - d_1 h_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{21} & m_{23} \\ m_{41} & m_{43} \end{vmatrix} = 0。$$

3. 當 X 點落在邊上，即 $\Delta AXD:\Delta BXC:\Delta CXD=q:r:s$、$\Delta AXB:\Delta AXD:\Delta CXD=p:q:s$、$\Delta AXB:\Delta AXD:\Delta BXC=p:q:r$、$\Delta AXB:\Delta BXC:\Delta CXD=p:r:s$，如圖 5-20、5-21、5-22、5-23，由圖可知此時四條直線中有兩條重合，因此四條直線中只需取其中三條解出其聯立方程式：

$$\begin{cases}\left(\dfrac{pd_2+qb_2}{p+q}-a_2\right)x+\left(a_1-\dfrac{pd_1+qb_1}{p+q}\right)y+a_2\cdot\dfrac{pd_1+qb_1}{p+q}-a_1\cdot\dfrac{pd_2+qb_2}{p+q}=0\cdots(1)\\ \left(\dfrac{pc_2+ra_2}{p+r}-b_2\right)x+\left(b_1-\dfrac{pc_1+ra_1}{p+r}\right)y+b_2\cdot\dfrac{pc_1+ra_1}{p+r}-b_1\cdot\dfrac{pc_2+ra_2}{p+r}=0\cdots(2)\\ \left(\dfrac{rd_2+sb_2}{r+s}-c_2\right)x+\left(c_1-\dfrac{rd_1+sb_1}{r+s}\right)y+c_2\cdot\dfrac{rd_1+sb_1}{r+s}-c_1\cdot\dfrac{rd_2+sb_2}{r+s}=0\cdots(3)\\ \left(\dfrac{qc_2+sa_2}{q+s}-d_2\right)x+\left(d_1-\dfrac{qc_1+sa_1}{q+s}\right)y+d_2\cdot\dfrac{qc_1+sa_1}{q+s}-d_1\cdot\dfrac{qc_2+sa_2}{q+s}=0\cdots(4)\end{cases},$$

當 $p=0$ 時，即 X 點落在 $\overline{AB}$ 上，取(2)(3)(4)；當 $q=0$ 時，即 X 點落在上 $\overline{DA}$ 上，取(1)(2)(3)；當 $r=0$ 時，即 X 點落在 $\overline{BC}$ 上，取(1)(3)(4)；當 $s=0$ 時，即 X 點落在 $\overline{CD}$ 上，取(1)(2)(4)，利用三線共點的判定，若有一組 (x,y) 同時滿足三條方程式，則行列式值為 0。

以此概念我們可以更快速的找到 X 點的位置，將此結論代入實際例子中，以下討論任意四邊形中等分點的數量。

例 3. 若要將四邊形 $ABCD$ 切成 5 塊等面積三角形，先坐標化並將四塊三角形比例找出，如圖 5-25，

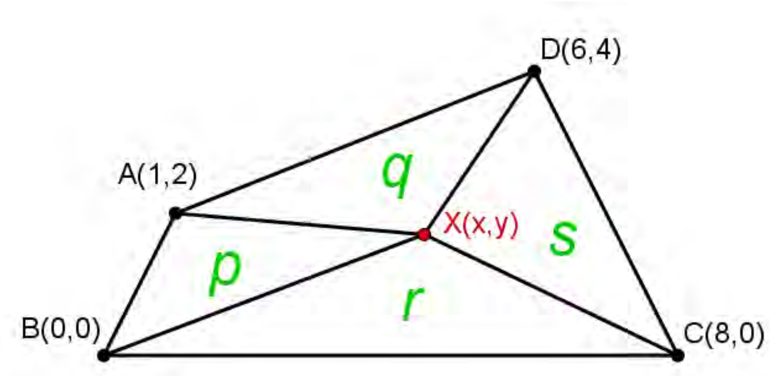


圖 5-25

由前述可知，$p+q+r+s=5$，其中 p,q,r,s 為非負整數，以下分幾種情形討論，

礙於篇幅有限，本文在此只寫出部份：

(1) 當 X 點落在內部時，即 $p+q+r+s=5$，其中 $p,q,r,s\in\mathbb{N}$，

若 $p=1$，$q=1$，$s=1$，$r=2$，則

$$x_1=5\text{ 、 }x_2=5\Rightarrow x_1=x_2\text{ ，}$$

進一步求出

$$y_1=2\text{ 、 }y_2=2\Rightarrow y_1=y_2\text{ ，此比例有解。}$$

若 $p=1$，$q=1$，$s=2$，$r=1$，則

$$x_1=9\text{ 、 }x_2=3.090909091\Rightarrow x_1\neq x_2\text{ ，此比例無解。}$$

若 $p=1$，$q=2$，$s=1$，$r=1$，則

$$x_1=3\text{ 、 }x_2=5.692307692\Rightarrow x_1\neq x_2\text{ ，此比例無解。}$$

若 $p=2$，$q=1$，$s=1$，$r=1$，則

$$x_1=-17\text{ 、 }x_2=4.666666667\Rightarrow x_1\neq x_2\text{ ，此比例無解。}$$

代入公式後只有一組成立，因此四邊形內部有一個 5 切等分點

(2) 當 X 點落在頂點上，即 $p+q=r+s=5$ 或 $p+r=q+s=5$，其中 $p,q,r,s\in\mathbb{N}$，

首先討論點落在 A 或 C 上時，也就是 $p+q=r+s=5$，

若 $p=r=1$，$q=s=4$，則

$$\Delta=\begin{vmatrix}\left(\frac{4+0}{5}-2\right) & \left(1-\frac{6+0}{5}\right)\\ \left(\frac{4+0}{5}-0\right) & \left(8-\frac{6+0}{5}\right)\end{vmatrix}\neq 0\text{ ，}$$

若 $p=r=2$，$q=s=3$，則

$$\Delta=\begin{vmatrix}\left(\frac{8+0}{5}-2\right) & \left(1-\frac{12+0}{5}\right)\\ \left(\frac{8+0}{5}-0\right) & \left(8-\frac{12+0}{5}\right)\end{vmatrix}=0\text{ ，}$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}\left(2\cdot\frac{12+0}{5}-1\cdot\frac{8+0}{5}\right) & \left(1-\frac{12+0}{5}\right)\\ \left(0\cdot\frac{12+0}{5}-8\cdot\frac{8+0}{5}\right) & \left(8-\frac{12+0}{5}\right)\end{vmatrix}=0\text{ ，}$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}\left(\frac{8+0}{5}-2\right) & \left(2\cdot\frac{12+0}{5}-1\cdot\frac{8+0}{5}\right)\\ \left(\frac{8+0}{5}-0\right) & \left(0\cdot\frac{12+0}{5}-8\cdot\frac{8+0}{5}\right)\end{vmatrix}=0$$

若 $p=r=3$， $q=s=2$，則

$$\Delta=\begin{vmatrix}\left(\frac{12+0}{5}-2\right) & \left(1-\frac{18+0}{5}\right)\\ \left(\frac{12+0}{5}-0\right) & \left(8-\frac{18+0}{5}\right)\end{vmatrix}\neq 0\text{，}$$

若 $p=r=4$， $q=s=1$，則

$$\Delta=\begin{vmatrix}\left(\frac{16+0}{5}-2\right) & \left(1-\frac{24+0}{5}\right)\\ \left(\frac{16+0}{5}-0\right) & \left(8-\frac{24+0}{5}\right)\end{vmatrix}\neq 0\text{，}$$

因此點會落在 A 和 C 上。

同理，當點落在 B 或 D 上時，也就是 $p+r=q+s=5$，其所有正整數解中 $(p,r)=(q,s)=(1,4)$，代入公式後為 0，因此點也會落在 B 和 D 上。

(3) 當 X 點落在邊上時，即$q+r+s=5$、$p+q+s=5$、$p+q+r=5$、$p+r+s=5$，其中 $p,q,r,s\in\mathbb{N}$，

首先討論點落在 $\overline{BC}$ 上時，也就是 $p+q+s=5$，

若 $p=1$， $q=1$， $s=3$，則

$$\begin{vmatrix}\left(\frac{4+0}{2}-2\right) & \left(1-\frac{6+0}{2}\right) & \left(2\cdot\frac{6+0}{2}-1\cdot\frac{4+0}{2}\right)\\ \left(\frac{0+0}{3}-0\right) & \left(8-\frac{0+0}{3}\right) & \left(0\cdot\frac{0+0}{3}-8\cdot\frac{0+0}{3}\right)\\ \left(\frac{0+6}{4}-4\right) & \left(6-\frac{8+3}{4}\right) & \left(4\cdot\frac{8+3}{4}-6\cdot\frac{0+6}{4}\right)\end{vmatrix}=80\neq 0\text{，}$$

若 $p=1$，$q=3$，$s=1$，則

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{4+0}{4}-2\right) & \left(1-\frac{6+0}{4}\right) & \left(2\cdot\frac{6+0}{4}-1\cdot\frac{4+0}{4}\right) \\ \left(\frac{0+0}{1}-0\right) & \left(8-\frac{0+0}{1}\right) & \left(0\cdot\frac{0+0}{1}-8\cdot\frac{0+0}{1}\right) \\ \left(\frac{0+2}{4}-4\right) & \left(6-\frac{24+1}{4}\right) & \left(4\cdot\frac{24+1}{4}-6\cdot\frac{0+2}{4}\right) \end{vmatrix}=-120\neq 0\text{，}$$

若 $p=3$，$q=1$，$s=1$，則

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{12+0}{4}-2\right) & \left(1-\frac{18+0}{4}\right) & \left(2\cdot\frac{18+0}{4}-1\cdot\frac{12+0}{4}\right) \\ \left(\frac{0+0}{1}-0\right) & \left(8-\frac{0+0}{1}\right) & \left(0\cdot\frac{0+0}{1}-8\cdot\frac{0+0}{1}\right) \\ \left(\frac{0+2}{2}-4\right) & \left(6-\frac{8+1}{2}\right) & \left(4\cdot\frac{8+1}{2}-6\cdot\frac{0+2}{2}\right) \end{vmatrix}=240\neq 0\text{，}$$

若 $p=1$，$q=2$，$s=2$，則

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{4+0}{3}-2\right) & \left(1-\frac{6+0}{3}\right) & \left(2\cdot\frac{6+0}{3}-1\cdot\frac{4+0}{3}\right) \\ \left(\frac{0+0}{2}-0\right) & \left(8-\frac{0+0}{2}\right) & \left(0\cdot\frac{0+0}{2}-8\cdot\frac{0+0}{2}\right) \\ \left(\frac{0+4}{4}-4\right) & \left(6-\frac{16+2}{4}\right) & \left(4\cdot\frac{16+2}{4}-6\cdot\frac{0+4}{4}\right) \end{vmatrix}=0\text{，}$$

若 $p=2$，$q=1$，$s=2$，則

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{8+0}{3}-2\right) & \left(1-\frac{12+0}{3}\right) & \left(2\cdot\frac{12+0}{3}-1\cdot\frac{8+0}{3}\right) \\ \left(\frac{0+0}{2}-0\right) & \left(8-\frac{0+0}{2}\right) & \left(0\cdot\frac{0+0}{2}-8\cdot\frac{0+0}{2}\right) \\ \left(\frac{0+4}{3}-4\right) & \left(6-\frac{8+2}{3}\right) & \left(4\cdot\frac{8+2}{3}-6\cdot\frac{0+4}{3}\right) \end{vmatrix}=\frac{1280}{9}\neq 0\text{，}$$

若 $p=2$，$q=2$，$s=1$，則

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{8+0}{4}-2\right) & \left(1-\frac{12+0}{4}\right) & \left(2\cdot\frac{12+0}{4}-1\cdot\frac{8+0}{4}\right) \\ \left(\frac{0+0}{1}-0\right) & \left(8-\frac{0+0}{1}\right) & \left(0\cdot\frac{0+0}{1}-8\cdot\frac{0+0}{1}\right) \\ \left(\frac{0+2}{3}-4\right) & \left(6-\frac{8+1}{3}\right) & \left(4\cdot\frac{8+1}{3}-6\cdot\frac{0+2}{3}\right) \end{vmatrix}=\frac{320}{3}\neq 0\text{，}$$

其中一組為 0，因此 $\overline{BC}$ 上有一個 5 切等分點。

同理，當點落在$\overline{AB}$、$\overline{CD}$或$\overline{DA}$上時，即$q+r+s=5$、$p+q+r=5$、$p+r+s=5$，其正整數解有$(1,1,3),(1,3,1),(3,1,1),(1,2,2),(2,1,2),(2,2,1)$，代入公式後皆不為 0，因此$\overline{AB}$、$\overline{CD}$或$\overline{DA}$上沒有 5 切等分點，由此 3 點可知，此四邊形內有$1+4+1=6$個 5 切等分點，如圖 5-26。

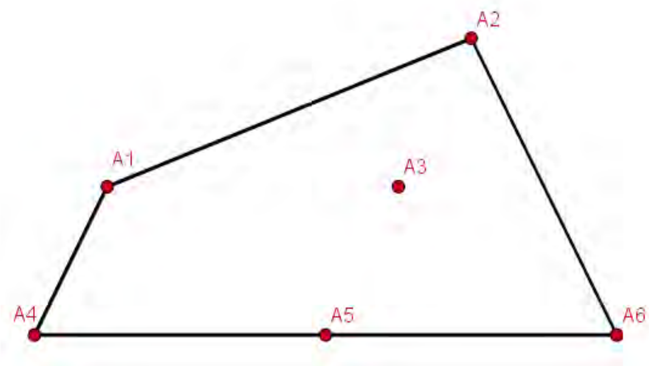


圖 5-26

陸、研究結果

根據我們的研究目的，提出研究結果如下：

一、平行四邊形之 $2n$ 切等分點共有$(n+1)^2$個。

二、假設梯形之上底為a，下底為b，高為h，若對任意之正整數n，存在(c_i,d_i) 與非負整數$\alpha_i,\ \beta_i$滿足：$c_i+d_i=h$，$\frac{a}{a+b}\le\frac{ac_i+bd_i}{(a+b)(c_i+d_i)}\le\frac{b}{a+b}$，$ac_i:bd_i=\alpha_i:\beta_i$，$(ac_i+bd_i):(a+b)(c_i+d_i)=(\alpha_i+\beta_i):n$，其中$i=1,2,\cdots,k$，$k$為滿足$c_i,d_i$之總數，則梯形的$n$切等分點共有$\sum_{i=1}^{s}(n-\alpha_i-\beta_i+1)$個。

三、令任意凸四邊形$ABCD$之頂點座標為$A=(a_1,a_2)$，$B=(b_1,b_2)$，$C=(c_1,c_2)$，$D=(d_1,d_2)$，其聯立方程式為

$$\begin{cases}\left(\dfrac{pd_2+qb_2}{p+q}-a_2\right)x+\left(a_1-\dfrac{pd_1+qb_1}{p+q}\right)y=a_1\cdot\dfrac{pd_2+qb_2}{p+q}-a_2\cdot\dfrac{pd_1+qb_1}{p+q}\\ \left(\dfrac{pc_2+ra_2}{p+r}-b_2\right)x+\left(b_1-\dfrac{pc_1+ra_1}{p+r}\right)y=b_1\cdot\dfrac{pc_2+ra_2}{p+r}-b_2\cdot\dfrac{pc_1+ra_1}{p+r}\\ \left(\dfrac{rd_2+sb_2}{r+s}-c_2\right)x+\left(c_1-\dfrac{rd_1+sb_1}{r+s}\right)y=c_1\cdot\dfrac{rd_2+sb_2}{r+s}-c_2\cdot\dfrac{rd_1+sb_1}{r+s}\\ \left(\dfrac{qc_2+sa_2}{q+s}-d_2\right)x+\left(d_1-\dfrac{qc_1+sa_1}{q+s}\right)y=d_1\cdot\dfrac{qc_2+sa_2}{q+s}-d_2\cdot\dfrac{qc_1+sa_1}{q+s}\end{cases},$$

簡化為

$$\begin{cases}m_{11}x+m_{12}y=m_{13}\\ m_{21}x+m_{22}y=m_{23}\\ m_{31}x+m_{32}y=m_{33}\\ m_{41}x+m_{42}y=m_{43}\end{cases},$$

點 $X=(x,y)$ 為 n 切等分點，則我們有底下結果：

（一）設 $\Delta AXB:\Delta AXD:\Delta BXC:\Delta CXD=p:q:r:s$ 且 $p+q+r+s=n$ ， p,q,r,s 為正整數。若

$$(m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21})(m_{33}m_{42}-m_{32}m_{43})=(m_{31}m_{42}-m_{32}m_{41})(m_{13}m_{22}-m_{12}m_{23})，$$

$$(m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21})(m_{31}m_{43}-m_{33}m_{41})=(m_{31}m_{42}-m_{32}m_{41})(m_{11}m_{23}-m_{13}m_{21})，$$

則點 X 落在凸四邊形 $ABCD$ 之內部，且 $x=\dfrac{m_{13}m_{22}-m_{12}m_{23}}{m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}},\ y=\dfrac{m_{11}m_{23}-m_{13}m_{21}}{m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}}$ 。

（二）若 $\Delta ABC:\Delta ADC=p:q$ ，其中 p,q 為正整數且 $p+q=n$ ，則 $(x,y)=(a_1,a_2)$ 或 $(x,y)=(c_1,c_2)$ ，同理，若 $\Delta ABD:\Delta CBD=p:r$ ，其中 p,r 為正整數且 $p+r=n$ ，則 $(x,y)=(b_1,b_2)$ 或 $(x,y)=(d_1,d_2)$ ，則點 X 落在凸四邊形 $ABCD$ 之頂點。

（三）設 $p=0$ ， $\Delta AXD:\Delta BXC:\Delta CXD=q:r:s$ ，其中 q,r,s 為正整數，若

$$(m_{21}m_{32}-m_{22}m_{31})(m_{33}m_{42}-m_{32}m_{43})=(m_{31}m_{42}-m_{32}m_{41})(m_{23}m_{32}-m_{22}m_{33})，$$

$$(m_{21}m_{32}-m_{22}m_{31})(m_{31}m_{43}-m_{33}m_{41})=(m_{31}m_{42}-m_{32}m_{41})(m_{21}m_{33}-m_{23}m_{31})，$$

則點 X 在 $\overline{AB}$ 上（不含端點），且 $x=\dfrac{m_{23}m_{32}-m_{22}m_{33}}{m_{21}m_{32}-m_{22}m_{31}},\ y=\dfrac{m_{21}m_{33}-m_{23}m_{31}}{m_{21}m_{32}-m_{22}m_{31}}$ 。

（四）設 $q=0$ ，$\Delta AXB:\Delta BXC:\Delta CXD=p:r:s$ ，其中 p,r,s 為正整數，若

$$\left(m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}\right)\left(m_{23}m_{32}-m_{22}m_{33}\right)=\left(m_{21}m_{32}-m_{22}m_{31}\right)\left(m_{13}m_{22}-m_{12}m_{23}\right)$$ ，

$$\left(m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}\right)\left(m_{21}m_{33}-m_{23}m_{31}\right)=\left(m_{21}m_{32}-m_{22}m_{31}\right)\left(m_{11}m_{23}-m_{13}m_{21}\right)$$ ，

則點 X 在 $\overline{DA}$ 上（不含端點），且 $x=\dfrac{m_{13}m_{22}-m_{12}m_{23}}{m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}},\ y=\dfrac{m_{11}m_{23}-m_{13}m_{21}}{m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}}$ 。

（五）設 $r=0$ ，$\Delta AXB:\Delta AXD:\Delta CXD=p:q:s$ ，其中 p,q,s 為正整數，若

$$\left(m_{11}m_{32}-m_{12}m_{31}\right)\left(m_{33}m_{42}-m_{32}m_{43}\right)=\left(m_{31}m_{42}-m_{32}m_{41}\right)\left(m_{13}m_{32}-m_{12}m_{33}\right)$$ ，

$$\left(m_{11}m_{32}-m_{12}m_{31}\right)\left(m_{31}m_{43}-m_{33}m_{41}\right)=\left(m_{31}m_{42}-m_{32}m_{41}\right)\left(m_{11}m_{33}-m_{13}m_{31}\right)$$ ，

則點 X 在 $\overline{BC}$ 上（不含端點），且 $x=\dfrac{m_{13}m_{32}-m_{12}m_{33}}{m_{11}m_{32}-m_{12}m_{31}},\ y=\dfrac{m_{11}m_{33}-m_{13}m_{31}}{m_{11}m_{32}-m_{12}m_{31}}$ 。

（六）設 $s=0$ ，$\Delta AXB:\Delta AXD:\Delta CXB=p:q:r$ ，其中 p,q,r 為正整數，若

$$\left(m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}\right)\left(m_{23}m_{42}-m_{22}m_{43}\right)=\left(m_{21}m_{42}-m_{22}m_{41}\right)\left(m_{13}m_{22}-m_{12}m_{23}\right)$$ ，

$$\left(m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}\right)\left(m_{21}m_{43}-m_{23}m_{41}\right)=\left(m_{21}m_{42}-m_{22}m_{41}\right)\left(m_{11}m_{23}-m_{13}m_{21}\right)$$ ，

則點 X 在 $\overline{CD}$ 上（不含端點），且 $x=\dfrac{m_{13}m_{22}-m_{12}m_{23}}{m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}},\ y=\dfrac{m_{11}m_{23}-m_{13}m_{21}}{m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}}$ 。

柒、討論

一、**本研究結果與文獻之異同**。

《無限的分割－射線分割點》一文中只討論正方形與正六邊形，並沒有討論其他四邊形，其文章所用之方法為平行法，與本文的比例法不同且所討論的點都在內部，本文進一步討論到頂點與邊上；《點分天下》一文如 p3 所述，雖然討論到任意凸四邊形，但所討論的面積等分點，其切出的等分面積不一定是三角形，本文則完整討論任意凸四邊形等分點數量。

二、**將任意四邊形中 *n* 切等分點之方法建立程式，並代入本文例子**。

(一) 首先將 n 切等分點數量之運算方法建立成程式，其程式碼如圖 7-1 至圖 7-4，

1. 各個函數：

```cpp
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;

int decide(double a1,double b1,double a2,double b2,double x1,double y1,double x2,double y2){
    double value1,value2;
    value1=(a2-a1)*(y1-b1)-(b2-b1)*(x1-a1);
    value2=(a2-a1)*(y2-b1)-(b2-b1)*(x2-a1);

    if(value1*value2>0) {
        return 2;
    } else if(value1==0||value2==0) {
        return 1;
    } else if(value1*value2<0) {
        return 0;
    }
}
int show(double test1,double test2,double test3,double test4,double test5,double test6
        ) {
    if(test1+test2+test3+test4+test5+test6==8) {
        cout<<" *你輸入四點構成『凸四邊形』";
    } else if((test1+test2+test3+test4+test5+test6==6)&&(test1!=1)&&(test2!=1)&&(test3!=1)&&(test4!=1)&&(test5!=1)&&(test6!=1)){
        cout<<" *你輸入四點構成『凹四邊形』，請重新輸入座標\n";
    } else
        cout<<" *你輸入四點構成『非四邊形』，請重新輸入座標\n";
    return 0;
}
double sol(double a1,double b1,double c1,double d1,
           double a2,double b2,double c2,double d2,int x) {
    if(x==0) {
        return (-(d1-c1)*(a1*b2-a2*b1)+(b1-a1)*(c1*d2-c2*d1))/(-(d1-c1)*(b2-a2)+(b1-a1)*(d2-c2));
    }
    else if(x==1) {
        return ( (b2-a2)*(c1*d2-c2*d1)-(d2-c2)*(a1*b2-a2*b1))/(-(d1-c1)*(b2-a2)+(b1-a1)*(d2-c2));
    }
    else if(x==2) {
        return -(d1-c1)*(b2-a2)+(d2-c2)*(b1-a1);
    }
}
```

圖 7-1

2. 等分點在頂點

```cpp
            cout<<"*等分點於頂點:\n";
            for(p; p<n; p++) {
                q=n-p;
                for(int index=0;index<12;index++){
                        if(vertex[index]==-0){
                            vertex[index]=fabs(vertex[index]);
                        }
                    }
                if(same((vertex[0]-vertex[10])*q,(vertex[10]-vertex[4])*p)>0&&
                   same((vertex[1]-vertex[11])*q,(vertex[11]-vertex[5])*p)>0) {
                    count=count+2;
                    cout<<"("<<vertex[2]<<","<<vertex[3]<<") "
                        <<"("<<vertex[6]<<","<<vertex[7]<<") ";
                }
                if(same((vertex[2]-vertex[10])*q,(vertex[10]-vertex[6])*p)>0&&
                   same((vertex[3]-vertex[11])*q,(vertex[11]-vertex[7])*p)>0) {
                    count=count+2;
                    cout<<"("<<vertex[0]<<","<<vertex[1]<<") "
                        <<"("<<vertex[4]<<","<<vertex[5]<<") ";
                }
            }
            int temp1=0;
            int temp2=0;
            temp1 = count;
            temp2 = count;
            cout<<"共" <<temp1<< "點";
            cout<<"\n*等分點於邊上:\n";
            if(n>2) {
                int f=2,p=1,q=1,r=n-f;
                for(f; f<n; f++) {
                    for(p=1; p<f; p++) {
                        q=f-p;
                        r=n-f;
                        double e1,e2,x1,f1,f2,x2;
                        e1=(q*vertex[0]+p*vertex[4])/(p+q);
                        e2=(q*vertex[2]+r*vertex[6])/(r+q);
                        f1=(q*vertex[1]+p*vertex[5])/(p+q);
                        f2=(q*vertex[3]+r*vertex[7])/(r+q);
                        if(det(vertex[6],e1,vertex[4],e2,vertex[0],vertex[2],vertex[7],f1,vertex[5],f2,vertex[1],vertex[3])< 0.0001&&
```

圖 7-2

3. 等分點在邊上

```cpp
                cout<<"\n*等分點於邊上:\n";
                if(n>2) {
                    int f=2,p=1,q=1,r=n-f;
                    for(f; f<n; f++) {
                        for(p=1; p<f; p++) {
                            q=f-p;
                            r=n-f;
                            double e1,e2,x1,f1,f2,x2;
                            e1=(q*vertex[0]+p*vertex[4])/(p+q);
                            e2=(q*vertex[2]+r*vertex[6])/(r+q);
                            f1=(q*vertex[1]+p*vertex[5])/(p+q);
                            f2=(q*vertex[3]+r*vertex[7])/(r+q);
                            if(det(vertex[6],e1,vertex[4],e2,vertex[0],vertex[2],vertex[7],f1,vertex[5],f2,vertex[1],vertex[3])< 0.0001&&
                               det(vertex[6],e1,vertex[4],e2,vertex[0],vertex[2],vertex[7],f1,vertex[5],f2,vertex[1],vertex[3])>-0.0001){
                                count++;
                                x1=sol(vertex[6],e1,vertex[4],e2,vertex[7],f1,vertex[5],f2,0);
                                x2=sol(vertex[6],e1,vertex[4],e2,vertex[7],f1,vertex[5],f2,1);
                                if(x1==-0) {
                                    x1=fabs(x1);
                                }
                                if(x2==-0) {
                                    x2=fabs(x2);
                                }
                                if(-0.0001<x1 && x1<0.0001) {
                                    x1=0;
                                }
                                if(-0.0001<x2 && x2<0.0001) {
                                    x2=0;
                                }
                                if((count-temp1)%4==0){
                                    cout<<"("<<x1<<","<<x2<<") \n";
                                }
                                else
                                    cout<<"("<<x1<<","<<x2<<") ";
                            }
                            e1=(q*vertex[2]+p*vertex[6])/(p+q);
                            e2=(q*vertex[4]+r*vertex[0])/(r+q);
                            f1=(q*vertex[3]+p*vertex[7])/(p+q);
                            f2=(q*vertex[5]+r*vertex[1])/(r+q);
```

圖 7-3

4. 等分點在內部

```cpp
                cout<<"\n*等分點於內部:\n";
        if(n>3) {
                double p=1,q=1,r=1,s=1;
                for(p=1; p<n-2; p++) {
                    for(q=1; q<n-p-1; q++) {
                        for(r=1; r<n-p-q; r++) {
                            s=n-p-q-r;
                            double e1,f1,g1,x1,e2,f2,g2,x2;
                            e1=(vertex[6]*q+vertex[2]*p)/(p+q);
                            f1=(vertex[0]*r+vertex[4]*q)/(r+q);
                            g1=(vertex[6]*r+vertex[2]*s)/(r+s);
                            e2=(vertex[7]*q+vertex[3]*p)/(p+q);
                            f2=(vertex[1]*r+vertex[5]*q)/(r+q);
                            g2=(vertex[7]*r+vertex[3]*s)/(r+s);
                            if(det(vertex[0],e1,vertex[2],f1,vertex[4],g1,
                                    vertex[1],e2,vertex[3],f2,vertex[5],g2)>-0.0001&&
                               det(vertex[0],e1,vertex[2],f1,vertex[4],g1,
                                    vertex[1],e2,vertex[3],f2,vertex[5],g2)< 0.0001){
                                count++;
                                x1=sol(vertex[0],e1,vertex[2],f1,vertex[1],e2,vertex[3],f2,0);
                                x2=sol(vertex[0],e1,vertex[2],f1,vertex[1],e2,vertex[3],f2,1);
                                if((count-temp1)%4==0){
                                cout<<"("<<x1<<","<<x2<<") \n";
                            }
                            else
                                cout<<"("<<x1<<","<<x2<<") ";
                            }
                        }
                    }
                }
                temp1 = count-temp1-temp2;
                cout<<"共" <<temp1<< "點\n";
                cout<<"分點於頂點+分點於邊上+分點於內部 總共" <<count<< "點\n"<<endl;
            }
        }
    }
}
system("pause");
```

圖 7-4

(二) 以本文所舉過的三種例子代入程式進行驗證。

1. 以平行四邊形輸入程式：

若要將平行四邊形 $ABCD$ 切成 6 塊等面積三角形，先將其頂點坐標化，則 $A(0,0)$、$B(3,4)$、$C(9,4)$、$D(6,0)$，如圖 7-5，

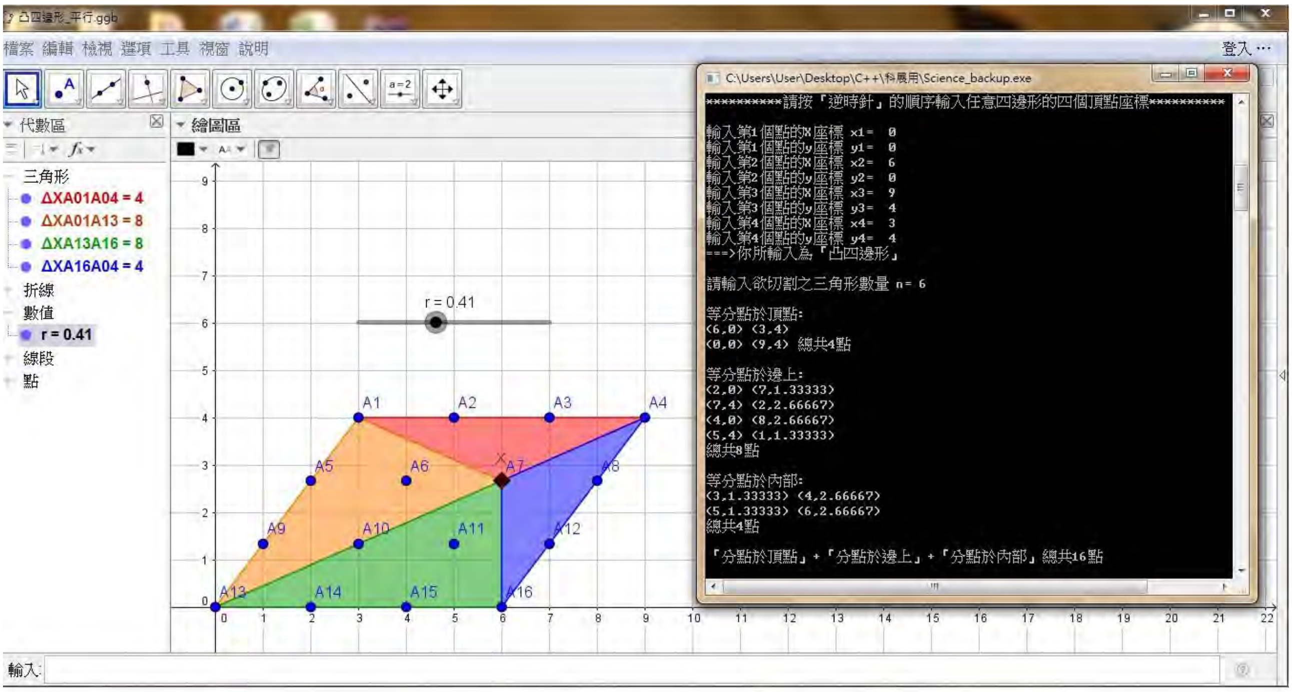


圖 7-5

由上圖可知，此平行四邊形內共有 $4+8+4=16$ 個 6 切等分點，與圖 5-4 結果相符。

2. 以梯形輸入程式：

若要將梯形 $ABCD$ 切成 9 塊等面積三角形，先將其頂點坐標化，則 $A(0,0)$、$B(8,0)$、$C(6,6)$、$D(2,6)$，如圖 7-6，

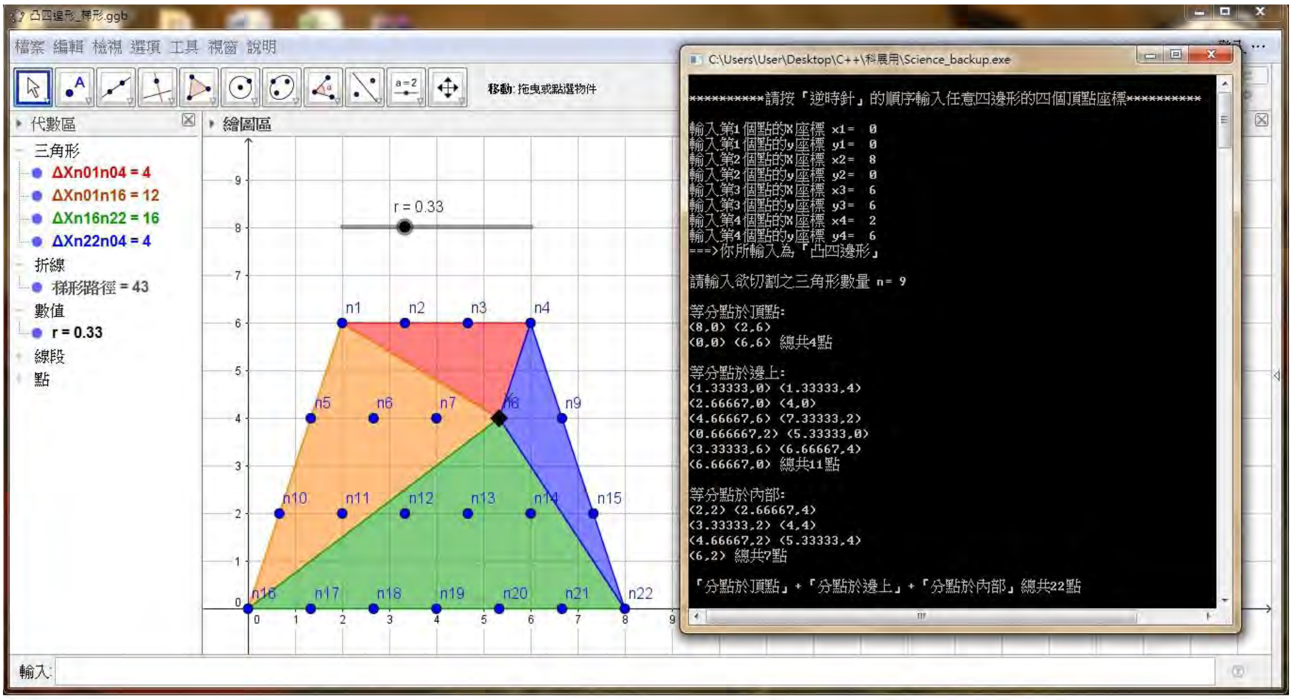


圖 7-6

由上圖可知，此梯形內共有 $4+11+7=22$ 個 9 切等分點，與圖 5-10 結果相符。

3. 以任意四邊形輸入程式：

若要將任意四邊形 $ABCD$ 切成 5 塊等面積三角形，先將其頂點坐標化，則 $A(0,0)$、$B(8,0)$、$C(6,4)$、$D(1,2)$，如圖 7-7，

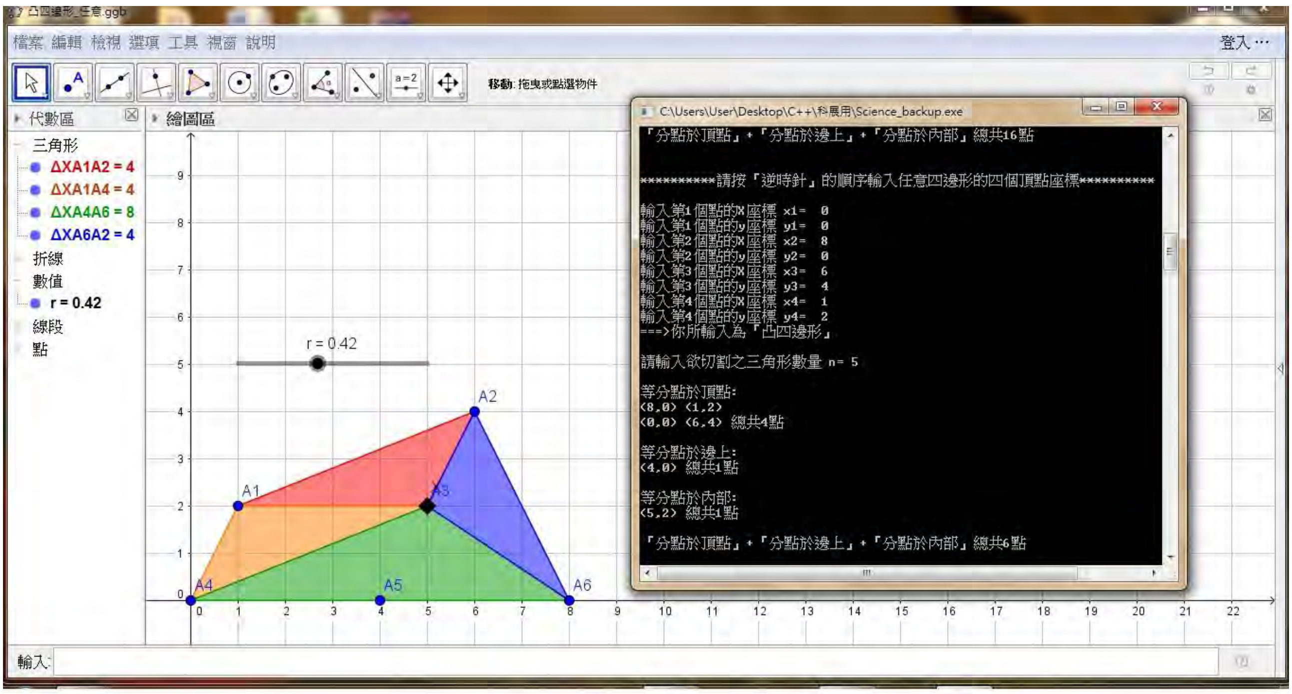


圖 7-7

由上圖可知，此四邊形內有$4+1+1=6$個 5 切等分點，與圖 5-26 相同。

由此可知，此運算方法可運用在任意凸四邊形中。

捌、結論與心得

經由這次做科展的經驗，讓我們學到做研究的方法。在一開始建立平行四邊形 ***n*** 切等分點的運算方式時非常順利，但是應用到梯形上時遇到了點小麻煩，不過也很順利的解決；一直到在解任意凸四邊形的時候，我們花了相當多的時間嘗試去找任意四邊形的性質，但是一直找不到。直到團隊中有人突然奇想，與其思考其中的性質，不如直接固定內部的比例求解！這讓我們學到，在解決數學問題時，不要太過拘泥於舊有觀念，大膽嘗試所學過的各種知識並小心驗證，才是做研究的方法。

礙於能研究時間有限，我們暫時討論凸四邊形的部份，在凹四邊形與其他多邊形部份，希望在學到更高深的數學方法或有更多的資源後能繼續深入研究。同時我們也希望未來能嘗試將此運算應用在實務上，如：建築磁磚之切割問題、平面熱量傳遞問題等等。

玖、參考資料及其他

一、許宸碩、陳泓志、張舜嵐、戴武郎（2008）。**點分天下**。中華民國第四十八屆中小學科學展覽會高中組數學科。

二、危剛、林耿緯、吳宗勳、王志傑、葉淑芬（2011）。**無限的分割—射線分割點**。全國高級中等學校小論文寫作比賽。

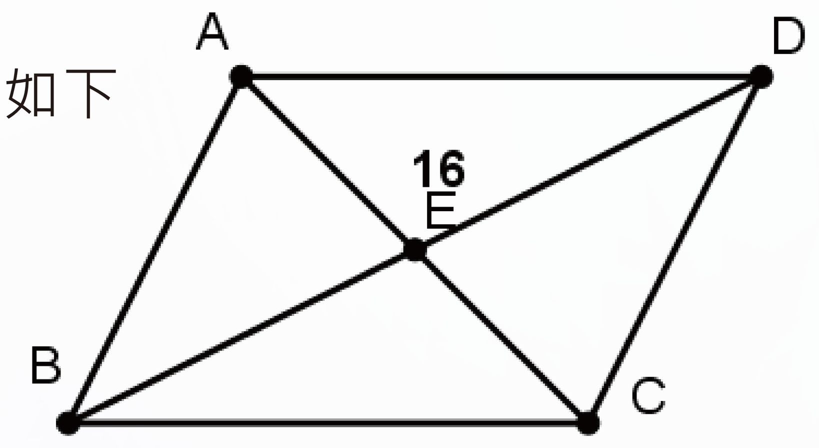
【評語】030418

討論由四邊形內一點 P（此點可能位於頂點或邊上），連接此點與各邊或各頂點分切原四邊形為等面積的 n 個三角形，P 點的可能位置的選擇有多少種的問題。針對給定的四邊形為平行四邊形或梯形的情形，給了完整的解答。對於一般的四邊形，也作了一些討論。作者們透過比例的想法，對於給定的四邊形為特殊四邊形時，點的位置的可能選擇給出了詳盡的分析。能藉由簡單的分析手法來處理看似複雜的問題，想法很好，值得嘉許。後半部關於任意四邊形因切割必須是三角形這個限制條件使一般四邊形的難度大幅提高，目前只能有一些部分結論，如果能有更一般的定性結論會更好。

作品海報

壹、研究動機：

在二年級下學期4-2平行四邊形單元中，老師在課堂上出了一個題目：「如下圖，若三角形AED的面積為16，請問平行四邊形$ABCD$面積為多少？」



貳、研究目的：

一、探討平行四邊形n切等分點的數量。

二、探討梯形n切等分點的數量。

三、探討任意凸四邊形n切等分點的數量。

參、研究設備及器材：

紙、筆、電腦、Microsoft Word、Microsoft Excel、圖書館、書籍文獻

肆、研究過程或方法：

一、探討平行四邊形n切等分點的數量。

（一）彙整相關文獻

在《點分天下》一文中討論：在三角形和四邊形內部中找到一點P，使得P連接到各邊上給定的點後即可等分面積，在文中利用向量來解決四邊形中的面積等分點問題；在《無限的分割－射線分割點》一文中定義：在正方形內部的一點X，如果以點X為起點，畫出n條射線可將正方形分割成n個等面積的三角形則稱點X為「n-射線分割點」，其中正方形裡的$2k$-射線分割點有$(k-1)^2$個。

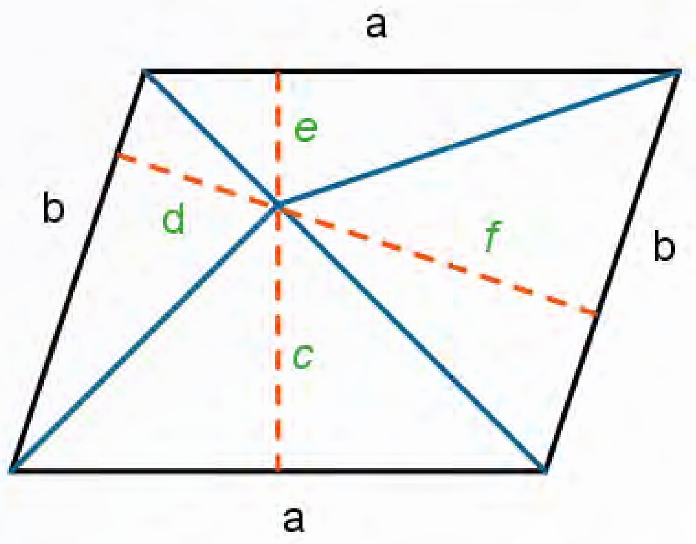


圖4-1

（二）利用比例求平行四邊形中 n 切等分點的數量。

$\frac{bd}{2}:\frac{ae}{2}:\frac{ac}{2}:\frac{bf}{2}=p:q:r:s$，其中$p,q,r,s$為非負整數，

可得$\frac{p+s}{p+q+r+s}=\frac{q+r}{p+q+r+s}=\frac{1}{2}$，推出平行四邊形$2n$切等分點共有$(n+1)^2$個。

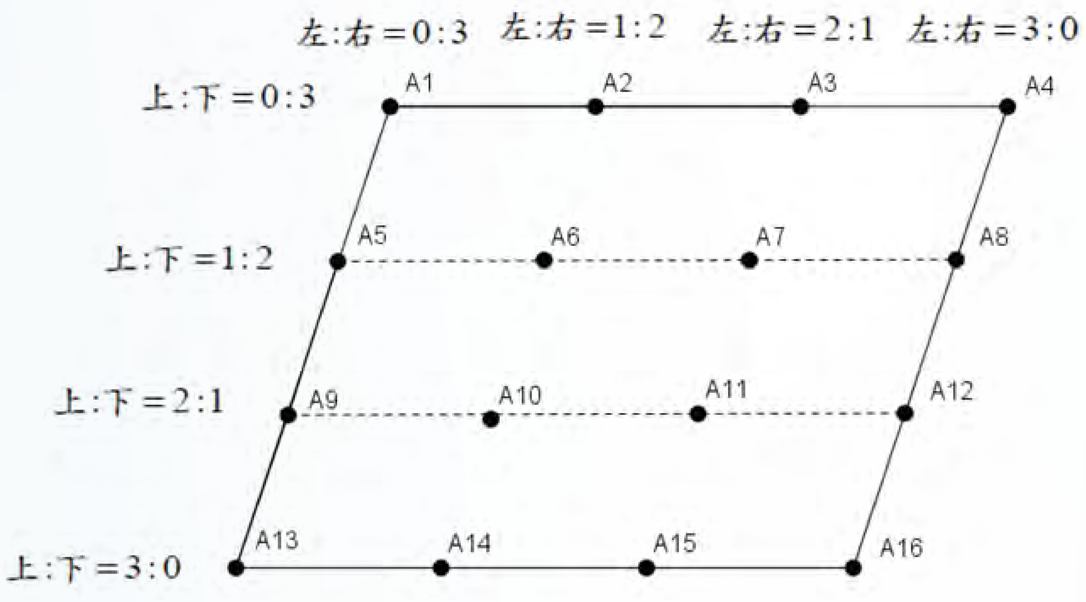


圖4-2

點落在邊上的情形如圖4-3，點落在頂點上的情形如圖4-4，點落在內部上的情形如圖4-5。

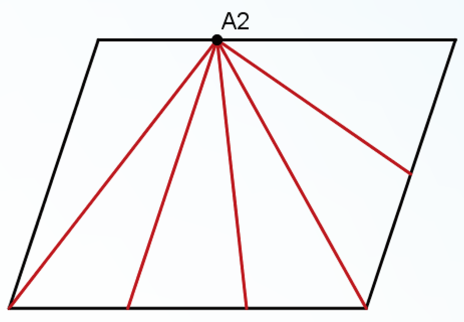


圖4-3

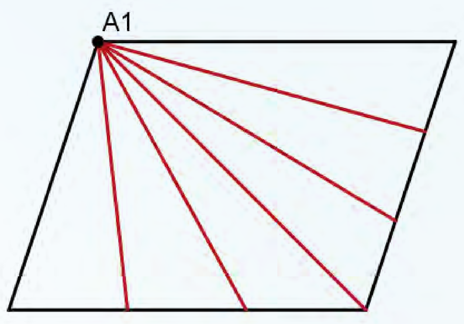


圖4-4

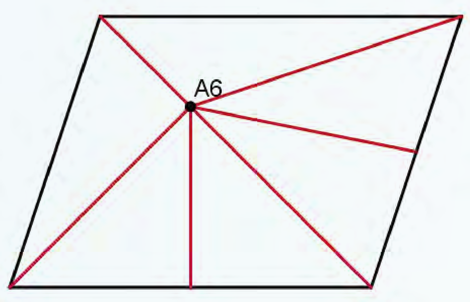


圖4-5

二、探討梯形n切等分點的數量。

（一）利用比例將梯形切成等面積三角形。

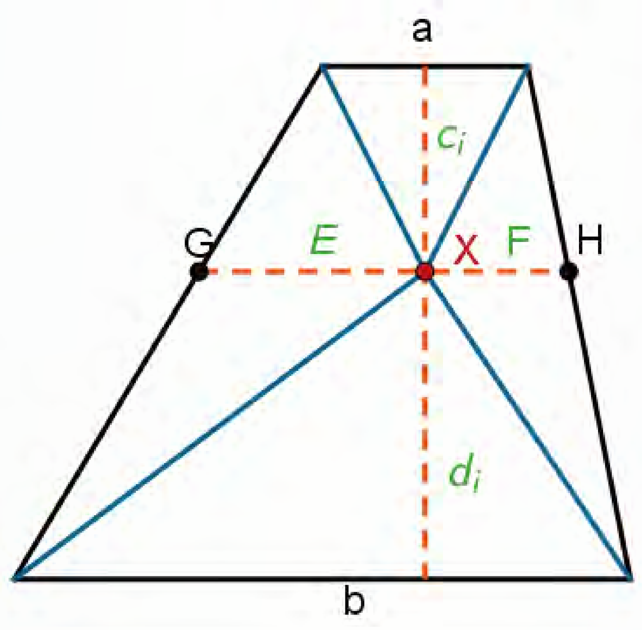


圖4-6

上下兩塊三角形面積占整塊梯形面積的範圍為

$\frac{a(c_i+d_i)}{(a+b)(c_i+d_i)}\le\frac{ac_i+bd_i}{(a+b)(c_i+d_i)}\le\frac{b(c_i+d_i)}{(a+b)(c_i+d_i)}$，化簡為 $\frac{a}{a+b}\le\frac{ac_i+bd_i}{(a+b)(c_i+d_i)}\le\frac{b}{a+b}$，

又令 $ac_i:bd_i=\alpha_i:\beta_i$，其中$\alpha_i$和$\beta_i$為非負整數，推得 $(ac_i+bd_i):(a+b)(c_i+d_i)=(\alpha_i+\beta_i):n$，其中$i=1,2,\cdots k$，$k$為滿足$c_i,d_i$之總數。

（二）利用比例求梯形中 n 切等分點的數量。

上下兩塊三角形面積占整塊梯形面積的式子化簡為 $\frac{ac_i+bd_i}{(a+b)(c_i+d_i)}\overset{\times l}{\underset{\times l}{=}}\frac{p}{n}$，

其中$l\in\mathbb{Q}$，$i=1,2,\cdots k$，k為滿足c_i,d_i之總數，可推得 $ac_i+bd_i=\frac{p}{l}$，又因為$c_i+d_i=h$，

則可得二元一次聯立方程式 $\begin{cases}ac_i+bd_i=\frac{p}{l}\\ c_i+d_i=h\end{cases}$，其中$a,b,p,l,h$為已知數，$a\ne b$，

梯形內共有 $\sum_{i=1}^{k}(n-\alpha_i-\beta_i+1)$ 個等分點。

例1. 若要將一上底為4、下底為8、高為6之梯形切成9塊等面積三角形，將數值代入前述結論：

$$\frac{4}{4+8}\le\frac{4c_i+8d_i}{(4+8)\times 6}\le\frac{8}{4+8}$$

$$\Rightarrow\frac{3}{9}\le\frac{\frac{4c_i+8d_i}{8}}{9}\le\frac{6}{9}$$

$$\Rightarrow\frac{4c_i+8d_i}{8}=3,4,5,6$$

$$\Rightarrow\frac{c_i}{2}+d_i=3,4,5,6$$

因此(c_i,d_i)的解為$(6,0)$,$(4,2)$,$(2,4)$,$(0,6)$，將解與上下底代入檢查，推出 $4c_i:8d_i=\alpha_i:\beta_i$ 且$\alpha_i+\beta_i=3,4,5,6$，求出(α_i,β_i)為$(3,0)$,$(2,2)$,$(1,4)$,$(0,6)$，也就是$\alpha_i+\beta_i=3,4,5,6$皆可成立，則此梯形9切等分點共有$7+6+5+4=22$個，如圖4-7

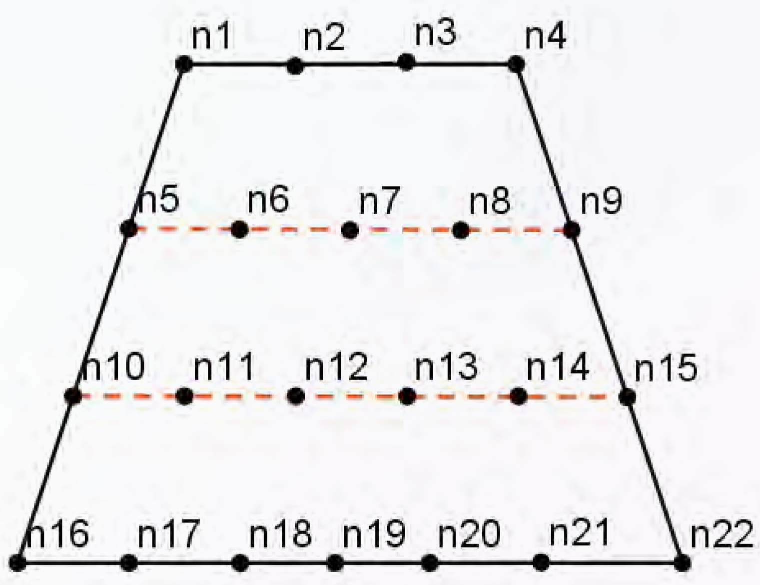


圖4-7

點落在邊上的情形如圖4-8，點落在頂點上的情形如圖4-9，點落在內部上的情形如圖4-10。

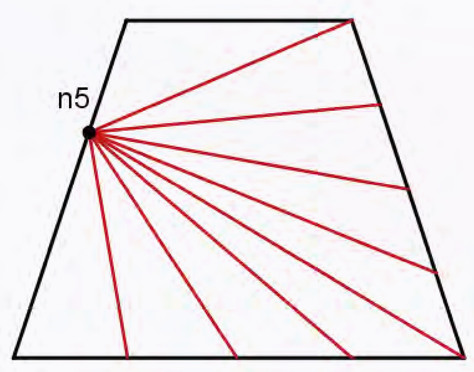


圖4-8

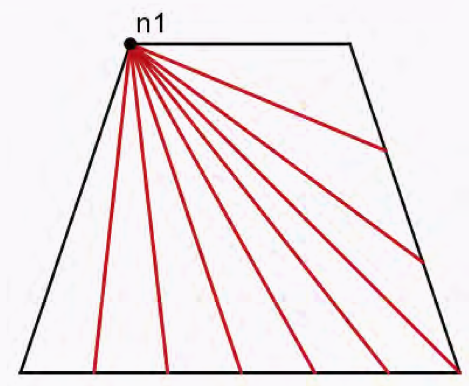


圖4-9

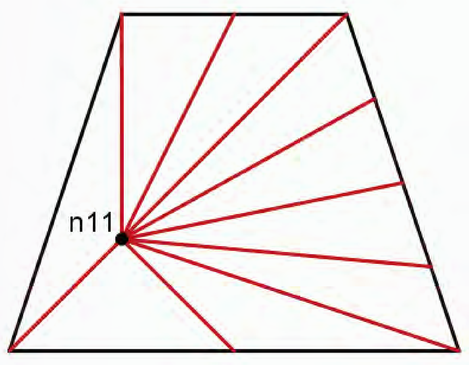


圖4-10

三、探討任意凸四邊形n切等分點的數量。

(一)利用比例將凸四邊形切成等面積三角形。

1. 當X點落在$\overline{BD}$上時，如圖4-11。
2. 當X點落在$\overline{BD}$上方，如圖4-12。

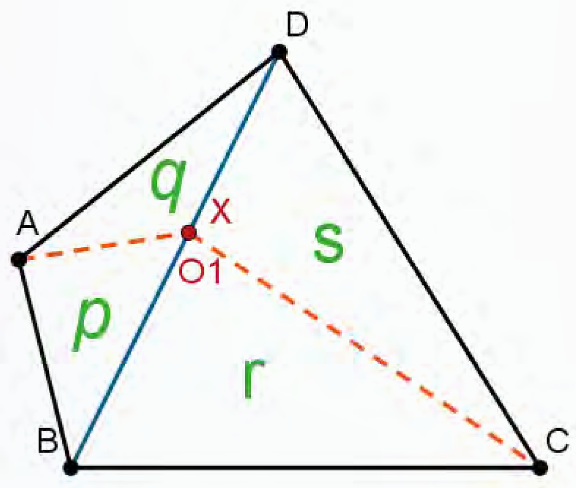


圖4-11

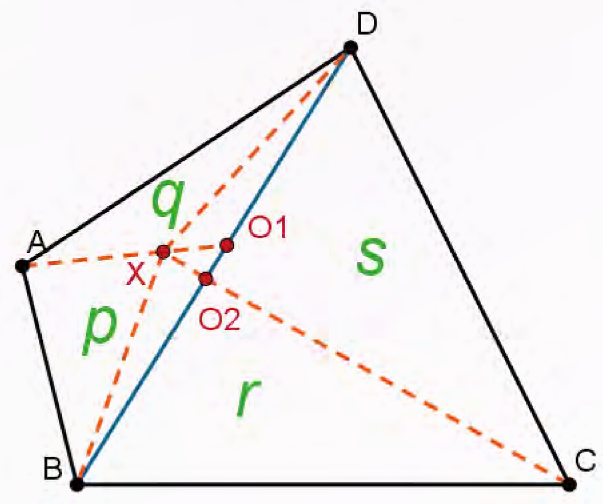


圖4-12

(二)找出任意四邊形頂點與邊上之等分三角形求法。

1. 當X點落在頂點上時，如圖4-13、4-14。

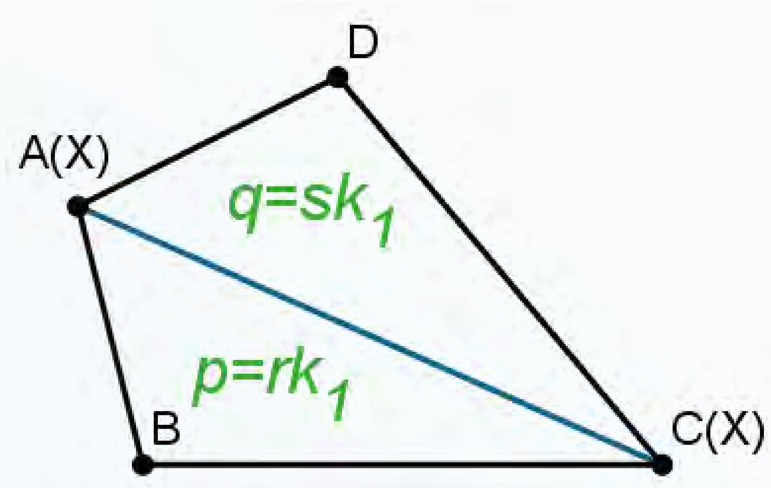


圖4-13

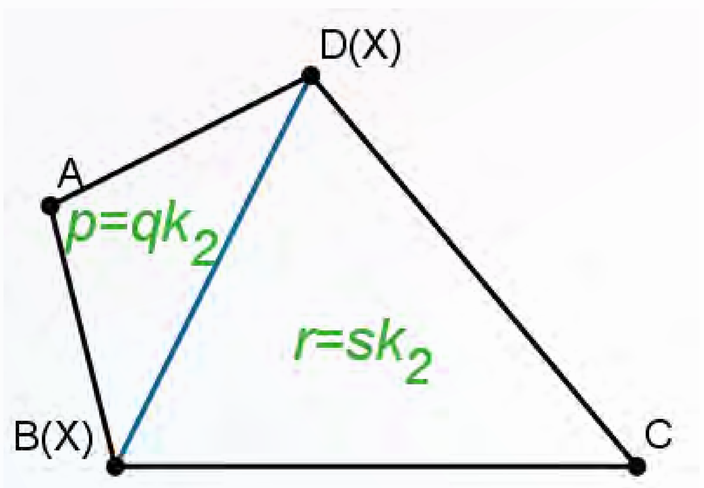


圖4-14

2. 當X點落在邊上時，代表四邊形只能切成三塊三角形，如圖4-15、4-16、4-17、4-18。

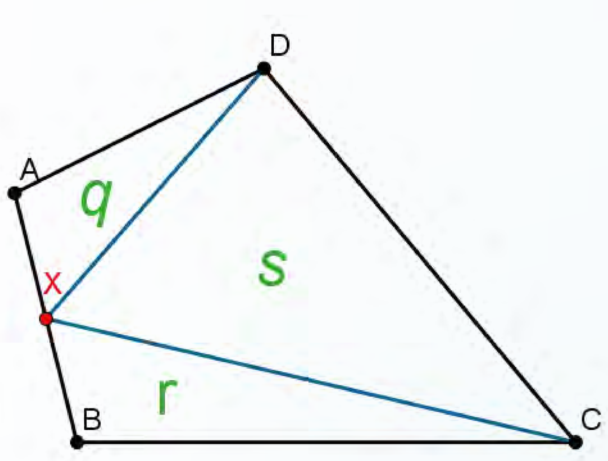


圖4-15

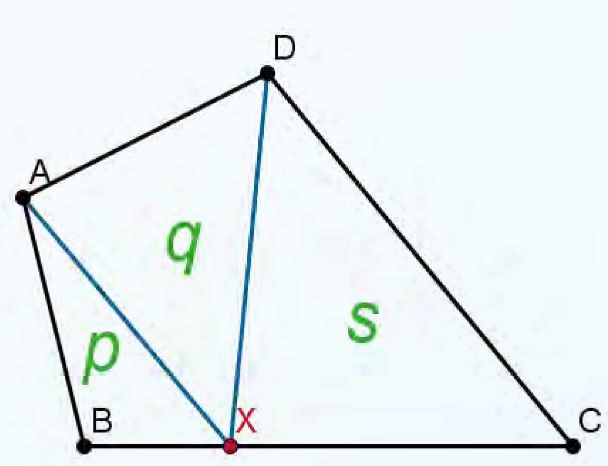


圖4-16

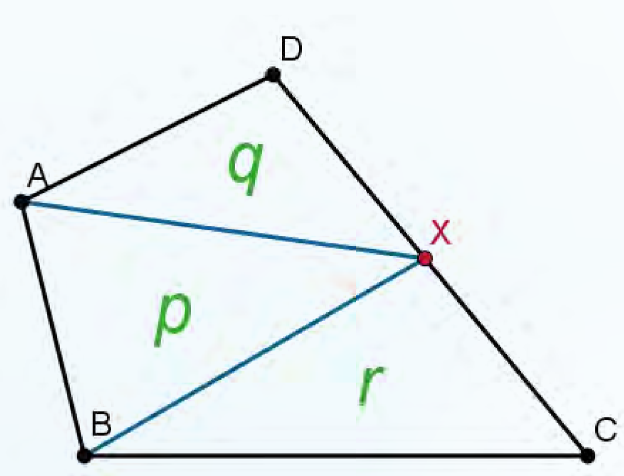


圖4-17

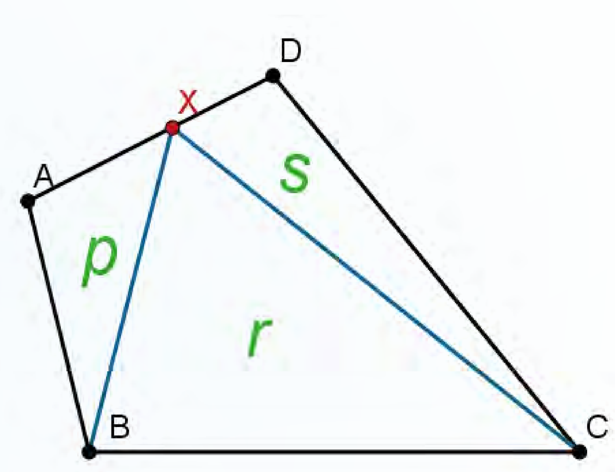


圖4-18

(三)建立任意四邊形中n切等分點數量之運算方法。

等分點在四邊形內部時的情形，如圖4-19。

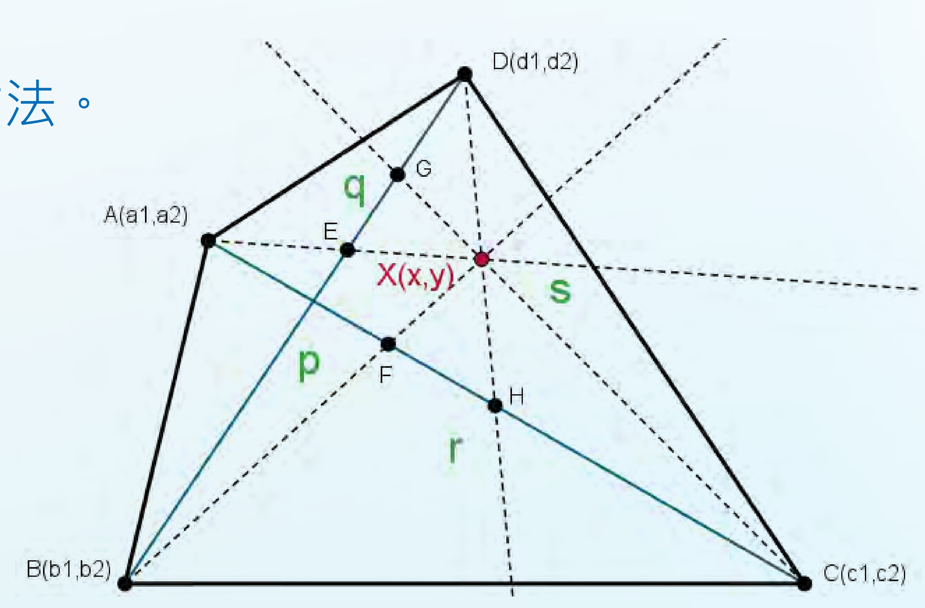


圖4-19

1. 解出此組聯立方程式：

$$\begin{cases}\left(\dfrac{pd_2+qb_2}{p+q}-a_2\right)x+\left(a_1-\dfrac{pd_1+qb_1}{p+q}\right)y=a_1\cdot\dfrac{pd_2+qb_2}{p+q}-a_2\cdot\dfrac{pd_1+qb_1}{p+q}\\ \left(\dfrac{pc_2+ra_2}{p+r}-b_2\right)x+\left(b_1-\dfrac{pc_1+ra_1}{p+r}\right)y=b_1\cdot\dfrac{pc_2+ra_2}{p+r}-b_2\cdot\dfrac{pc_1+ra_1}{p+r}\\ \left(\dfrac{rd_2+sb_2}{r+s}-c_2\right)x+\left(c_1-\dfrac{rd_1+sb_1}{r+s}\right)y=c_1\cdot\dfrac{rd_2+sb_2}{r+s}-c_2\cdot\dfrac{rd_1+sb_1}{r+s}\\ \left(\dfrac{qc_2+sa_2}{q+s}-d_2\right)x+\left(d_1-\dfrac{qc_1+sa_1}{q+s}\right)y=d_1\cdot\dfrac{qc_2+sa_2}{q+s}-d_2\cdot\dfrac{qc_1+sa_1}{q+s}\end{cases}$$

即可得X點，本文為了方便計算，將上組聯立方程式簡化為 $\begin{cases}m_{11}x+m_{12}y=m_{13}\\ m_{21}x+m_{22}y=m_{23}\\ m_{31}x+m_{32}y=m_{33}\\ m_{41}x+m_{42}y=m_{43}\end{cases}$。

利用克拉瑪公式可得下列結果：

$x_1=\dfrac{m_{13}m_{22}-m_{12}m_{23}}{m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}}$，$y_1=\dfrac{m_{11}m_{23}-m_{13}m_{21}}{m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}}$，$x_2=\dfrac{m_{33}m_{42}-m_{32}m_{43}}{m_{31}m_{42}-m_{32}m_{41}}$，$y_2=\dfrac{m_{31}m_{43}-m_{33}m_{41}}{m_{31}m_{42}-m_{32}m_{41}}$。

若上式中$x_1=x_2$且$y_1=y_2$，即代表有一組(x,y)同時滿足四條方程式。

2. 當X點落在頂點時，由克拉瑪公式可知，即 $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$。
3. 當X點落在邊上，利用三線共點的判定，若有一組(x,y)同時滿足三條方程式，則行列式值為0。

例2. 若要將四邊形$ABCD$切成5塊等面積三角形，先坐標化並將四塊三角形比例找出，

如圖4-20，

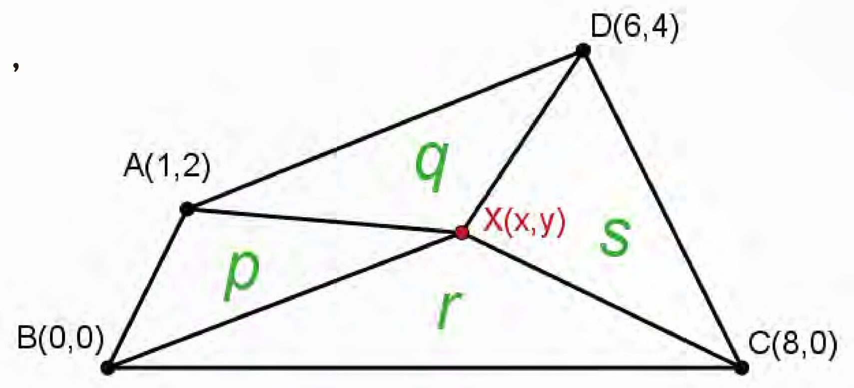


圖4-20

(1) 當X點落在內部時，若$p=1$，$q=1$，$s=1$，$r=2$，則$x_1=x_2=5$且$y_1=y_2=2$，此比例有解。

(2) 當X點落在頂點上，若$p=r=2$，$q=s=3$，則

$$\Delta=\begin{vmatrix}\left(\frac{8+0}{5}-2\right) & \left(1-\frac{12+0}{5}\right)\\ \left(\frac{8+0}{5}-0\right) & \left(8-\frac{12+0}{5}\right)\end{vmatrix}=0，\Delta_x=\begin{vmatrix}\left(2\cdot\frac{12+0}{5}-1\cdot\frac{8+0}{5}\right) & \left(1-\frac{12+0}{5}\right)\\ \left(0\cdot\frac{12+0}{5}-8\cdot\frac{8+0}{5}\right) & \left(8-\frac{12+0}{5}\right)\end{vmatrix}=0，\Delta_y=\begin{vmatrix}\left(\frac{8+0}{5}-2\right) & \left(2\cdot\frac{12+0}{5}-1\cdot\frac{8+0}{5}\right)\\ \left(\frac{8+0}{5}-0\right) & \left(0\cdot\frac{12+0}{5}-8\cdot\frac{8+0}{5}\right)\end{vmatrix}=0。$$

(3) 當X點落在邊上時，若$p=1$，$q=2$，$s=2$，則 $\begin{vmatrix}\left(\frac{4+0}{3}-2\right) & \left(1-\frac{6+0}{3}\right) & \left(2\cdot\frac{6+0}{3}-1\cdot\frac{4+0}{3}\right)\\ \left(\frac{0+0}{2}-0\right) & \left(8-\frac{0+0}{2}\right) & \left(0\cdot\frac{0+0}{2}-8\cdot\frac{0+0}{2}\right)\\ \left(\frac{0+4}{4}-4\right) & \left(6-\frac{16+2}{4}\right) & \left(4\cdot\frac{16+2}{4}-6\cdot\frac{0+4}{4}\right)\end{vmatrix}=0$，

由此3點可知，此四邊形內有$1+4+1=6$個5切等分點，如圖4-21。

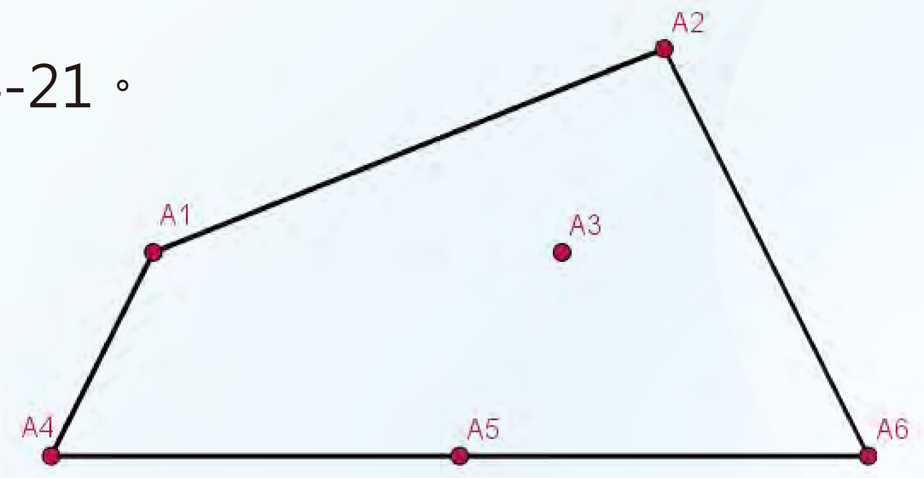


圖4-21

伍、研究結果

根據我們的研究目的，提出研究結果如下：

一、平行四邊形之$2n$切等分點共有$(n+1)^2$個。

二、假設梯形之上底為a，下底為b，高為h，若對任意之正整數n，存在(c_i, d_i)與非負整數α_i，β_i滿足條件，則梯形的n切等分點共有$\sum_{i=1}^{k}(n-\alpha_i-\beta_i+1)$個。

三、令任意凸四邊形$ABCD$之頂點座標為$A=(a_1,a_2)$，$B=(b_1,b_2)$，$C=(c_1,c_2)$，$D=(d_1,d_2)$，其聯立方程式

為 $\begin{cases}\left(\frac{pd_2+qb_2}{p+q}-a_2\right)x+\left(a_1-\frac{pd_1+qb_1}{p+q}\right)y=a_1\cdot\frac{pd_2+qb_2}{p+q}-a_2\cdot\frac{pd_1+qb_1}{p+q}\\ \left(\frac{pc_2+ra_2}{p+r}-b_2\right)x+\left(b_1-\frac{pc_1+ra_1}{p+r}\right)y=b_1\cdot\frac{pc_2+ra_2}{p+r}-b_2\cdot\frac{pc_1+ra_1}{p+r}\\ \left(\frac{rd_2+sb_2}{r+s}-c_2\right)x+\left(c_1-\frac{rd_1+sb_1}{r+s}\right)y=c_1\cdot\frac{rd_2+sb_2}{r+s}-c_2\cdot\frac{rd_1+sb_1}{r+s}\\ \left(\frac{qc_2+sa_2}{q+s}-d_2\right)x+\left(d_1-\frac{qc_1+sa_1}{q+s}\right)y=d_1\cdot\frac{qc_2+sa_2}{q+s}-d_2\cdot\frac{qc_1+sa_1}{q+s}\end{cases}$，簡化為 $\begin{cases}m_{11}x+m_{12}y=m_{13}\\ m_{21}x+m_{22}y=m_{23}\\ m_{31}x+m_{32}y=m_{33}\\ m_{41}x+m_{42}y=m_{43}\end{cases}$，

點$X=(x,y)$為n切等分點，則我們有底下結果：

（一）點X落在凸四邊形$ABCD$之內部時，$x=\frac{m_{13}m_{22}-m_{12}m_{23}}{m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}}, y=\frac{m_{11}m_{23}-m_{13}m_{21}}{m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}}$。

（二）點X落在凸四邊形$ABCD$之頂點時，由克拉瑪公式可知，$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$。

（三）點X在$\overline{AB}$上（不含端點）時，$x=\frac{m_{23}m_{32}-m_{22}m_{33}}{m_{21}m_{32}-m_{22}m_{31}}, y=\frac{m_{21}m_{33}-m_{23}m_{31}}{m_{21}m_{32}-m_{22}m_{31}}$。

（四）點X在$\overline{DA}$上（不含端點）時，$x=\frac{m_{13}m_{22}-m_{12}m_{23}}{m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}}, y=\frac{m_{11}m_{23}-m_{13}m_{21}}{m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}}$。

（五）點X在$\overline{BC}$上（不含端點）時，$x=\frac{m_{13}m_{32}-m_{12}m_{33}}{m_{11}m_{32}-m_{12}m_{31}}, y=\frac{m_{11}m_{33}-m_{13}m_{31}}{m_{11}m_{32}-m_{12}m_{31}}$。

（六）點X在$\overline{CD}$上（不含端點）時，$x=\frac{m_{13}m_{22}-m_{12}m_{23}}{m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}}, y=\frac{m_{11}m_{23}-m_{13}m_{21}}{m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}}$。

陸、討論

一、本研究結果與文獻之異同。

《無限的分割－射線分割點》一文中只討論正方形與正六邊形，並沒有討論其他四邊形，其文章所用之方法為平行法，與本文的比例法不同且所討論的點都在內部，本文進一步討論到頂點與邊上；《點分天下》一文如p3所述，雖然討論到任意凸四邊形，但所討論的面積等分點，其切出的等分面積不一定是三角形，本文則完整討論任意凸四邊形等分點數量。

二、將任意四邊形中 n 切等分點之方法建立程式，並代入本文例子。

（一）首先將 n 切等分點數量之運算方法建立成程式。

（二）以本文所舉過的三種例子代入程式進行驗證。

柒、結論與心得

礙於能研究時間有限，我們暫時討論凸四邊形的部份，在凹四邊形與其他多邊形部份，希望在學到更高深的數學方法或有更多的資源後能繼續深入研究。同時我們也希望未來能嘗試將此運算應用在實務上，如：建築磁磚之切割問題、平面熱量傳遞問題等等。

捌、參考資料及其他

一、許宸碩、陳泓志、張舜嵐、戴武郎（2008）。點分天下。中華民國第四十八屆中小學科學展覽會高中組數學科。

二、危剛、林耿緯、吳宗勳、王志傑、葉淑芬（2011）。無限的分割─射線分割點。全國高級中等學校小論文寫作比賽。