中華民國第57屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第三名

030417

凹凸多邊形 n 等分切割之研究

學校名稱：臺中市立豐南國民中學

作者：	指導老師：
國二 黃琳家 國二 廖云禎 國二 李宜靜	曾智鈿

關鍵詞：面積平分、尺規作圖

摘　　要

此篇研究主要探討凹凸多邊形的面積切割，許多人認為凹多邊形的切割是天方夜譚，但不論是凸多邊形，還是大家避而不談的凹多邊形面積切割，我們都能一般性作圖，甚至嘗試過周邊上一點切割多凹多邊形。此外，我們參照文獻中退化成三邊形的做法，發現其實退化成四邊形即可進行切割，如此一來，便大幅減少繁瑣的作圖步驟。其中，最令人興奮的是，我們成功利用尺規作圖做過外部一點將凹、凸四邊形 n 等分切割，甚至能以一次性作圖將其面積分成 $m：n$ 的面積比例！

壹、　研究動機

平分不管在過去還是未來都是生活中常見的問題，對數學來說更是不可缺少的一份子。我們在國二時遇到了幾何圖形，讓我們把平分與熟悉的幾何圖形搭起了一座橋梁，而我們也觀察到許多人以多邊形切割為主題進行研究，但大多僅限於將圖形變形成為三邊形後，進行 n 等分切割，其中也不包刮凹多邊形的切割，因此許多疑惑便產生了！一定要將多邊形邊變形成為三邊形才可進行嗎？如何將三邊形外一點 n 等分?為什麼大家對凹多邊形切割總是避而不談呢？為了解決這些心中的問題，我們毅然決然決定選擇凹凸多邊形為主題進行研究。

貳、　研究目的

以下各研究目的均以**尺規作圖**為前提之研究：

一、　過頂點切割凸多邊形 n 等分之一般性作法、推論與證明
二、　過頂點切割凹多邊形 n 等分之一般性作法、推論與證明
三、　過周邊上一點切割凸多邊形 n 等分之作法、推論與證明
四、　過周邊上一點切割凹多邊形 n 等分之作法、推論與證明
五、　多凹多邊形周邊一點 n 等分切割之作法
六、　外部一點對三邊形做面積平分線與 n 等分切割線
七、　外部一點對凸、凹四邊形做面積之 n 等分切割線
八、　多邊形面積 $m：n$ 比例切割之一次性作圖

參、　研究設備及器材

一、　筆、紙、電腦、Gsp 繪圖程式

肆、　文獻探討

一、文獻一：「面積平分線知多少」此篇文獻面積平分線部分與文獻四內容大部份雷同，故不詳述。
二、文獻二「從用直線平分凸五邊形的面積談起」裡有詳述凸多邊形 N 等分之想法與證明，其中面積還原的想法（P76.P77）對於我們此篇研究有非常大的幫助。
三、文獻三「怎樣分才公平三角形面積兩等分的尺規作圖」此篇文獻與文獻四內容大部份雷

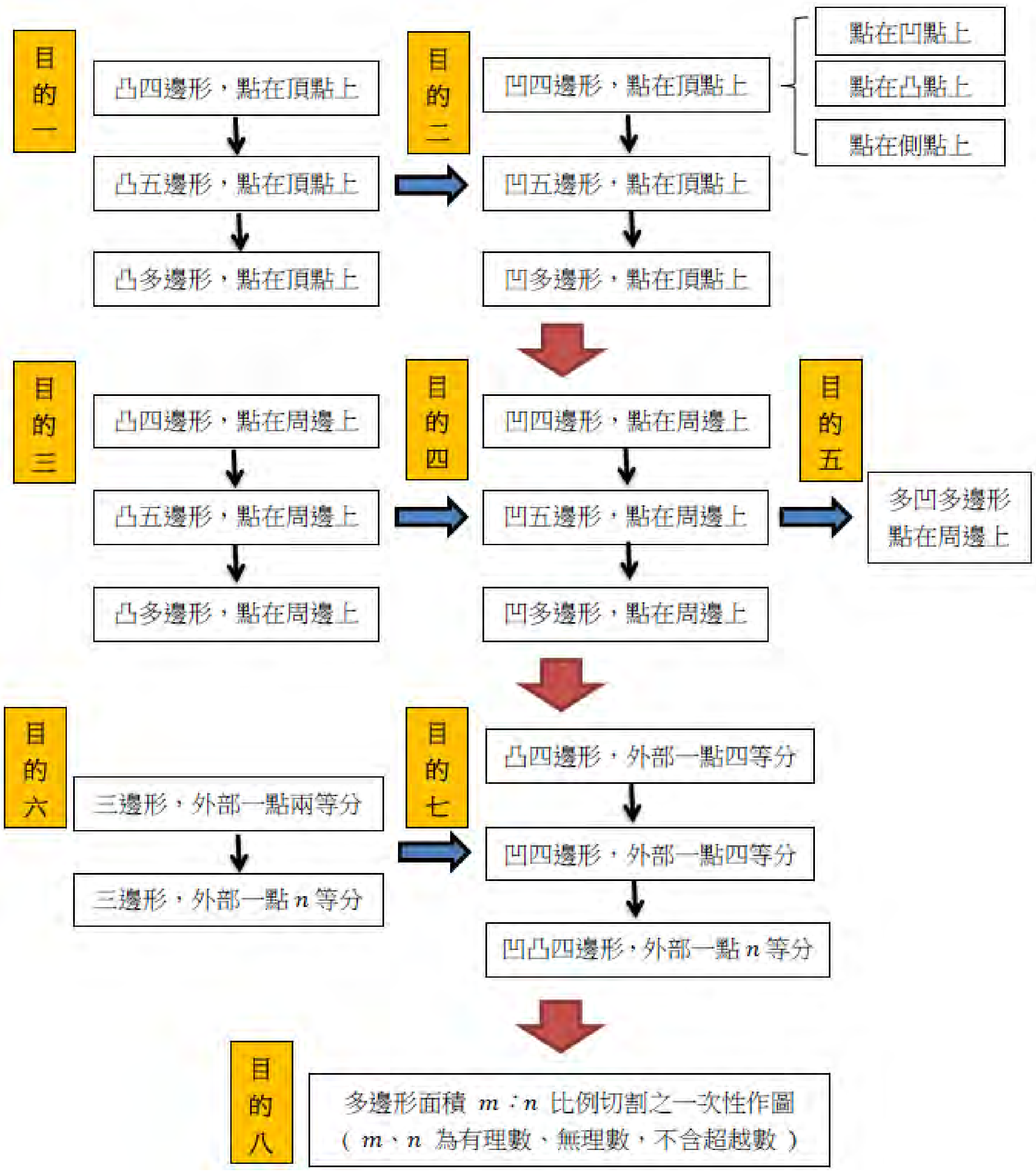
同，故不詳述。

四、文獻四「求過任意點作多邊形面積平分線」參考文獻中，只探討凸多邊形面積「兩等分」之面積平分線，且必須退化成三邊形才可進行作圖；另外，文獻中所提之面積修正，只用想法帶過，無實際作法，故是否可行有待商榷。而我們雖然一樣利用平形線交換面積的方法，卻發現退化成四邊形就可進行分割，不用退化成三邊形，節省相當多的步驟進行切割與還原。

伍、　研究過程及方法

符號定義：

P_i：作圖結果，最後的分割線　　　　Q_i：作圖過程中，線段等分點



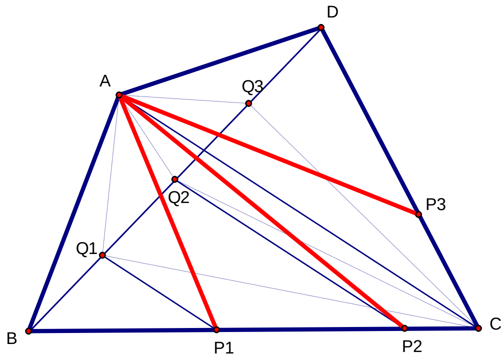
一、過頂點切割凸多邊形之一般性作法、推論與證明

(一) 凸四邊形過頂點A之切割 (四等分為例)：

作法：

1. 連接$\overline{AC}$，$\overline{BD}$
2. 在$\overline{BD}$上取四等分點Q_1、Q_2、Q_3
3. 分別過Q_1、Q_2、Q_3作$\overline{AC}$之平行線交$\overline{BC}$或$\overline{CD}$於P_1、P_2、P_3
4. 連接$\overline{AP_1}$、$\overline{AP_2}$、$\overline{AP_3}$

   則$\Delta ABP_1 = \Delta AP_1P_2 = AP_2CP_3 = \Delta AP_3D$



證明：

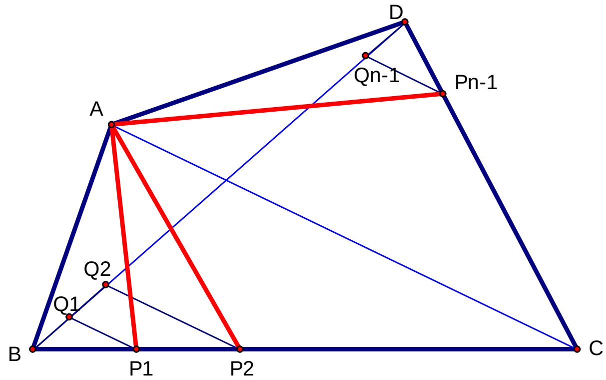
1. 連接$\overline{AQ_1}$、$\overline{AQ_2}$、$\overline{AQ_3}$、$\overline{CQ_1}$、$\overline{CQ_2}$、$\overline{CQ_3}$
2. 因為Q_1、Q_2、Q_3為$\overline{BD}$的四等分點。所以$\Delta ABQ_1 = \Delta AQ_1Q_2 = \Delta AQ_2Q_3 = \Delta AQ_3D = \frac{1}{4}\Delta ABD$，

   $\Delta CBQ_1 = \Delta CQ_1Q_2 = \Delta CQ_2Q_3 = \Delta CQ_3D = \frac{1}{4}\Delta CBD$，故$\Delta ABQ_1 + \Delta CBQ_1 = \Delta AQ_1Q_2 +$

   $\Delta CQ_1Q_2 = \Delta AQ_2Q_3 + \Delta CQ_2Q_3 = \Delta AQ_3D + \Delta CQ_3D = \frac{1}{4}ABCD$
3. 因為$\overline{P_1Q_1}//\overline{P_2Q_2}//\overline{P_3Q_3}//\overline{AC}$，所以$\Delta AP_1Q_1 = \Delta CP_1Q_1$，$\Delta AP_2Q_2 = \Delta CP_2Q_2$，$\Delta AP_3Q_3 = \Delta CP_3Q_3$。故$ABCQ_1 = \Delta ABP_1$，$AQ_1CQ_2 = \Delta AP_1P_2$，$AQ_2CQ_3 = \Delta AP_2CP_3$，$AQ_3CD = \Delta AP_3D$
4. 整理可得$\Delta ABP_1 = \Delta AP_1P_2 = AP_2CP_3 = \Delta AP_3D = \frac{1}{4}ABCD$

一般性推論：

如右圖，連$\overline{AC}$，$\overline{BD}$，作$\overline{BD}$之 n 等分點Q_1、Q_2、…、Q_{n-1}，過Q_1、Q_2、…、Q_{n-1}作$\overline{AC}$的平行線交$\overline{BC}$或$\overline{CD}$於P_1、P_2、…、P_{n-1}，連$\overline{AP_1}$、$\overline{AP_2}$、…、$\overline{AP_{n-1}}$，則$\overline{AP_1}$、$\overline{AP_2}$、…、$\overline{AP_{n-1}}$過頂點 A 將四邊形$ABCD$ n 等分。



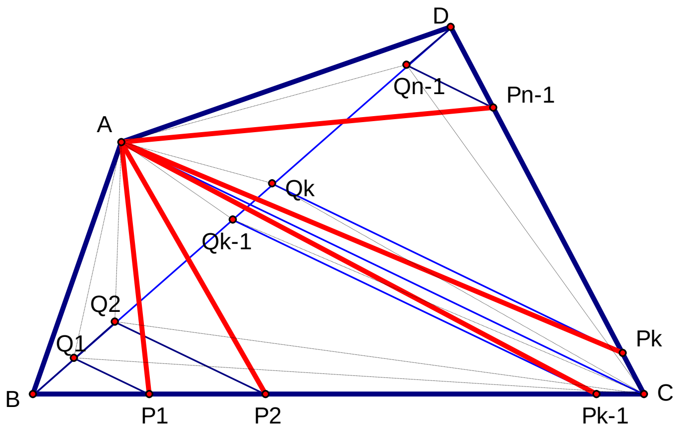
推論證明

1. 連接$\overline{AQ_1}$、$\overline{AQ_2}$、…、$\overline{AQ_{n-1}}$、$\overline{CQ_1}$、$\overline{CQ_2}$、…、$\overline{CQ_{n-1}}$
2. 因為$\Delta ABQ_1 = \Delta AQ_1Q_2 = \cdots = \Delta AQ_{k-1}Q_k =$

   $\cdots = \Delta AQ_{n-1}D = \frac{1}{n}\Delta ABD$，$\Delta CBQ_1 =$

   $\Delta CQ_1Q_2 = \cdots = \Delta CQ_{k-1}Q_k = \cdots =$

   $\Delta CQ_{n-1}D = \frac{1}{n}\Delta CBD$，所以$\Delta ABQ_1 + \Delta CBQ_1 =$



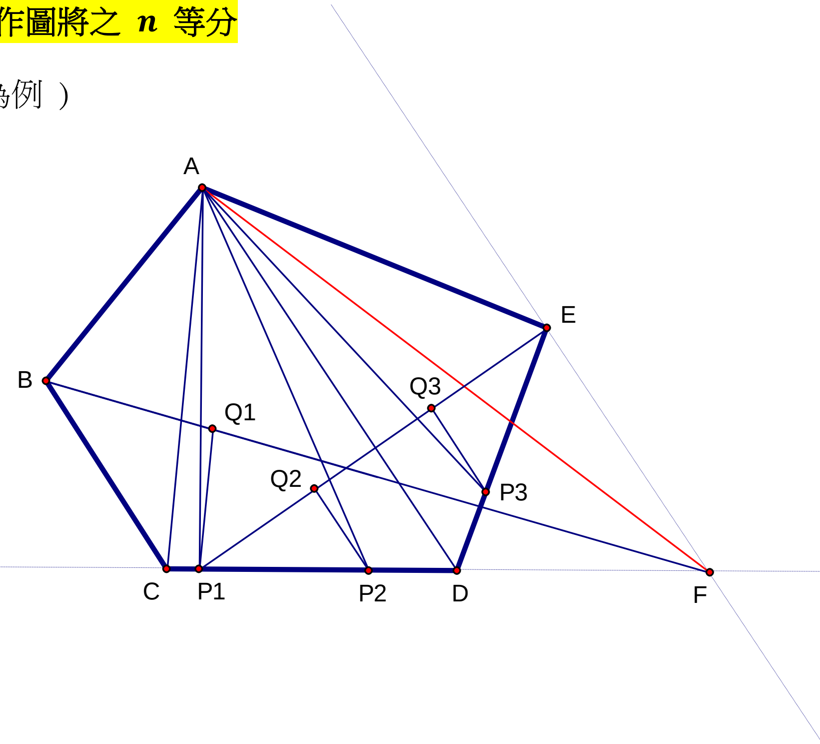
$\Delta AQ_1Q_2 + \Delta CQ_1Q_2 = \cdots = \Delta AQ_{k-1}Q_k + \Delta CQ_{k-1}Q_k = \cdots = \Delta AQ_{n-1}D + \Delta CQ_{n-1}D =$
$\frac{1}{n}(\Delta ABD + \Delta CBD) = \frac{1}{n}ABCD$

3. 又$\overline{P_1Q_1}$ // $\overline{P_2Q_2}$ //⋯// $\overline{P_{k-1}Q_{k-1}}$ //⋯// $\overline{P_{n-1}Q_{n-1}}$ // $\overline{AC}$，所以$\Delta AP_1Q_1 = \Delta CP_1Q_1$，$\Delta AP_2Q_2 = \Delta CP_2Q_2$，⋯，$\Delta AP_{n-1}Q_{n-1} = \Delta CP_{n-1}Q_{n-1}$。故$ABCQ_1 = \Delta ABP_1$，$AQ_1CQ_2 = \Delta AP_1P_2$，⋯，$AQ_{n-1}CD = \Delta AP_{n-1}D$
4. 經整理可得$\Delta ABP_1 = \Delta AP_1P_2 = \cdots = AP_{k-1}CP_{k-1} = \cdots = \Delta AP_{n-1}D = \frac{1}{n}ABCD$

結論：任意凸四邊形，過任意頂點可以尺規作圖將之 n 等分

(二) 凸五邊形過頂點A之切割：(以四等分為例)

作法：



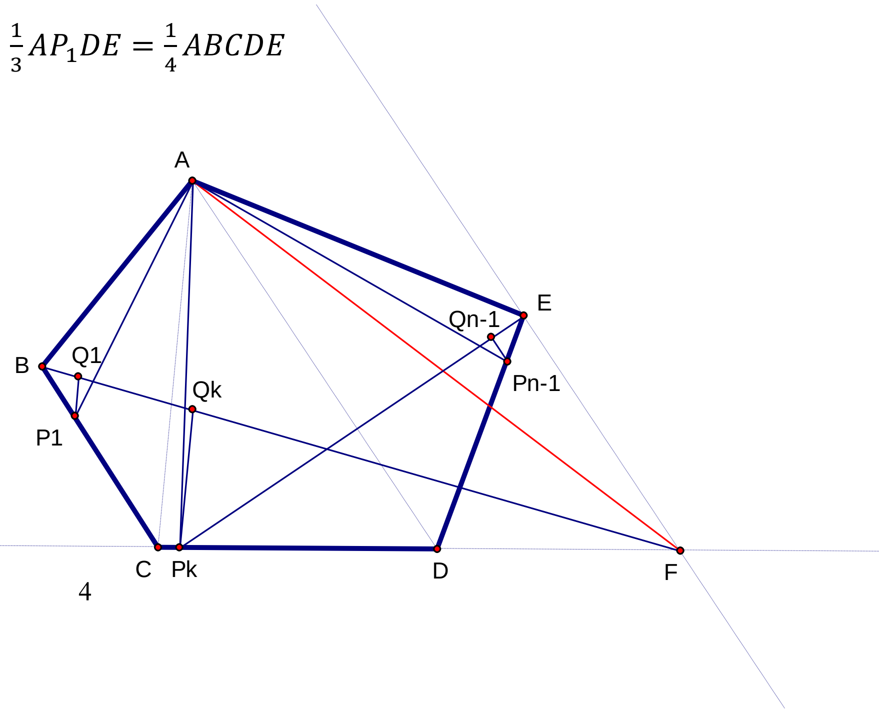
1. 連接$\overline{AD}$，過 E 作$\overline{AD}$之平行線$\overline{EF}$交$\overleftrightarrow{CD}$於 F
2. 連接$\overline{AF}$、$\overline{BF}$、$\overline{AC}$
3. 在$\overline{BF}$上取點Q_1，使得$\overline{BQ_1} = \frac{1}{4}\overline{BF}$，過$Q_1$作$\overline{AC}$之平行線交$\overline{CD}$於$P_1$，連接$\overline{AP_1}$、$\overline{P_1E}$
4. 在$\overline{P_1E}$上取Q_2、Q_3三等分$\overline{P_1E}$
5. 過Q_2、Q_3作$\overline{AD}$之平行線交$\overline{CD}$或$\overline{DE}$於P_2、P_3，連接$\overline{AP_2}$、$\overline{AP_3}$

可得$ABCP_1 = \Delta AP_1P_2 = \Delta AP_2DP_3 = \Delta AP_3E$

證明：

1. 因為$\overline{AD}//\overline{EF}$，所以$\Delta ADE = \Delta ADF$，故$ABCDE = ABCF$
2. 由四邊形的推論可知，$ABCP_1 = \frac{1}{4}ABCF = \frac{1}{4}ABCDE$，而$AP_1DE = \frac{3}{4}ABCDE$
3. 同理，$\Delta AP_1P_2 = AP_2DP_3 = \Delta AP_3E = \frac{1}{3}AP_1DE = \frac{1}{4}ABCDE$

一般性推論：

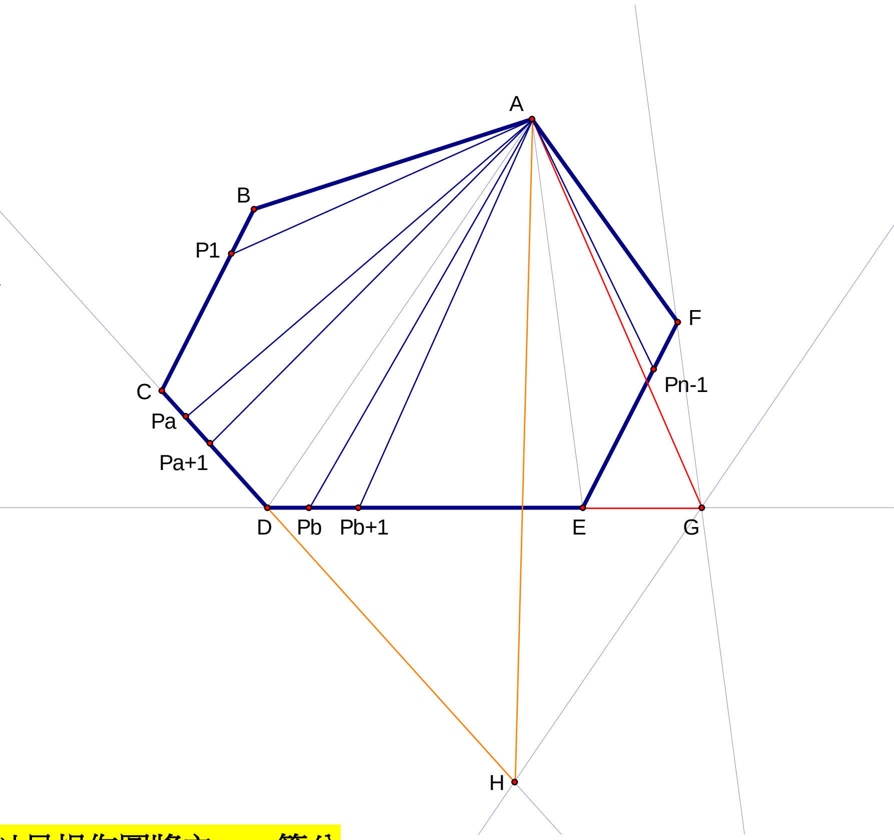


1. 連接$\overline{AD}$，過E作$\overline{AD}$的平行線交$\overleftrightarrow{CD}$於F，則將五邊形$ABCDE$等積變形為四邊形$ABCF$。
2. 過A依照四邊形的分法，當分到k等分時，$\overline{AP_k}$第一次通過$\overline{AC}$，則還原剩餘的圖形為四邊形AP_kDE，再過A將AP_kDE圖形$(n-k)$等分。

(三) 凸 n 邊形過頂點A切割之推論：

($n \geq 6$)

1. 如圖，將六邊形$ABCDEF$變形為等積的五邊形$ABCDG$；同理，再將五邊形$ABCDG$變形為等積的四邊形$ABCH$。
2. 接著依照四邊形的分法，當分到a等份時，$\overline{AP_a}$第一次通過$\overline{AC}$，還原圖形為四邊形AP_aDG，繼續利用四邊形的方法切割。
3. 當分到b等份時，$\overline{AP_b}$第一次通過$\overline{AD}$，再還原圖形為四邊形AP_bEF。
4. 以四邊形的方法再切$(n-b)$次即可。



結論：任意凸 n 邊形，過任意頂點可以尺規作圖將之 m 等分

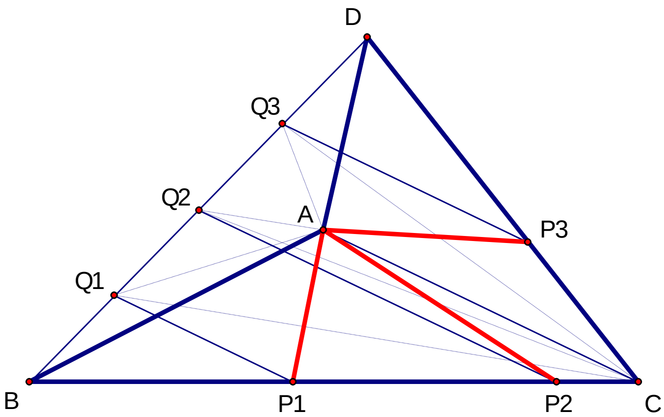
二、過頂點切割凹多邊形之一般性作法、推論與證明

(一) 凹四邊形過頂點之切割〔凹點A切割四等分為例〕：

作法：

1. 連接$\overline{AC}$、$\overline{BD}$
2. 在$\overline{BD}$上取四等分點Q_1、Q_2、Q_3
3. 分別過Q_1、Q_2、Q_3作$\overline{AC}$之平行線交$\overline{BC}$或$\overline{CD}$於P_1、P_2、P_3
4. 連接$\overline{AP_1}$、$\overline{AP_2}$、$\overline{AP_3}$

故$\overline{AP_1}$、$\overline{AP_2}$、$\overline{AP_3}$過頂點A四等分$ABCD$



證明：

1. 連接$\overline{AQ_1}$、$\overline{AQ_2}$、$\overline{AQ_3}$、$\overline{CQ_1}$、$\overline{CQ_2}$、$\overline{CQ_3}$
2. 因為Q_1、Q_2、Q_3為$\overline{BD}$的四等分點，所以$\Delta ABQ_1 = \Delta AQ_1Q_2 = \Delta AQ_2Q_3 = \Delta AQ_3D = \frac{1}{4}\Delta ABD$，

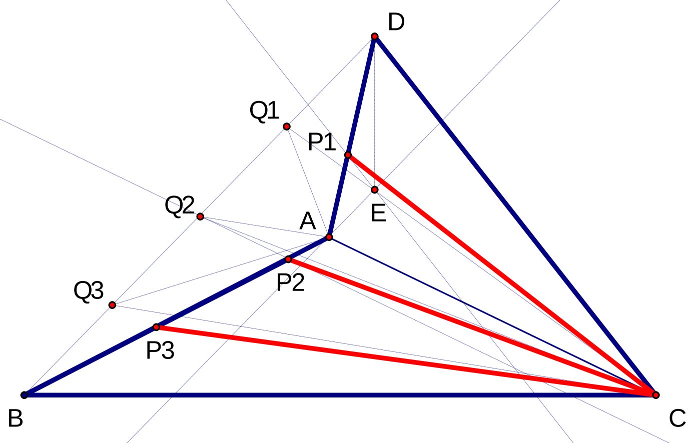
   $\Delta CBQ_1 = \Delta CQ_1Q_2 = \Delta CQ_2Q_3 = \Delta CQ_3D = \frac{1}{4}\Delta CBD$。故$\Delta CBQ_1 - \Delta ABQ_1 = \Delta CQ_1Q_2 -$

   $\Delta AQ_1Q_2 = \Delta CQ_2Q_3 - \Delta AQ_2Q_3 = \Delta CQ_3D - \Delta AQ_3D = \frac{1}{4}ABCD$
3. 又$\overline{P_1Q_1}$ // $\overline{P_2Q_2}$// $\overline{P_3Q_3}$// $\overline{AC}$，所以$\Delta AP_1Q_1 = \Delta CP_1Q_1$，$\Delta AP_2Q_2 = \Delta CP_2Q_2$，$\Delta AP_3Q_3 = \Delta CP_3Q_3$。所以$\Delta CBQ_1 - \Delta ABQ_1 = AP_1BQ_1 - \Delta ABQ_1 = \Delta ABP_1$，同理$\Delta CQ_1Q_2 - \Delta AQ_1Q_2 = \Delta AP_1P_2$，$\Delta CQ_2Q_3 - \Delta AQ_2Q_3 = AP_2CP_3$，$\Delta CQ_3D - \Delta AQ_3D = \Delta AP_3D$
4. 經整理可得$\Delta ABP_1 = \Delta AP_1P_2 = AP_2CP_3 = \Delta AP_3D = \frac{1}{4}ABCD$

(二) 凹四邊形過頂點之切割﹝凸點C切割四等分為例﹞：

作法：

1. 連接$\overline{AC}$、$\overline{BD}$
2. 在$\overline{BD}$上取四等分點Q_1、Q_2、Q_3，連接$\overline{AQ_1}$、$\overline{AQ_2}$、$\overline{AQ_3}$、$\overline{CQ_1}$、$\overline{CQ_2}$、$\overline{CQ_3}$
3. 過A作$\overline{BD}$之平行線交$\overline{CQ_1}$於E，過E作$\overline{CD}$之平行線交$\overline{AD}$於P_1，連接$\overline{CP_1}$
4. 過Q_2作$\overline{AC}$之平行線交$\overline{AB}$於P_2，連接$\overline{CP_2}$
5. 取$\overline{BP_2}$中點P_3，連接$\overline{CP_3}$



則$\overline{CP_1}$、$\overline{CP_2}$、$\overline{CP_3}$過頂點A四等分$ABCD$

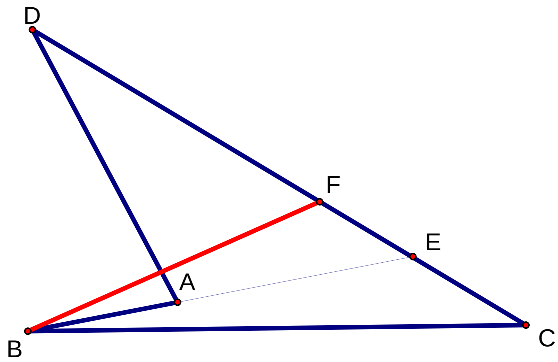
證明：

1. 連接$\overline{AQ_1}$、$\overline{AQ_2}$、$\overline{AQ_3}$、$\overline{CQ_1}$、$\overline{CQ_2}$、$\overline{CQ_3}$
2. 因為Q_1、Q_2、Q_3為$\overline{BD}$的四等分點，所以$\Delta ABQ_3 = \Delta AQ_3Q_2 = \Delta AQ_2Q_1 = \Delta AQ_1D = \frac{1}{4}\Delta ABD$，$\Delta CBQ_3 = \Delta CQ_3Q_2 = \Delta CQ_2Q_1 = \Delta CQ_1D = \frac{1}{4}\Delta CBD$。故$\Delta CBQ_3 - \Delta ABQ_3 = \Delta CQ_3Q_2 - \Delta AQ_3Q_2 = \Delta CQ_2Q_1 - \Delta AQ_2Q_1 = \Delta CQ_1D - \Delta AQ_1D = \frac{1}{4}ABCD$
3. 又$\Delta CQ_1D - \Delta AQ_1D = \Delta CQ_1D - \Delta EQ_1D = \Delta CED = \Delta CP_1D = \frac{1}{4}ABCD$。$\Delta CQ_2D - \Delta AQ_2D = CQ_2AD = CP_2AD = \frac{2}{4}ABCD$，故$CP_2AP_1 = \frac{1}{4}ABCD$。且$P_3$為$\overline{BP_2}$之中點，所以$\Delta CP_2P_3 = \Delta CP_3B = \frac{1}{4}ABCD$

經整理可得$\Delta CDP_1 = CP_1AP_2 = \Delta CP_2P_3 = \Delta CP_3B = \frac{1}{4}ABCD$

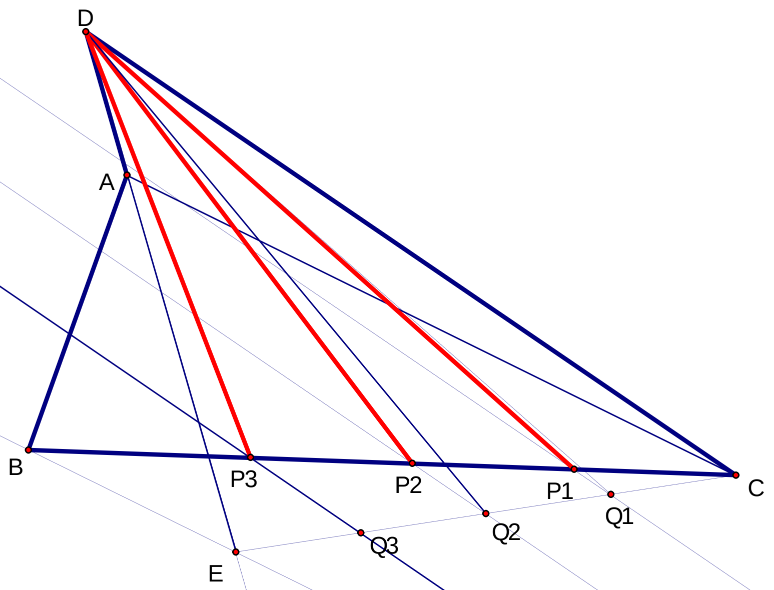
(三) 凹四邊形過頂點之切割﹝側點B、D切割﹞：

凹多邊形切割問題應先判斷題目是否有解，如右圖所示：若以B為分割點，欲將$ABCD$兩等份，延長$\overline{AB}$交$\overline{CD}$於E，故最大切割圖形為ΔBCE，若$\Delta BCE < \frac{1}{2}ABCD$，**會發生切割線$\overline{BF}$有部分線段在圖形外的情況，我們將之定義為$\boxed{\text{無解}}$**。因此，需在有解的情況之下，方能討論側點切割的情況。



凹四邊形側點D有解情況下切割作法：

1. 連$\overline{AC}$，過B作$\overline{AC}$的平行線交$\overline{DA}$的延長線於E。
2. 取$\overline{CE}$上取四等分點Q_1、Q_2、Q_3，並連接$\overline{Q_1D}$、$\overline{Q_2D}$、$\overline{Q_3D}$。
3. 分別過Q_1、Q_2、Q_3作$\overline{CD}$的平行線交$\overline{BC}$於P_1、P_2、P_3。
4. 連接$\overline{DP_1}$、$\overline{DP_2}$、$\overline{DP_3}$。



則$\overline{DP_1}$、$\overline{DP_2}$、$\overline{DP_3}$四等分$ABCD$

證明：

1. 連接$\overline{Q_1D}$、$\overline{Q_2D}$、$\overline{Q_3D}$、$\overline{DP_1}$、$\overline{DP_2}$、$\overline{DP_3}$。
2. 因為為$\overline{BE}\ //\ \overline{AC}$，所以$ABCD = \Delta CDE$。且$Q_1$、$Q_2$、$Q_3$為$\overline{CE}$的四等分點，故$\Delta CQ_1D = \Delta Q_1Q_2D = \Delta Q_2Q_3D = \Delta Q_3ED = \frac{1}{4}\Delta CDE = \frac{1}{4}ABCD$。
3. 因為為$\overline{Q_1P_1}\ //\ \overline{CD}$，所以$\Delta CQ_1D = \Delta CP_1D = \frac{1}{4}ABCD$。同理，$\Delta CQ_2D = \Delta CP_2D = \frac{2}{4}ABCD$，$\Delta CQ_3D = \Delta CP_3D = \frac{3}{4}ABCD$。

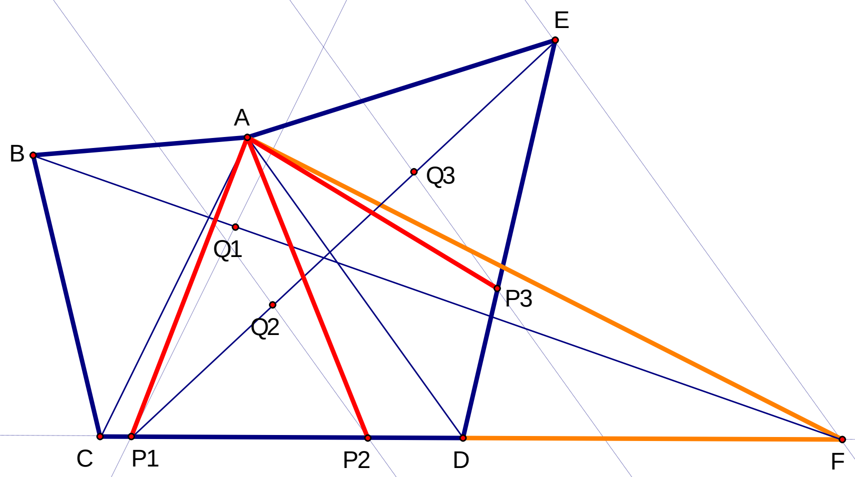
經整理可得$\Delta CP_1D = \Delta P_1P_2D = \Delta P_2P_3D = DP_3BA = \dfrac{1}{4}ABCD$

結論：凹四邊形過頂點 n 等分切割只能由A、C兩點〔凹凸點〕與有解情形下的側點切割。

(四) 凹五邊形過頂點A之切割〔凹點A切割四等分為例〕：

作法：

1. 連$\overline{AD}$，過E作$\overline{AD}$的平行線交$\overline{CD}$的延長線於F，連$\overline{AF}$、$\overline{AC}$、$\overline{BF}$。
2. 在$\overline{BF}$上取Q_1，使得$\overline{BQ_1} = \frac{1}{4}\overline{BF}$；過$Q_1$作$\overline{AC}$的平行線交$\overline{CD}$於$P_1$，連接$\overline{AP_1}$。



3. 連接$\overline{P_1E}$，取$\overline{P_1E}$三等分點Q_2、Q_3。分別過Q_2、Q_3作$\overline{AD}$的平行線交$\overline{CD}$或$\overline{DE}$於P_2、P_3。
4. 連接$\overline{AP_2}$、$\overline{AP_3}$。

則$\overline{AP_1}$、$\overline{AP_2}$、$\overline{AP_3}$四等分$ABCDE$

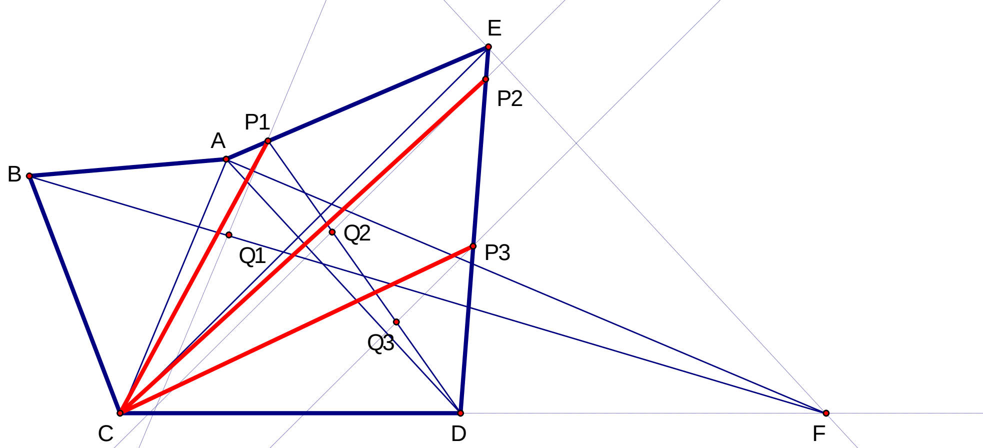
證明：

1. 因為$\overline{EF}\ //\ \overline{AD}$，所以$ABCDE = ABCF$。且$\overline{BQ_1} = \frac{1}{4}\overline{BF}$，$\overline{P_1Q_1}\ //\ \overline{AC}$，故$ABCQ_1 = ABCP_1 = \frac{1}{4}ABC\mathrm{F} = \frac{1}{4}ABCDE$。

2. 連接$\overline{AQ_2}$、$\overline{Q_2D}$，$AP_1DQ_2 = \Delta AP_1P_2 = \frac{1}{3}AP_1DE = \frac{1}{3}.\frac{3}{4}ABCDE = \frac{1}{4}ABCDE$。同理，$AP_2DP_3 = \Delta AP_3E = \frac{1}{4}ABCDE$。

故$ABCP_1 = \Delta AP_1P_2 = AP_2DP_3 = \Delta AP_3\mathrm{E} = \frac{1}{4}ABCDE$

3. 如右圖，由 C 或 D 分割，
亦是如此。



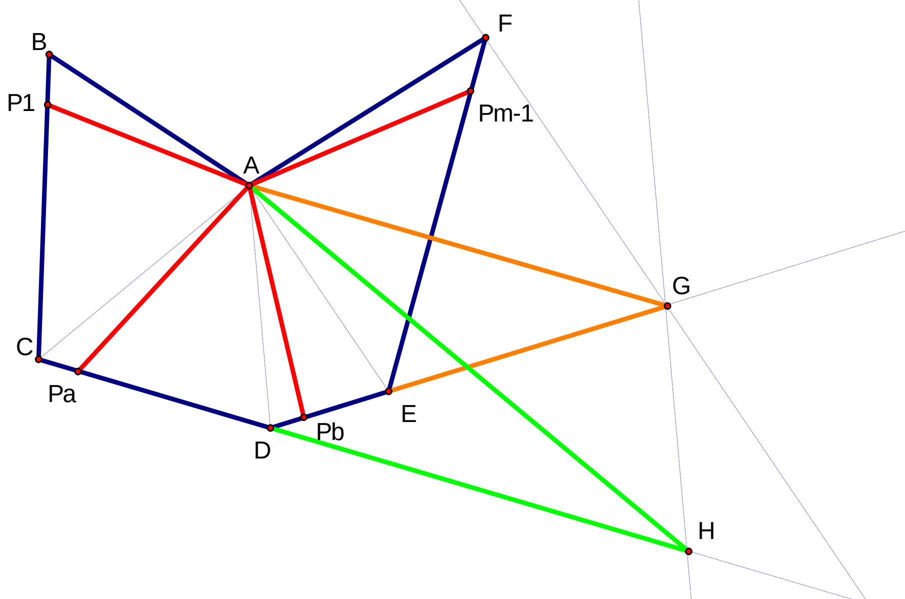
推論：

凹五邊形之 n 等分完全依照凸五邊形之作法，當凹五邊形變形為等積的四邊形時，可能為凸四邊形、凹四邊形、甚至三角形〔B、A、F 共線〕，但作法仍相同。

(五) 凹 n 邊形過凹點A切割之一般性推論：($n \geq 6$)

將凹六邊形$ABCDEF$逐漸變形為等積$ABCDG$、$ABCH$後，再依四邊形過頂點作法分之。若切割過$\overline{AC}$後，還原成四邊形AP_aDG再分割；過$\overline{AD}$後，還原成四邊形AP_bEF再分割。

同理，便能將凹 n 邊形過A，m 等份。



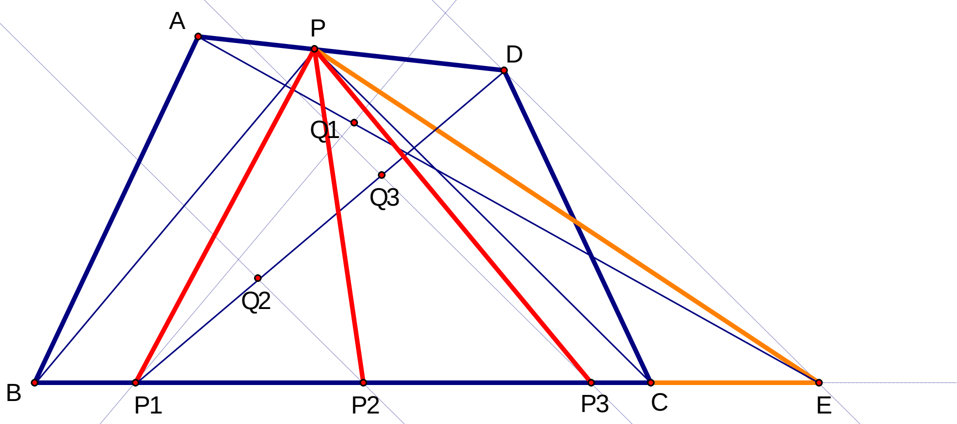
結論：任意凹 n 邊形，過頂點 (有解情況下) 可以尺規作圖將之 m 等分

三、過周邊上一點切割凸多邊形之作法、推論與證明

(一) 凸四邊形過周邊一點 P 之切割：(以四等分為例)

作法：

1. 連$\overline{PC}$，過D作$\overline{PC}$之平行線交$\overline{BC}$之延長線於E。
2. 連接$\overline{PE}$、$\overline{AE}$、$\overline{PB}$，作 $\overline{AQ_1} = \frac{1}{4}\overline{AE}$。
3. 過Q_1作$\overline{PB}$之平行線交$\overline{BE}$於P_1；連接$\overline{PP_1}$、$\overline{P_1D}$。
4. 作$\overline{P_1D}$之三等分點Q_2、Q_3；過Q_2、Q_3作$\overline{PC}$之平行線交$\overline{BC}$或$\overline{CD}$於P_2、P_3，連接$\overline{PP_2}$、$\overline{PP_3}$。



則$PABP_1 = \Delta PP_1P_2 = \Delta PP_2P_3 = PP_3CD = \dfrac{1}{4}ABCD$

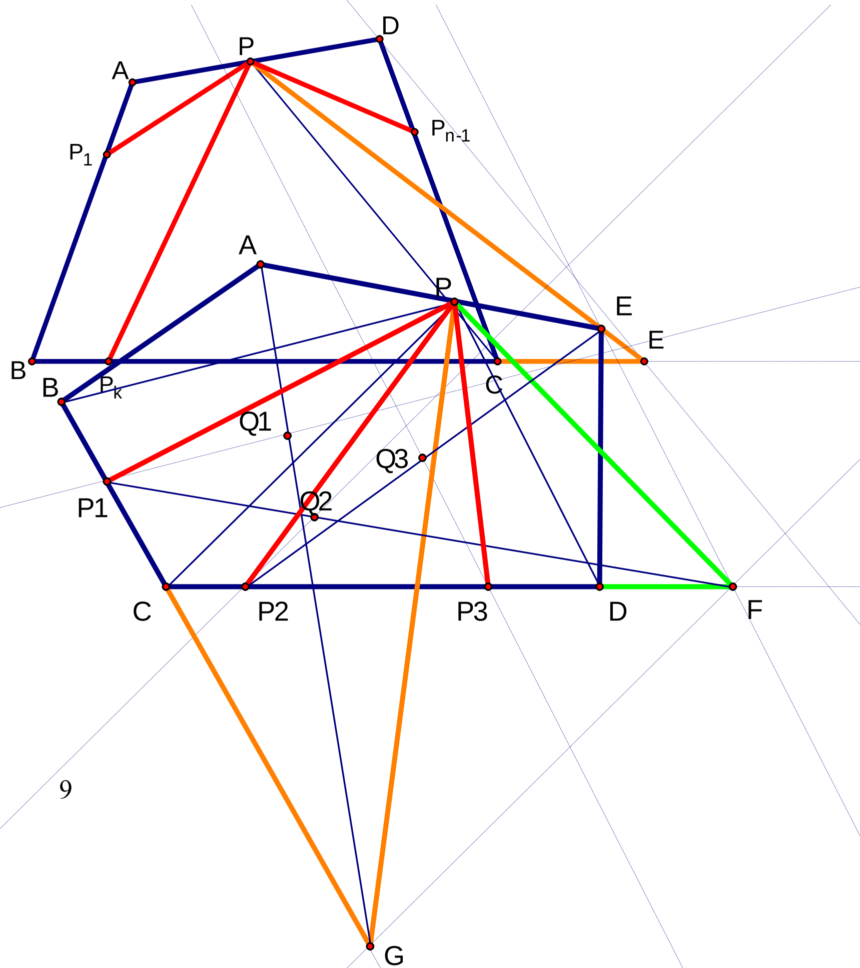
證明：

1. 因為$\overline{PC}\ //\ \overline{DE}$，所以$\Delta PDC = \Delta PEC$，則$ABCD = ABEP$。
2. 由四邊形的推論可知：$ABP_1P = \frac{1}{4}ABEP = \frac{1}{4}ABCD$；$\Delta PP_1P_2 = \Delta PP_2P_3 = PP_3CD =$

   $\frac{1}{3}PP_1CD = \frac{1}{3}.\frac{3}{4}ABCD = \frac{1}{4}ABCD$

一般性推論：

先將四邊形$ABCD$等積變形為四邊形$ABEP$﹝使P成為頂點﹞，過P分割圖形，當分到 k 次時，$\overline{PP_k}$第一次通過$\overline{AB}$，則還原圖形為PP_kCD，再將之$(n-k)$等分。



結論：任意凸四邊形，可過邊上任一點將之 n 等分。

(二) 凸五邊形過周邊 P 一點之切割：

作法：

1. 連$\overline{PD}$，過E作$\overline{PD}$之平行線交$\overline{CD}$之延長線於F；連$\overline{PC}$，過F作$\overline{PC}$之平行線交$\overline{BC}$之延長線於G。
2. 連接$\overline{AG}$，作$\overline{AQ_1}=\frac{1}{4}\overline{AG}$；連$\overline{BP}$，過$Q_1$作$\overline{BP}$之平行線交$\overline{BC}$於$P_1$，連接$\overline{PP_1}$。
3. 連接$\overline{P_1F}$，作$\overline{P_1Q_2}=\frac{1}{3}\overline{P_1F}$，過$Q_2$作$\overline{PC}$之平行線交$\overline{CD}$於$P_2$，連接$\overline{PP_2}$。
4. 連$\overline{P_2E}$，取$\overline{P_2E}$中點Q_3，過Q_3作$\overline{PD}$之平行線交$\overline{CD}$於P_3，連接$\overline{PP_3}$

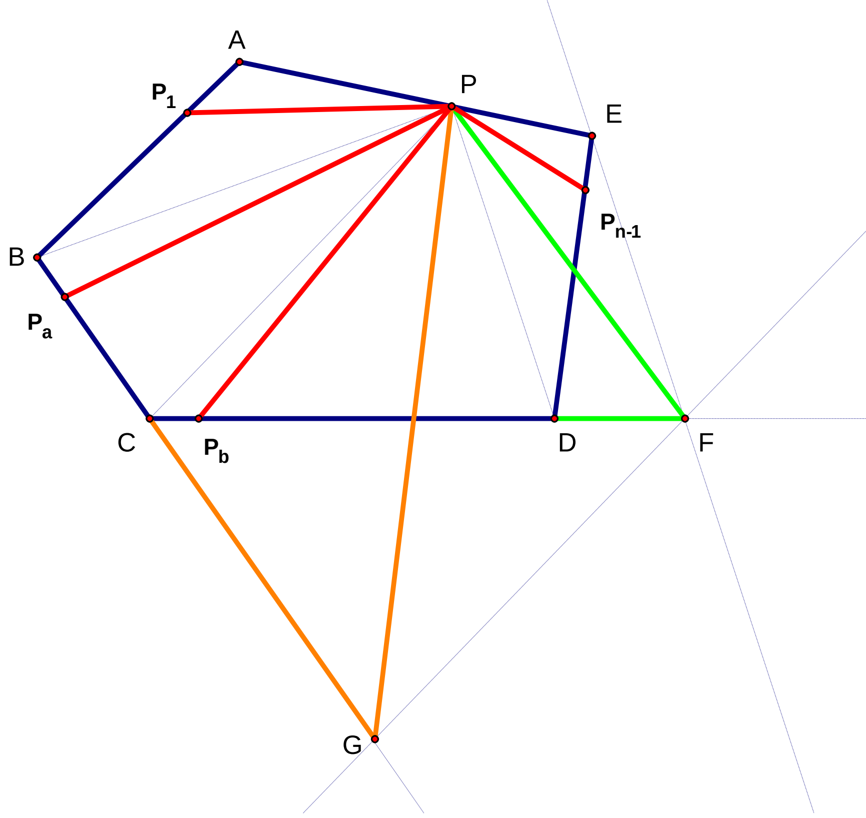
故$PABP_1=PP_1CP_2=\Delta PP_2P_3=PP_3DE=\frac{1}{4}ABCDE$

證明：

1. 因為$\overline{DP}\ //\ \overline{EF}$、$\overline{CP}\ //\ \overline{FG}$，所以$\Delta DPE=\Delta DPF$，$\Delta CPF=\Delta CPG$。則$ABCDE=ABCFP=ABGP$。
2. 根據四邊形的推論得$\mathrm{P}ABP_1=\frac{1}{4}ABGP=\frac{1}{4}ABCDE$，$\mathrm{PP}_1CP_2=\frac{1}{3}PP_1CF=\frac{1}{3}.\frac{3}{4}ABCDE=\frac{1}{4}ABCDE$，$\Delta PP_2P_3=\mathrm{PP}_3\mathrm{DE}=\frac{1}{2}PP_2DE=\frac{1}{2}.\frac{2}{4}ABCDE=\frac{1}{4}ABCDE$，得證。

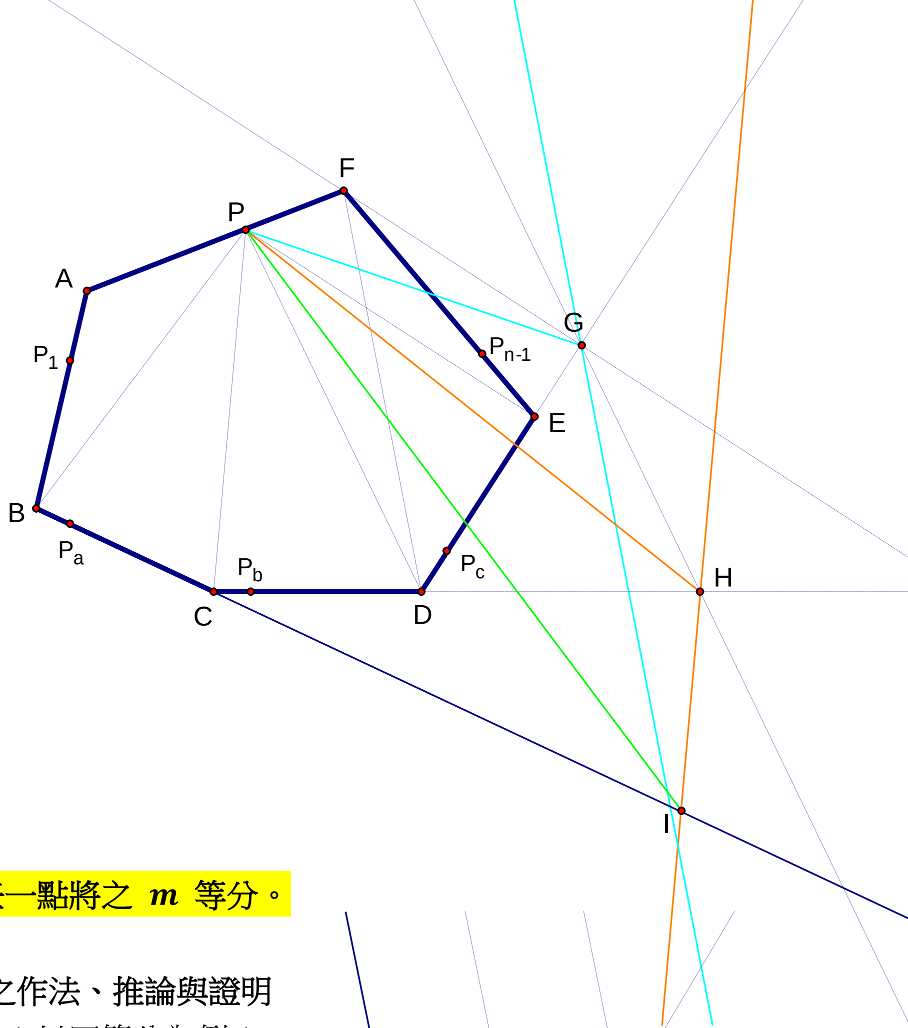
推論：

將五邊形$ABCDE$等積變形為五邊形$ABCFP$，再將之等積變形為四邊形$ABGP$。依照四邊形過頂點作法，當$\overline{PP_a}$第一次通過$\overline{PB}$，還原剩餘的圖形為四邊形PP_aCF；當$\overline{PP_b}$第一次通過$\overline{PC}$，則還原剩餘的圖形為四邊形PP_bDE，再將之$(n-b)$等分。



(三) 凸 n 邊形推論($n \geq 6$)：

如右圖，將六邊形$ABCDEF$逐步變形為$PABCDG$、$PABCH$、$PABI$後，再依照四邊形過頂點的作法，逐步進行切割與還原成四邊形。便能將一凸 n 邊形，過邊上任一點將之 m 等分。



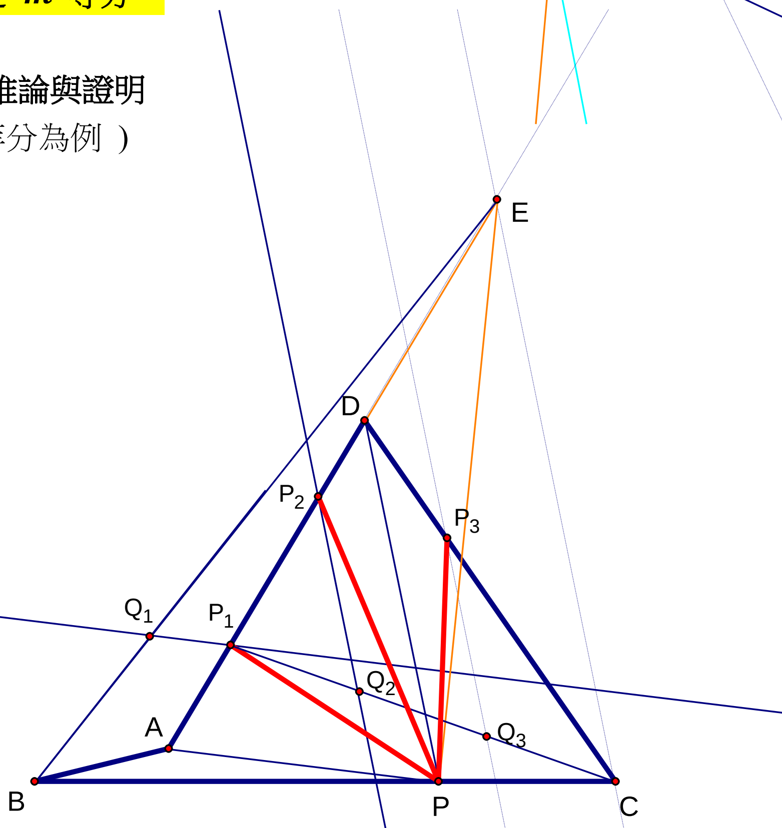
結論：任意凸 n 邊形，可過周邊上任一點將之 m 等分。

四、 過周邊上一點 P 切割凹多邊形之作法、推論與證明

(一) 凹四邊形過周邊一點 P 之切割：(以四等分為例)

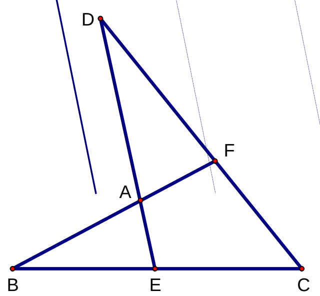
作法：

1. 連$\overline{PD}$，過C作$\overline{PD}$之平行線交$\overline{AD}$之延長線於E，連$\overline{PE}$。
2. 連$\overline{PA}$、$\overline{BE}$，作$\overline{BQ_1} = \frac{1}{4}\overline{BE}$，作$\overline{Q_1P_1} // \overline{AP}$交$\overline{AD}$於$P_1$，連$\overline{CP_1}$、$\overline{PP_1}$。
3. 在$\overline{CP_1}$上取Q_2、Q_3，使$\overline{P_1Q_2} = \overline{Q_2Q_3} = \overline{Q_3C} = \frac{1}{3}\overline{CP_1}$。
4. 過Q_2、Q_3，作$\overline{PD}$之平行線交$\overline{AD}$、$\overline{CD}$於P_2、P_3，連$\overline{PP_2}$、$\overline{PP_3}$。



證明：

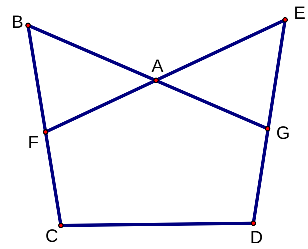
1. 因為$\overline{PD} // \overline{CE}$，所以$\Delta PDE = \Delta CDP$
故$ABCD = ABPE$
2. 以下同凹四邊形之證明方法。



推論：

若 P 點欲將原凹四邊形變形為等積之四邊形進行切割；P點位置需在$\overline{CE}$ 或 $\overline{CF}$上；否則會有無解情況產生。

凹五邊形的情況亦是如此；作法完全依照凸五邊形的作法；但周邊 P 點的位置依舊只能在$\overline{CF}$、$\overline{CD}$、$\overline{DG}$上；否則會有無解情況產生，做法如下：



(二) 凹五邊形過周邊一點 P 之切割：(四等分為例)

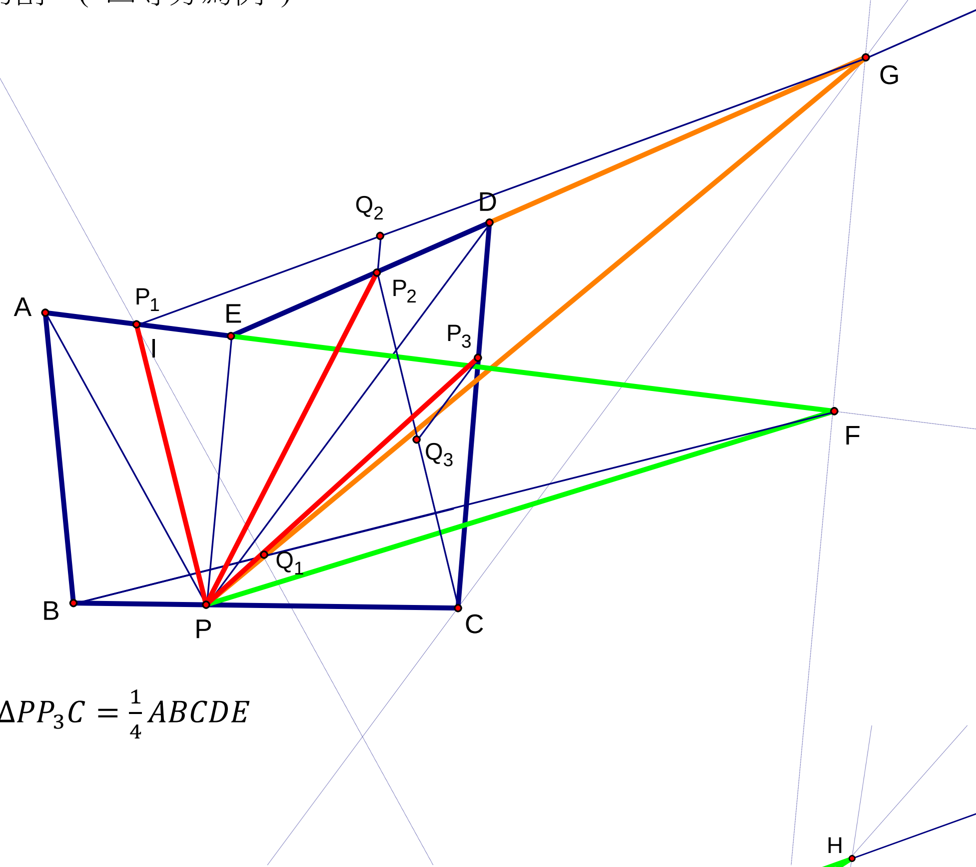
作法：

1. 連接$\overline{PA}$、$\overline{PE}$、$\overline{PD}$；過C作$\overline{PD}$之平行線交$\overline{ED}$於G。
2. 過G作$\overline{PE}$之平行線交$\overrightarrow{AE}$於F。
3. 依照四邊形過頂點的作法

   使$ABPP_1 = \frac{1}{4}ABPF$，

   $PP_1EP_2 = \frac{1}{3}PP_1EG$，再將

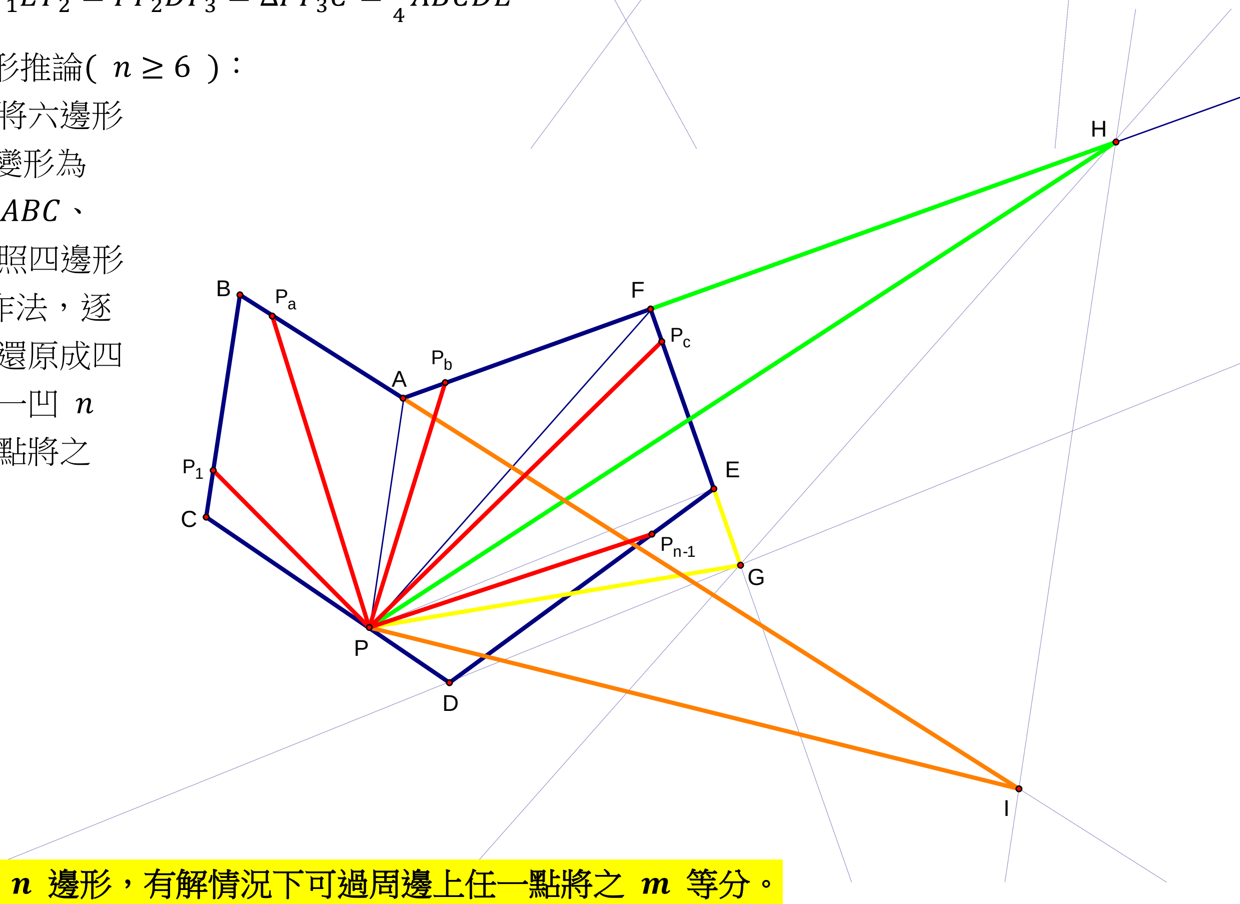
   PP_2DC二等分



故$PP_1AB = PP_1EP_2 = PP_2DP_3 = \Delta PP_3C = \frac{1}{4}ABCDE$

(三) 凹 n 邊形推論($n \geq 6$)：

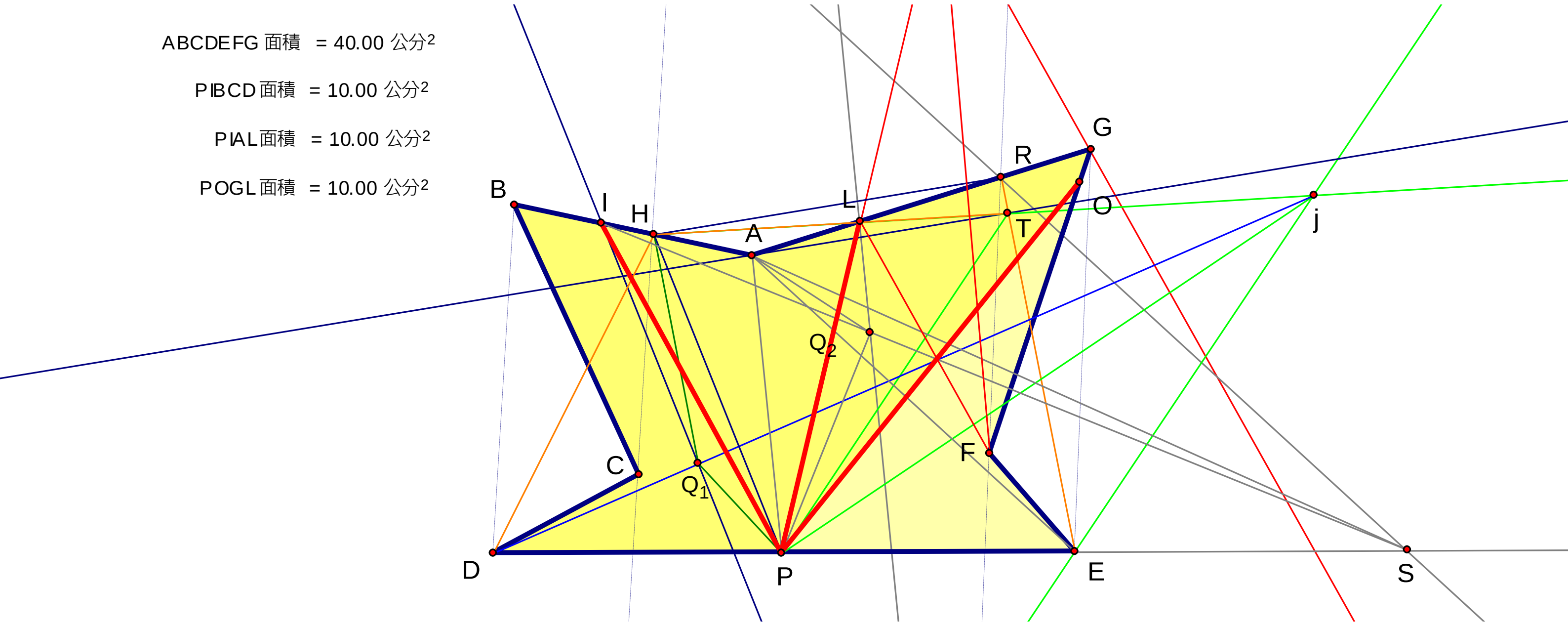
如右圖，將六邊形$ABCDEF$逐步變形為$PGFABC$、$PHABC$、$PIBC$後，再依照四邊形過頂點 P 的作法，逐步進行切割與還原成四邊形。便能將一凹 n 邊形過邊上一點將之 m 等分。



結論：任意凹 n 邊形，有解情況下可過周邊上任一點將之 m 等分。

五、 多凹多邊形周邊一點 P 之切割

若遇到多凹多邊形作面積平分問題，我們採取相同想法將之變成等積凸多邊形，再進行切割；作圖過程雖較為繁瑣，但依舊可行。又因為過頂點容易有無解的情況發生，因此我們不討論。作法如下圖所示：



作法：

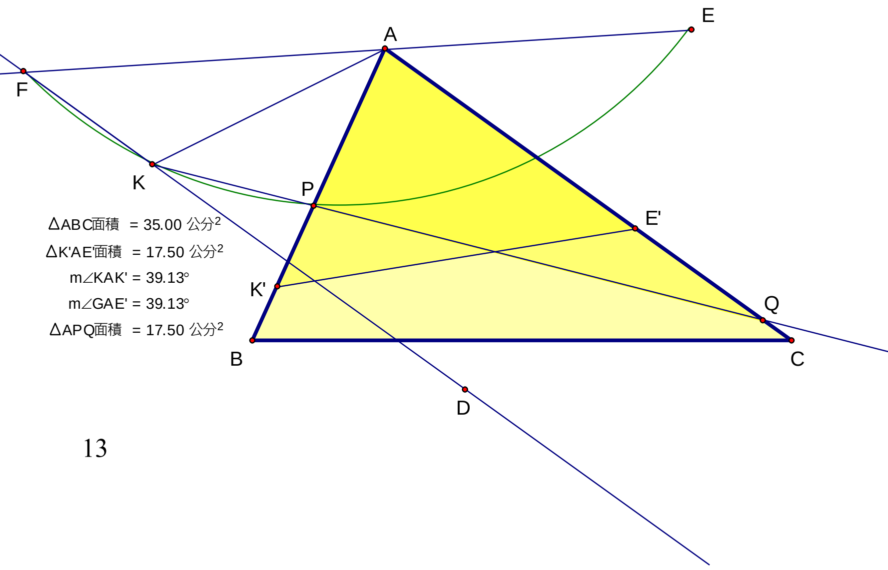
1. 先將$ABCDEFG$逐漸變形為$HDEFGA$、$HDERA$、$HDET$、$PjHD$後，利用凸四邊形周邊一點 P 做切割，可得$PQ_1HD = PQ_1HBCD = PIBCD = \frac{1}{4}ABCDEFG$。
2. 右部分還原成$AIPEFG$，再變形為等積$AIPER$、$AIPS$，利用凸四邊形頂過點切割，可得$PQ_2AI = PLAI = \frac{1}{3}.\frac{3}{4}ABCDEFG = \frac{1}{4}ABCDEFG$。
3. 最後利用凹五邊形$LPEFG$過頂點 P 切割兩等分，可得$POGL = PEFO = \frac{1}{4}ABCDEFG$。
4. $\overline{PI}$、$\overline{PL}$、$\overline{PO}$過頂點 P將$ABCDEFG$四等分。

證明：同上述各研究目的之想法與證明，故省略。

六、 外部一點 K 對三邊形做面積平分線與 n 等分平分線

(一) 外部一點 K 對三邊形做面積平分線作法：(華祥志[4]，問題 4)

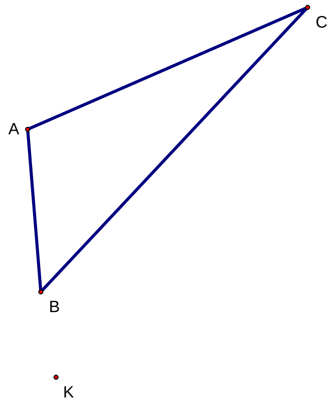
1. 在$\overline{AB}$上取K′，使得$\overline{AK'} = \overline{AK}$，並過K′作$\Delta ABC$之面積平分線$\overline{K'E'}$。
2. 複製$\angle K'AE = \angle KAE'$，過$K$作$\overline{AC}$的平行線交$\overline{AE}$於$F$點。
3. 過K、E、F三點作圓交$\overline{AB}$於P，作$\overrightarrow{KP}$直線交$\overline{AC}$於Q。



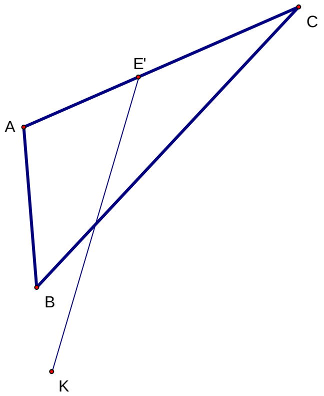
故$\overrightarrow{KQ}$過K，且平分ΔABC。

證明：

1. 因為$\angle PAE = \angle KAQ$，且$\angle AEP + \angle FKP = 180°$（圓內接四邊形對角互補），又$\angle AQK = \angle QKD$（內錯角），所以$\angle FKP + \angle QKD = \angle FKP + \angle AQK = 180°$；故$\angle AEP = \angle AQK$
2. 所以$\Delta APE \sim \Delta AKQ$（$AA$相似），故$\overline{AP}：\overline{AK} = \overline{AE}：\overline{AQ} = \overline{PE}：\overline{KQ}$。
   則$\overline{AP} \times \overline{AQ} = \overline{AK} \times \overline{AE} = \overline{AK'} \times \overline{AE'}$
3. 由共角定理得知，$\overline{PQ}$即為過K點之三角形ABC面積平分線。



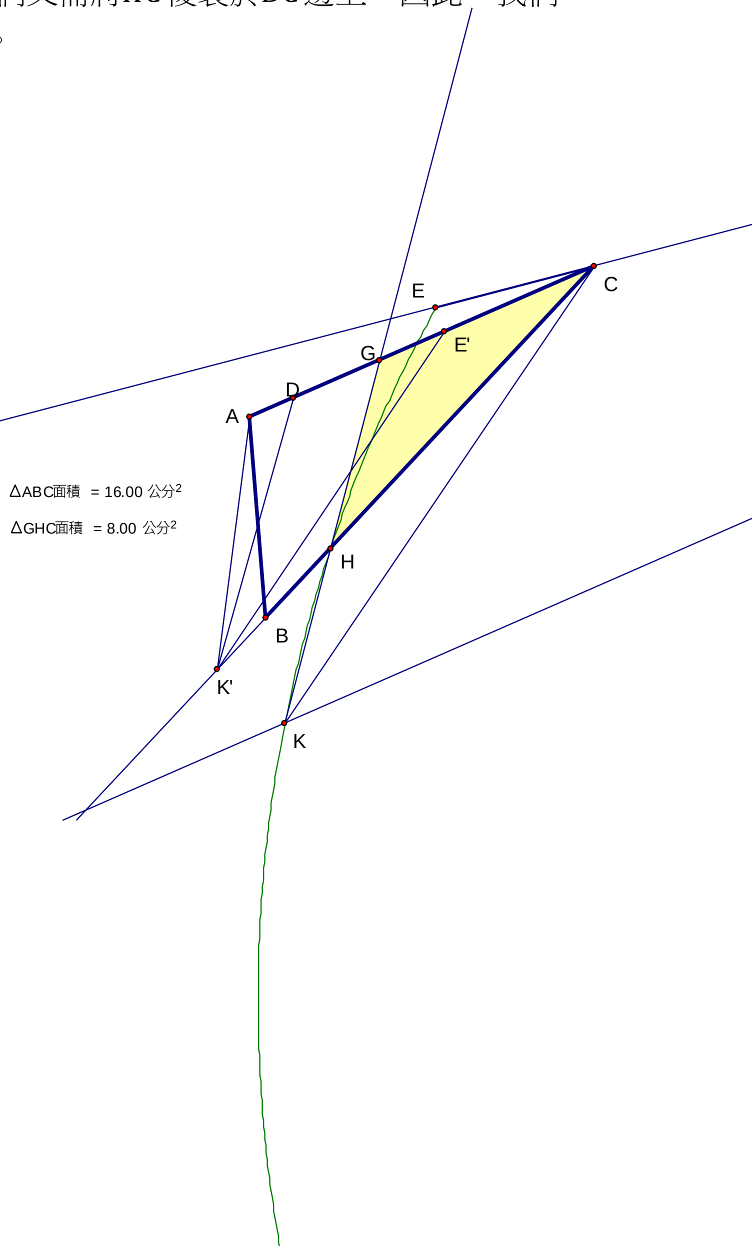
然而，我們在操作時，發現並非所有三角形都能利用上述的方法進行切割，如右圖所示。因此，參考文獻二是不完全正確的！我們為此找出此情況的解決辦法，為後面圖形切割埋下伏筆。故我們回歸三角形外部一點分割進行探討。



我們的想法是採取變形的模式。由左圖先觀察可知，切割線會以$\overline{KE'}$的形式呈現，利用共角定理的想法，我們應該以角C為共角，而不能改變；且我們又需將$\overline{KC}$複製於$\overline{BC}$邊上。因此，我們將原本的角A進行變形。

三邊形ABC外部一點 K 做面積平分線做法：

1. 延長$\overline{CB}$，作$\overline{CK'} = \overline{CK}$。連$\overline{AK'}$，並過$B$作$\overline{AK'}$的平行線交$\overline{AC}$於$D$。
2. 作$\overline{CD}$中點E'，連$\overline{K'E'}$。
3. 作$\angle K'CE = \angle KCE'$；過$K$作$\overline{AC}$的平行線交$\overline{EC}$的延長線於$F$。
4. 過F、K、E三點作圓交$\overline{BC}$於H，作$\overline{KH}$直線交$\overline{CD}$於G。



故$\overline{KG}$過 K 且平分$\Delta CK'D$，又$\Delta CK'D = \Delta ABC$，因此，$\overline{KG}$平分ΔABC。

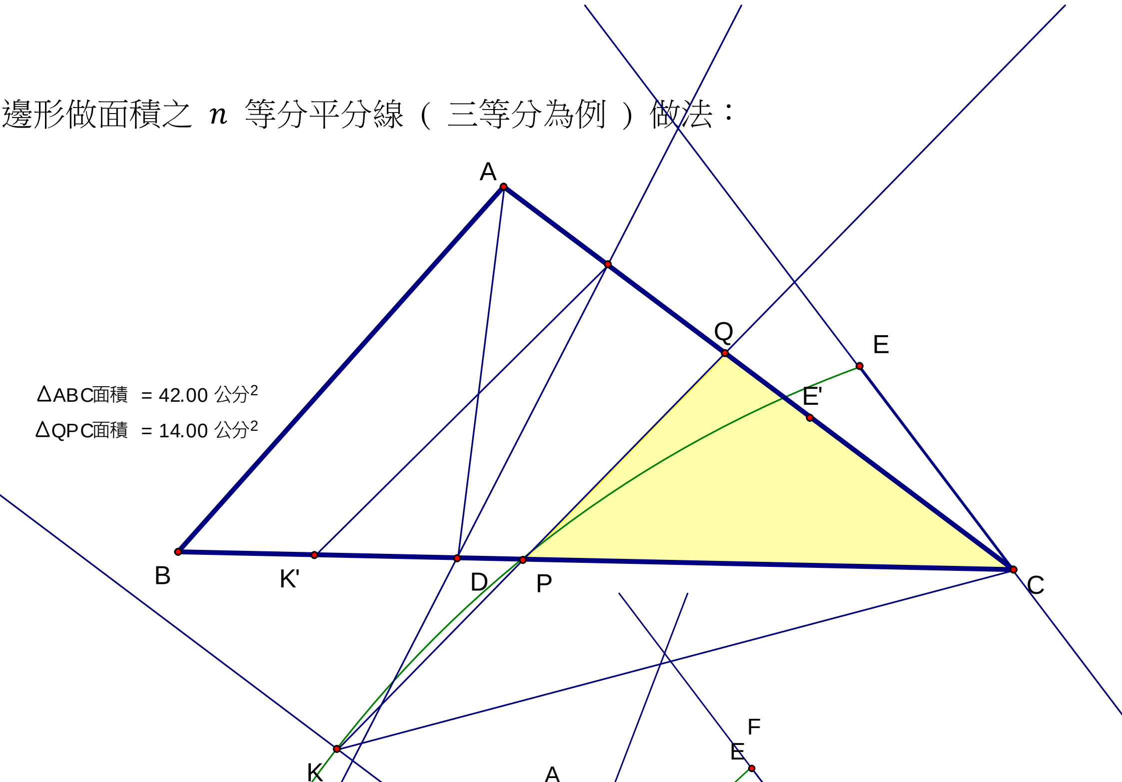
證明：同三角形外部一點作切割，故省略。

(二) 外部一點 K 對三邊形做面積之 n 等分平分線（三等分為例）做法：

步驟一：

1. $\overline{BC}$取一點D，使得$\overline{CD}=\frac{2}{3}\overline{BC}$。
2. 過K點作ΔACD之面積平分線$\overline{KQ}$交$\overline{BC}$於P。

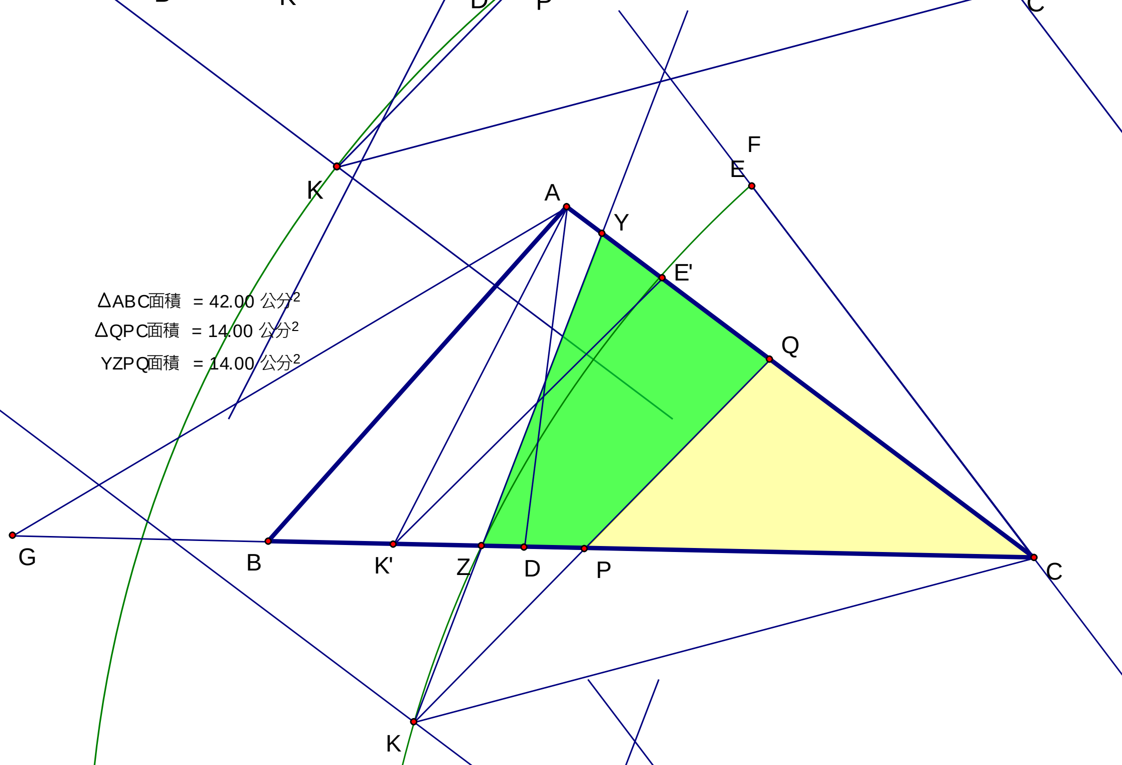
則$\Delta PQC=\dfrac{1}{3}\Delta ABC$

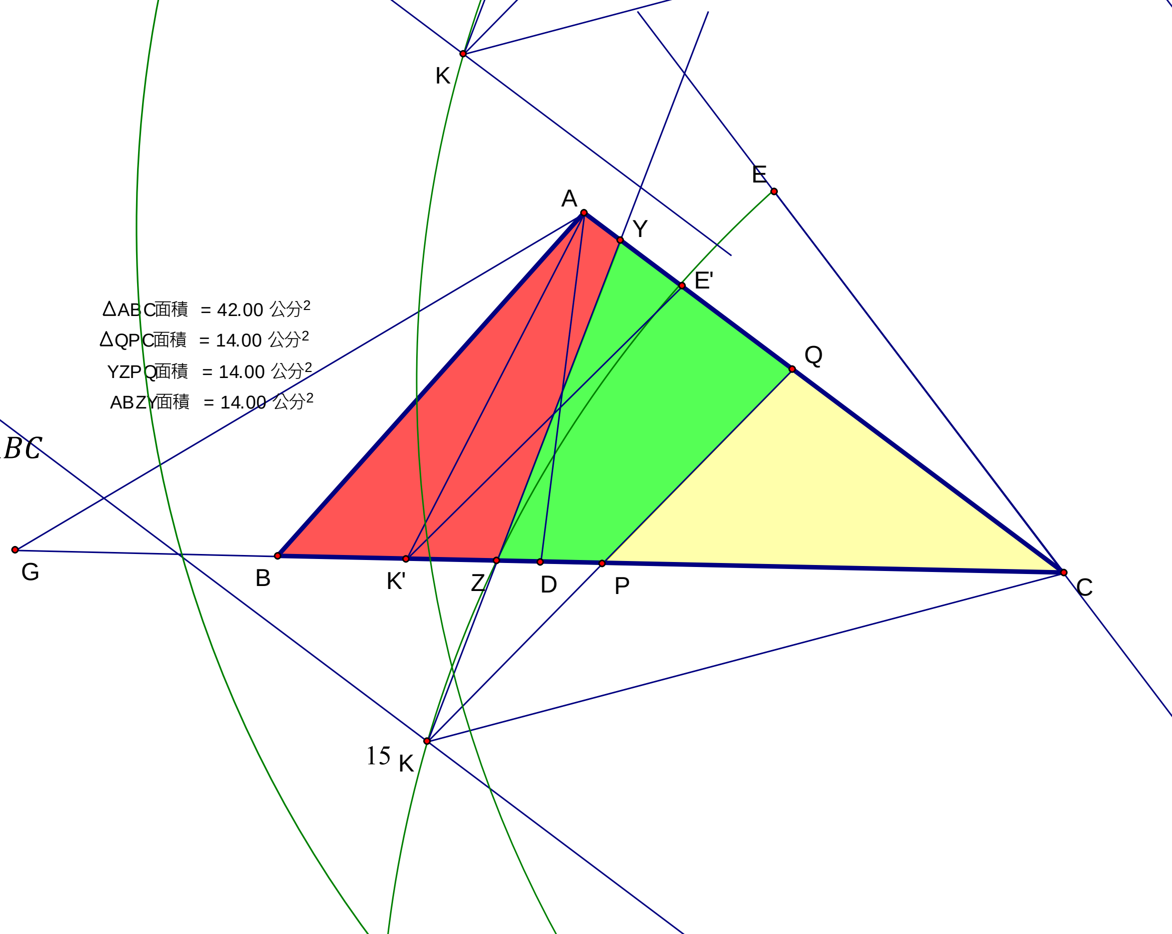


步驟二：

1. 在步驟二發現此圖若以∠B為共角作切割，切割線會通過$\overline{AC}$，無法順利得到我們的答案。因此，我們在$\overline{BC}$延長線取一點G，且$\overline{DC}=\overline{DG}$。
2. 過K點作ΔAGC之面積平分線$\overline{KY}$交$\overline{BC}$於Z。

則$YZPQ=\frac{1}{3}\Delta ABC$





故$\overline{KQ}$、$\overline{KY}$兩線段過 K 點將三邊形ABC三等分。

證明：

1. 根據步驟一：因為$\Delta ADC=\frac{2}{3}\Delta ABC$，且$\overline{KQ}$平分$\Delta ADC$；所以$\Delta PQC=\frac{1}{2}\Delta ADC=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\Delta ABC=\frac{1}{3}\Delta ABC$

2. 根據步驟二：因為$\overline{DC}=\overline{DG}$，所以$\Delta AGC=2\Delta ADC=2\cdot\frac{2}{3}\Delta ABC=\frac{4}{3}\Delta ABC$；又$\overline{KY}$平分$\Delta AGC$，所以$\Delta \mathrm{Y}ZC=\frac{1}{2}\Delta AGC=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\Delta ABC=\frac{2}{3}\Delta ABC$。故$YZPQ=\frac{1}{3}\Delta ABC$，且$ABZY=\frac{1}{3}\Delta ABC$。

則$\overline{KQ}$、$\overline{KY}$兩線段過ΔABC外一點 K 將ΔABC三等分。

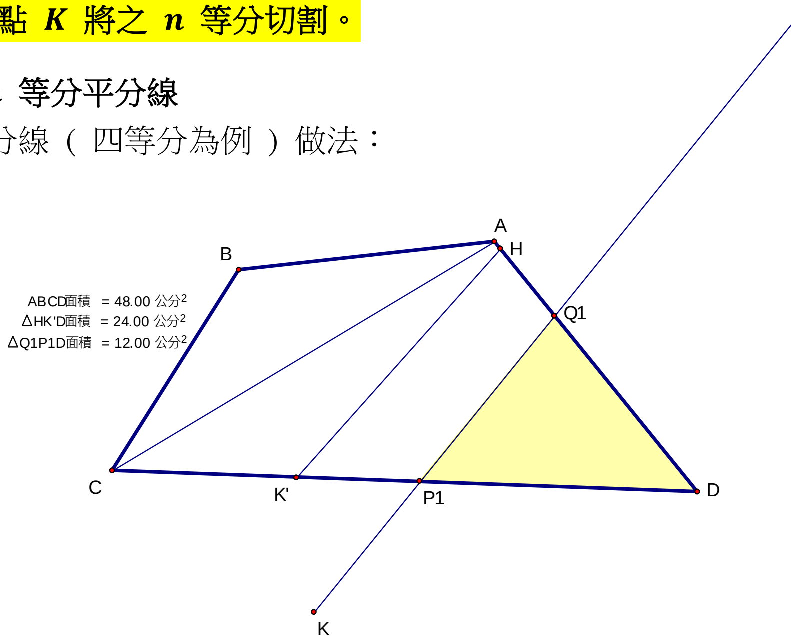
結論：我們能仿照上述模式將三角形過外部一點 K 將之 n 等分切割。

七、 外部一點 K 對凸、凹四邊形做面積之 n 等分平分線

(一) 外部一點對凸四邊形做面積之 n 等分平分線（ 四等分為例 ）做法：

步驟一：

1. $\overline{CD}$上取K'，且$\overline{K'D}=\overline{KD}$。
2. 過K'作四邊形$ABCD$面積平分線$\overline{K'H}$。
3. 過K作$\Delta K'DH$之面積平分線$\overline{KQ_1}$交$\overline{CD}$於P_1。

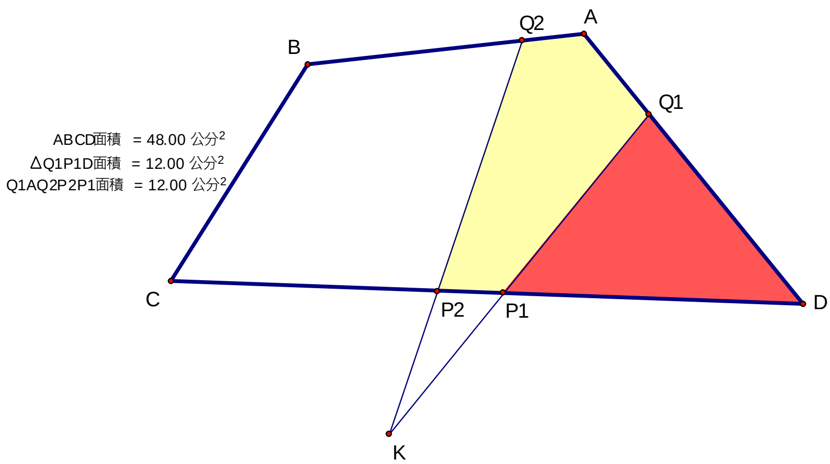


證明：

1. 因為$\overline{K'H}$為$ABCD$之面積平分線，所以$\Delta K'DH=\frac{1}{2}ABCD$。
2. 又$\overline{KQ_1}$將$\Delta K'DH$兩等分，所以$\Delta P_1Q_1D=\frac{1}{2}\Delta K'DH=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ABCD=\frac{1}{4}ABCD$

步驟二：

1. 利用四邊形外一點作面積兩等分平分線作出$\overline{KQ_2}$交$\overline{CD}$於P_2。



證明：

1. 因為$\overline{KQ_2}$平分四邊形$ABCD$，所以$AQ_2P_2D=\frac{1}{2}ABCD$。
2. 又$\Delta P_1Q_1D=\frac{1}{4}ABCD$，所以$AQ_2P_2P_1Q_1=\frac{1}{4}ABCD$。

步驟三：

1. 過K作四邊形BCP_2Q_2之面積平分線$\overline{KQ_3}$交$\overline{CD}$於P_3。

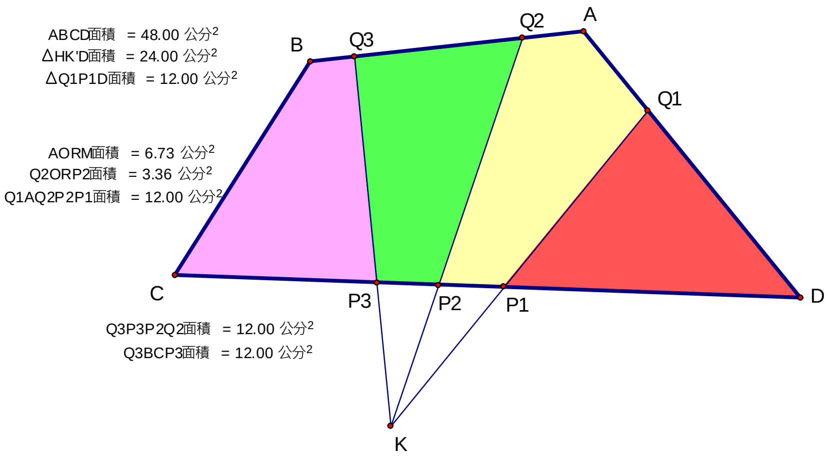
證明：

1. 因為$\overline{KQ_3}$平分四邊形BCP_2Q_2，且

$BCP_2Q_2 = \frac{1}{2}ABCD$，所以

$BCP_3Q_3 = Q_3P_3P_2Q_2 = \frac{1}{2}\cdot$

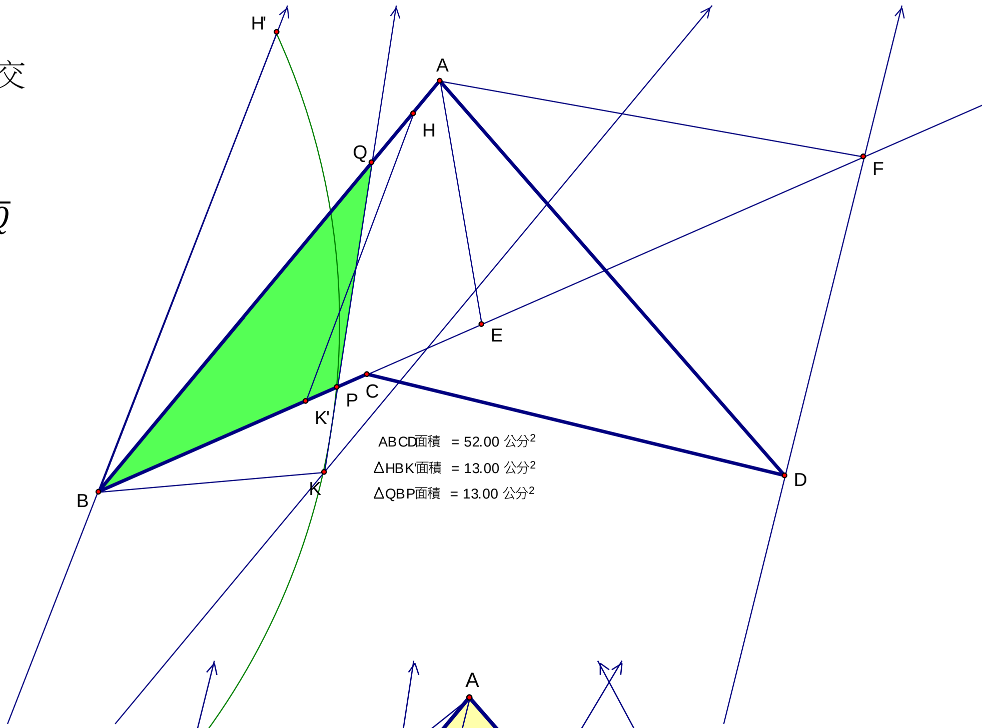
$\frac{1}{2}ABCD = \frac{1}{4}ABCD$



(二) 外部一點 K 對凹四邊形做面積之 n 等分平分線（四等分為例）做法：

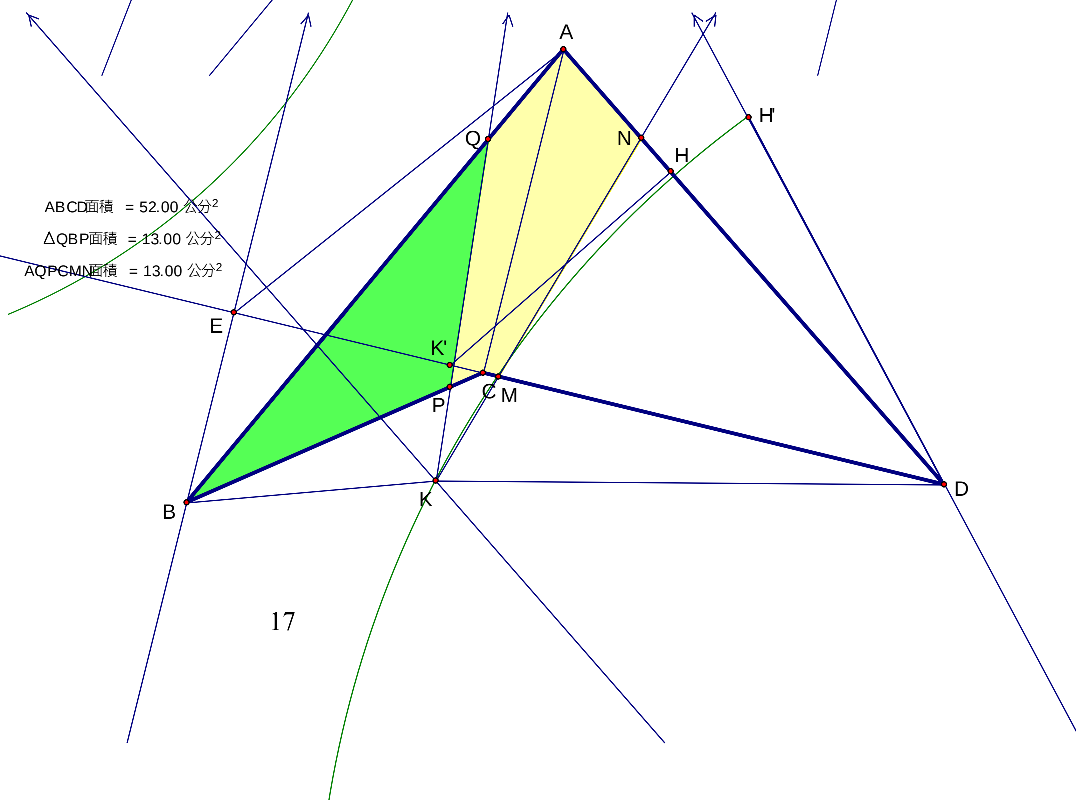
步驟一：

1. 連接$\overline{AC}$，過D作$\overline{AC}$的平行線交$\overline{BC}$的延長線於F。
2. 作$\overline{BF}$中點E，連$\overline{AE}$。
3. 過K作ΔABE的面積平分線$\overline{KQ}$交$\overline{BE}$於P。



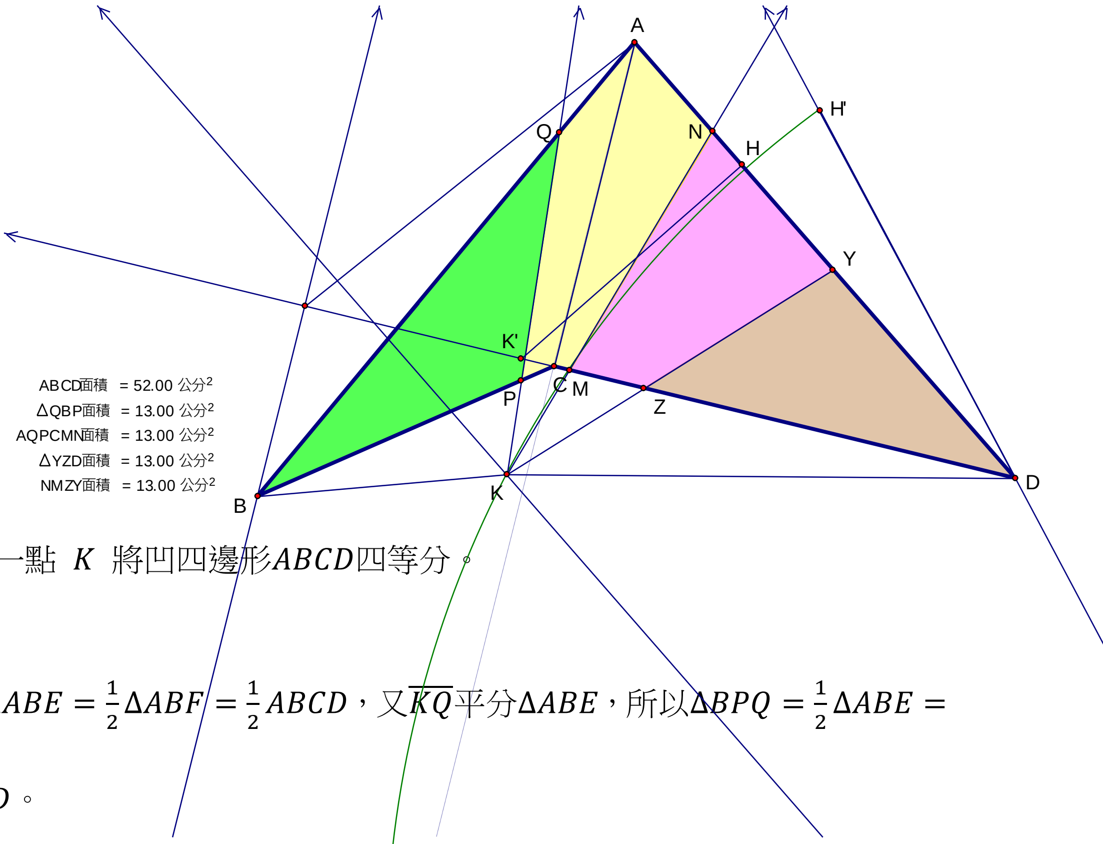
步驟二：

1. 將四邊形$ABCD$變形為ΔAED。
2. 過ΔAED外一點K，作ΔAED之面積平分線$\overline{KN}$交$\overline{CD}$於M。



步驟三：

1. 過ΔDMN外一點K，作ΔDMN之面積平分線$\overline{KY}$交$\overline{ND}$於Y。



則$\overline{KQ}$、$\overline{KN}$、$\overline{KY}$過外部一點 K 將凹四邊形$ABCD$四等分。

證明：

1. 根據步驟一：因為$\Delta ABE = \frac{1}{2}\Delta ABF = \frac{1}{2}ABCD$，又$\overline{KQ}$平分$\Delta ABE$，所以$\Delta BPQ = \frac{1}{2}\Delta ABE = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ABCD = \frac{1}{4}ABCD$。

2. 根據步驟二：因為$\Delta AED = ABCD$，且$\overline{KN}$平分ΔAED，所以$NAEM = \frac{1}{2}\Delta AED = \frac{1}{2}\ ABCD = \frac{2}{4}\ ABCD$；又因為$\Delta BPQ = \frac{1}{4}ABCD$，所以$NAQPCM = \frac{1}{4}ABCD$。

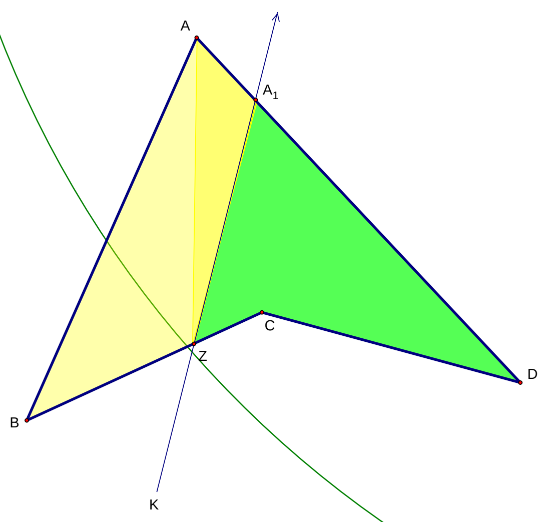
3. 根據步驟三：$\overline{KY}$為ΔDMN外一點K之面積平分線，所以$MNYZ = \Delta DYZ = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4}\ ABCD = \frac{1}{4}ABCD$。

則$\overline{KQ}$、$\overline{KN}$、$\overline{KY}$將凹四邊形$ABCD$四等分。

(三) 補充說明：

在作切割時我們發現，並非所有圖形都如上面例子如此完美地順利切割。如右圖所示，若圖形外一點K作切割線會通過$\overline{AC}$時，情況會複雜許多。

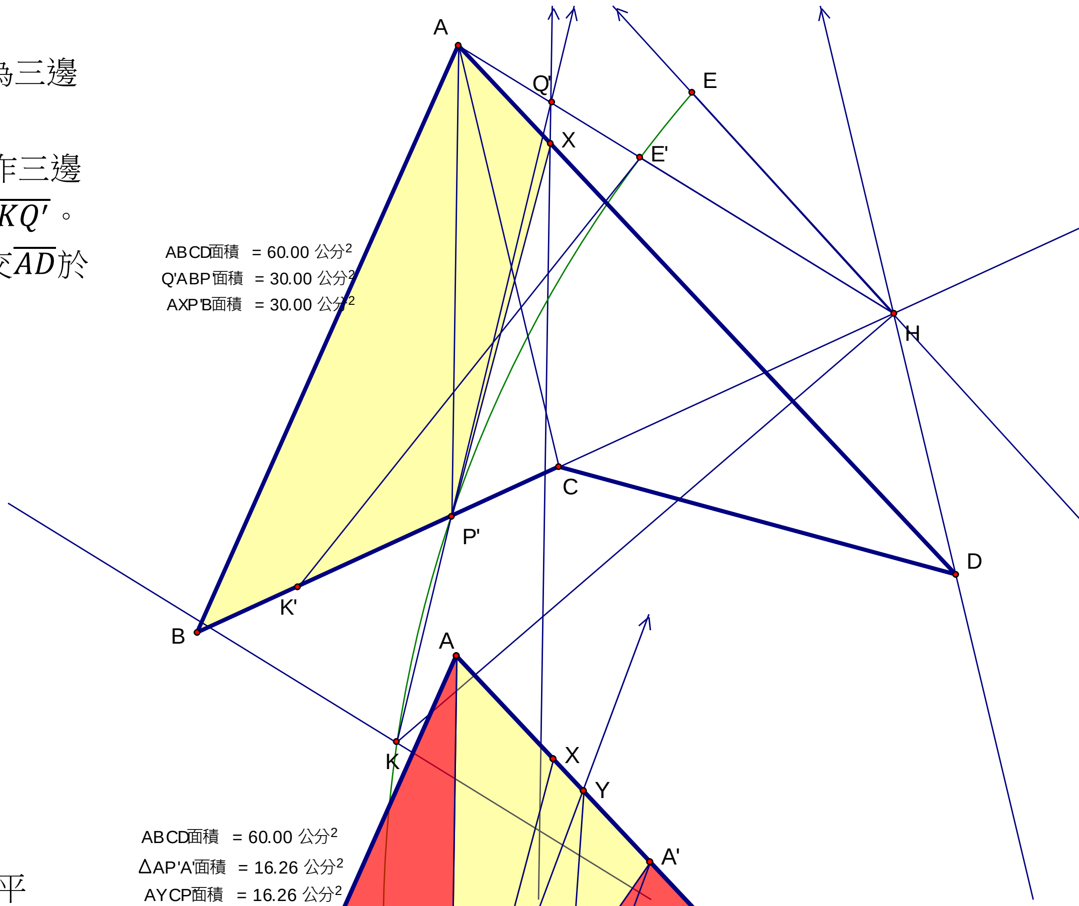
然而，我們依舊利用面積變形的觀念順利解決這個問題。作法如下：



步驟一：

1. 將四邊形$ABCD$變形為三邊形ABH。
2. 過三邊形外一點 K 作三邊形ABH之面積平分線$\overline{KQ'}$。
3. 過Q'作$\overline{AP'}$之平行線交$\overline{AD}$於X，連接$\overline{P'X}$。

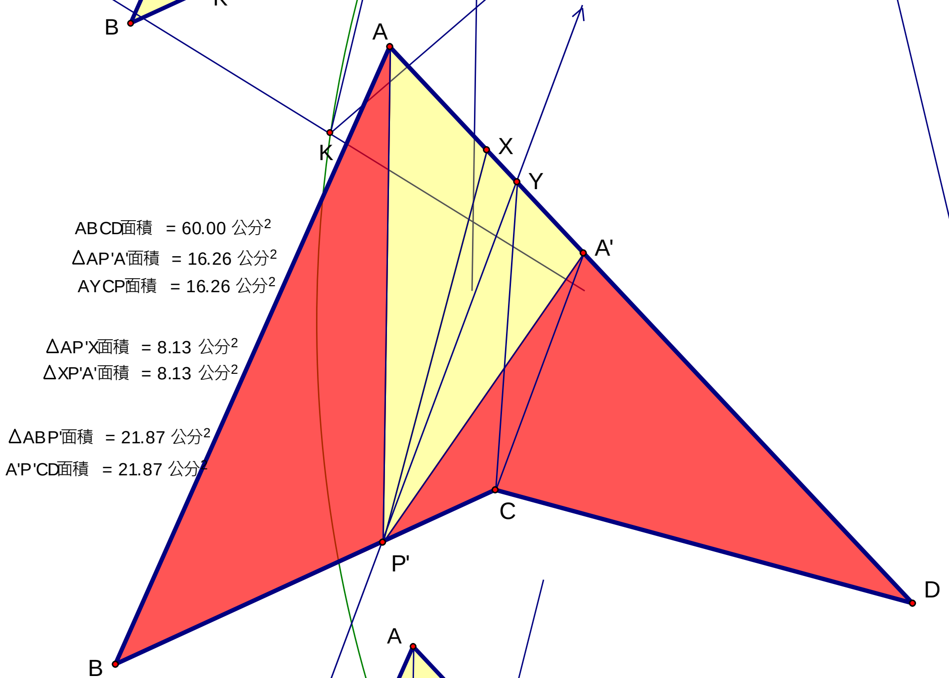
則X$ABP' = \frac{1}{2}ABCD$



步驟二：

1. $\overline{DX}$上取一點A'，且$\overline{AX} = \overline{XA'}$。
2. 連接$\overline{A'C}$，過P'作$\overline{A'C}$平行線交$\overline{XD}$於Y。

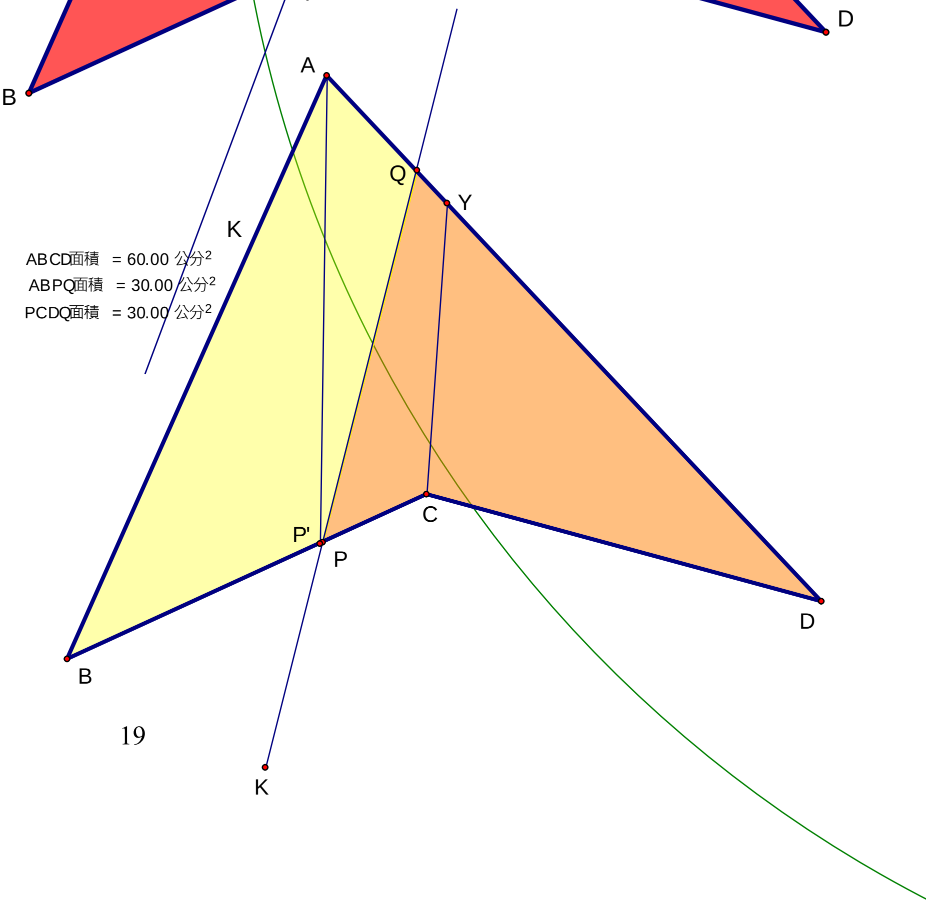
則$AP'A' = AP'CY$



步驟三：

1. 過四邊形$AP'CY$外一點K作面積平分線$\overline{KQ}$交$\overline{BC}$於P。

則$\overline{KQ}$為凹四邊形$ABCD$之面積平分線。



證明：

1. 根據步驟一：因為$\overline{AC}//\overline{HD}$，所以$ABCD = \Delta ABH$。又$\overline{KQ'}$為$\Delta ABH$之面積平分線，所以

   $ABP'Q' = \frac{1}{2}ABH = \frac{1}{2}ABCD$。又$\overline{Q'X}//\overline{AP'}$，$\Delta P'Q'A = \Delta P'XA$。

2. 根據步驟二：因為$\overline{AX} = \overline{XA'}$，所以$\Delta AP'A' = 2\Delta P'XA$。又$\overline{P'Y}//\overline{CA'}$，所以$\Delta AP'A' = AP'CY$。

3. 根據步驟三：因為$\overline{KQ}$平分 $AP'CY$，所以$AP'PQ = CYQP$。

4. 故$ABPQ = \Delta ABP' + AP'PQ = \Delta ABP' + \frac{1}{2}AP'CY = \Delta ABP' + \frac{1}{2}\Delta AP'A' = \Delta ABP' + \Delta P'XA = \Delta ABP' + \Delta P'Q'A = ABP'Q' = \frac{1}{2}ABCD$，故得證。

因此，經整理我們能知道，若凹四邊形外一點K在$\overline{AC}$之延長線上 (圖 1-1)，我們能簡單快速分割圖形；若K不在$\overline{AC}$之延長線上 (圖 1-2)，會造成分割線通過$\overline{AC}$的情況發生，在作圖上會顯得格外麻煩。

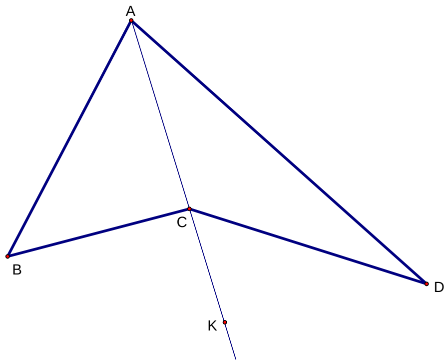


圖 1-1

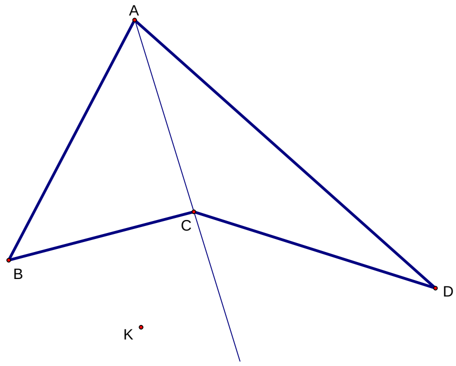
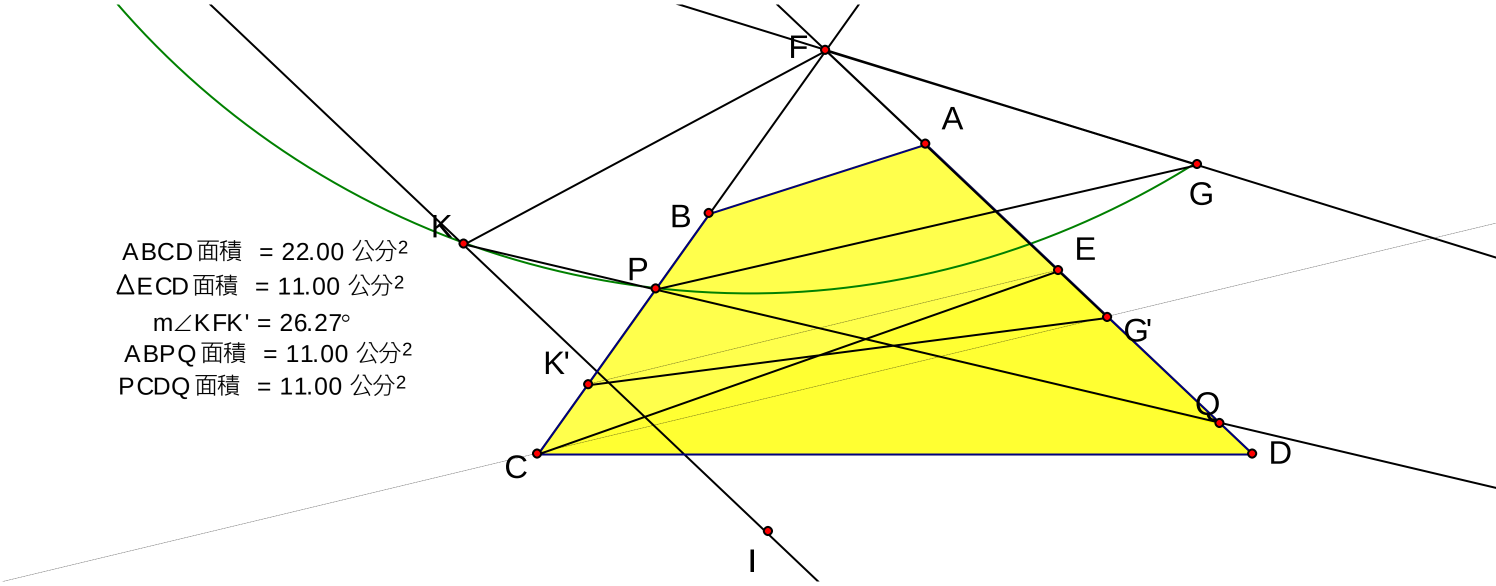


圖 1-2

八、 多邊形外部一點作面積 $m : n$ 比例切割之一次性作圖

(一) 四邊形外部一點作面積平分線 (華祥志[4]，問題 8)：

根據參考文獻四，我們能過四邊形外一點作面積平分線，作法證明如下：



作法：

1. 過C作$ABCD$面積平分線$\overline{CE}$；$\overline{FC}$上取$\overline{FK'} = \overline{FK}$，連$\overline{K'E}$。
2. 作$\overline{CG'}//\overline{K'E}$，連$\overline{K'G'}$。
3. 複製$\angle K'FG = \angle KFG'$；過$K$作$\overline{FD}$平行線交$\overline{FG}$於$H$。
4. 過KGH三點作圓交$\overline{BC}$於P，作$\overline{PQ}$過K。則$\overline{KQ}$即為所求。

證明：

1. $\Delta FCE = \Delta FK'G'$；$\Delta CDE = ABCE = ABK'G' = \frac{1}{2}ABCD$。
2. ΔFPG與ΔFKQ中；因為(1)$\angle PFG = \angle KFQ$，(2)$PGF = 180 - \angle PKH = \angle QKI = \angle KQF$，即$\angle PGF = \angle KQF$
3. 所以$\Delta FPG \sim \Delta FKQ$ (AA)；即 $\frac{\overline{FP}}{\overline{FK}} = \frac{\overline{PG}}{\overline{KQ}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{FQ}}$ ，故$\overline{FP} \times \overline{FQ} = \overline{FG} \times \overline{FK} = \overline{FG'} \times \overline{FK'}$。
4. 由共角定理知，面積ΔFPQ = 面積$\Delta FK'G'$；即$ABPQ = ABK'G' = ABCE = \frac{1}{2}ABCD$。

故$\overline{PQ}$即為所求 $ABCD$ 過 K 之面積平分線。

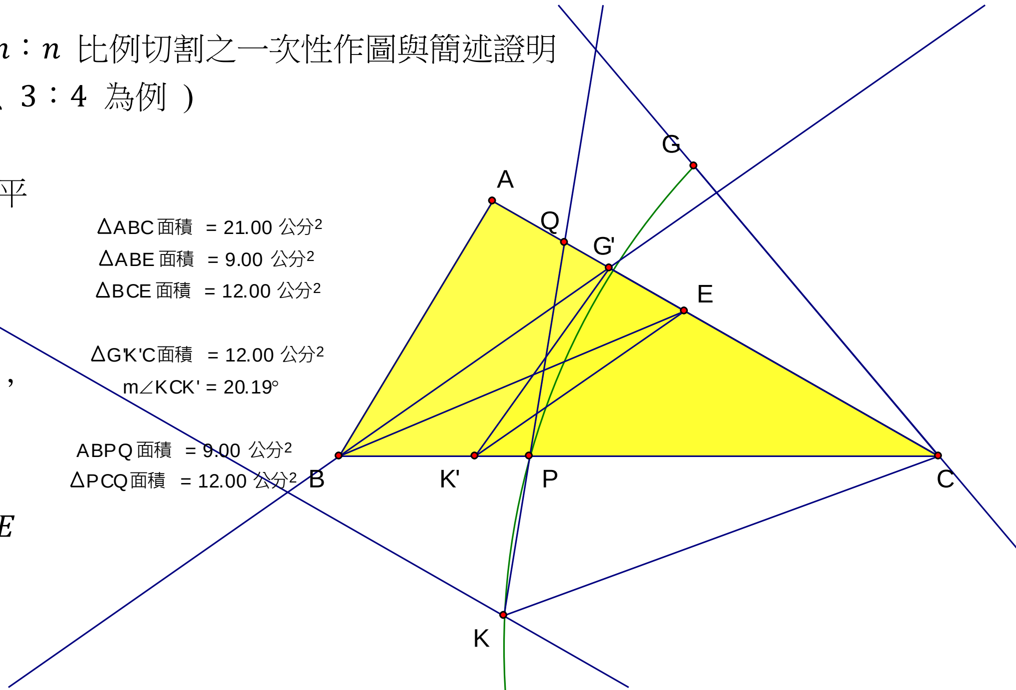
以這個作法為基礎，我們更利用此觀念直接將多邊形 $m : n$ 面積比例切割進行一次性作圖。

(二) 三邊形外部一點作面積 $m：n$ 比例切割之一次性作圖與簡述證明

情況一：m、n 為有理數（ 以 3：4 為例 ）

1. 取$\overline{AE}：\overline{CE}=3：4$；使得 $\Delta ABE：\Delta BCE=3：4$。(平行線截比例線段作圖)
2. 作$\overline{BG'}//\overline{K'E}$，$\Delta K'CG'=\Delta BCE$
3. 仿多邊形外一點切割方法，以C為共角，作出$\Delta PCQ=\Delta K'CG'=\Delta BCE$。
4. 故$\Delta PCQ=\Delta K'CG'=\Delta BCE$

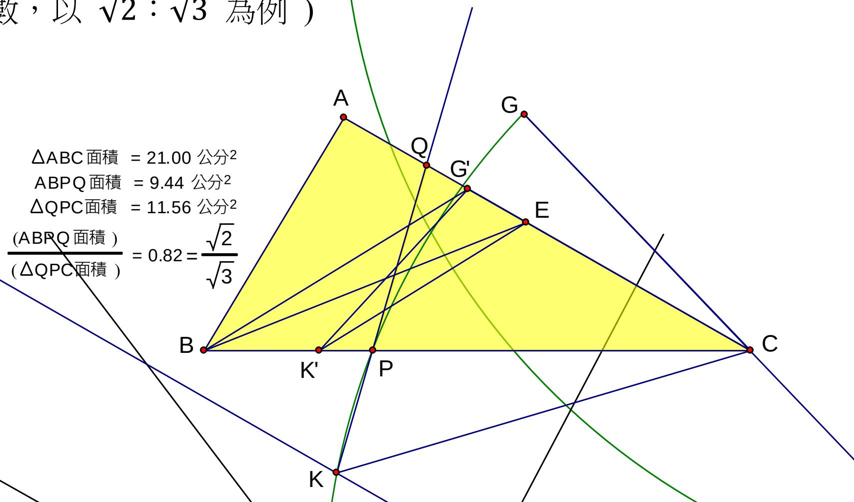
可得 $\overline{KQ}$ 使 $ABPQ$面積：PCQ面積 $=$ 3：4。



情況二：：m、n 為無理數 （ 不含超越數，以 $\sqrt{2}：\sqrt{3}$ 為例 ）

1. 取$\overline{AE}：\overline{CE}=\sqrt{2}：\sqrt{3}$ ；使得 $\Delta ABE：\Delta BCE=\sqrt{2}：\sqrt{3}$ 。(平行線截比例線段作圖)
2. 作$\overline{BG'}//\overline{K'E}$，$\Delta K'CG'=\Delta BCE$
3. 仿多邊形外一點切割方法，以C為共角，作出$\Delta PCQ=\Delta K'CG'=\Delta BCE$。
4. 故$\Delta PCQ=\Delta K'CG'=\Delta BCE$

可得 $\overline{KQ}$ 使 $ABPQ$面積：PCQ面積 $=\sqrt{2}：\sqrt{3}$。

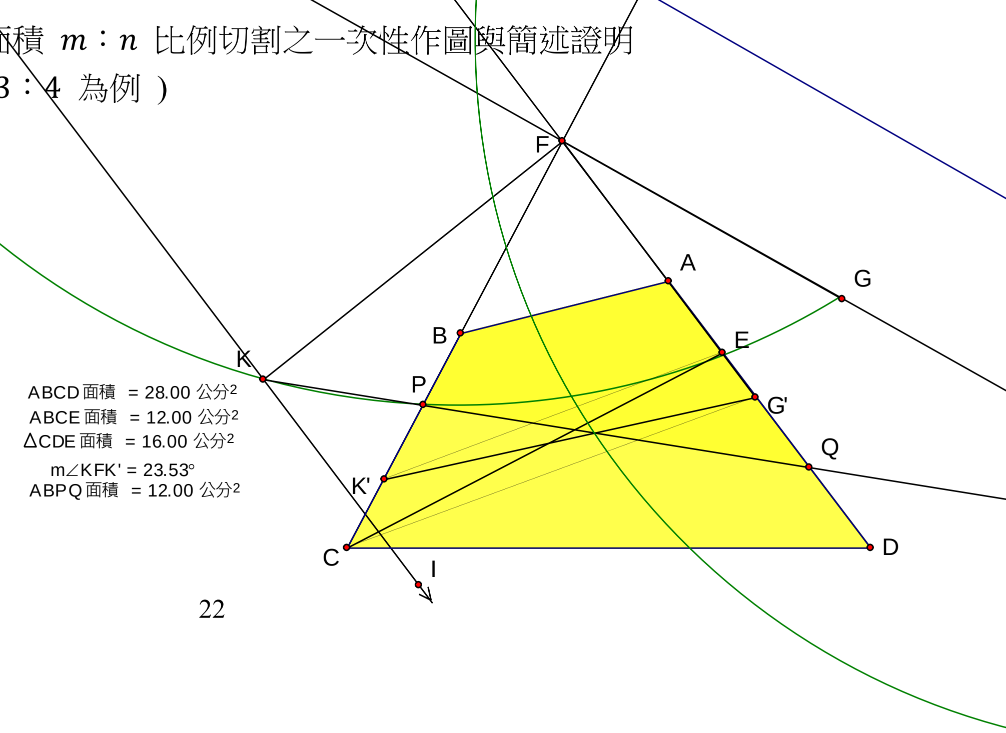


(三) 凸四邊形外部一點 K 作面積 $m：n$ 比例切割之一次性作圖與簡述證明

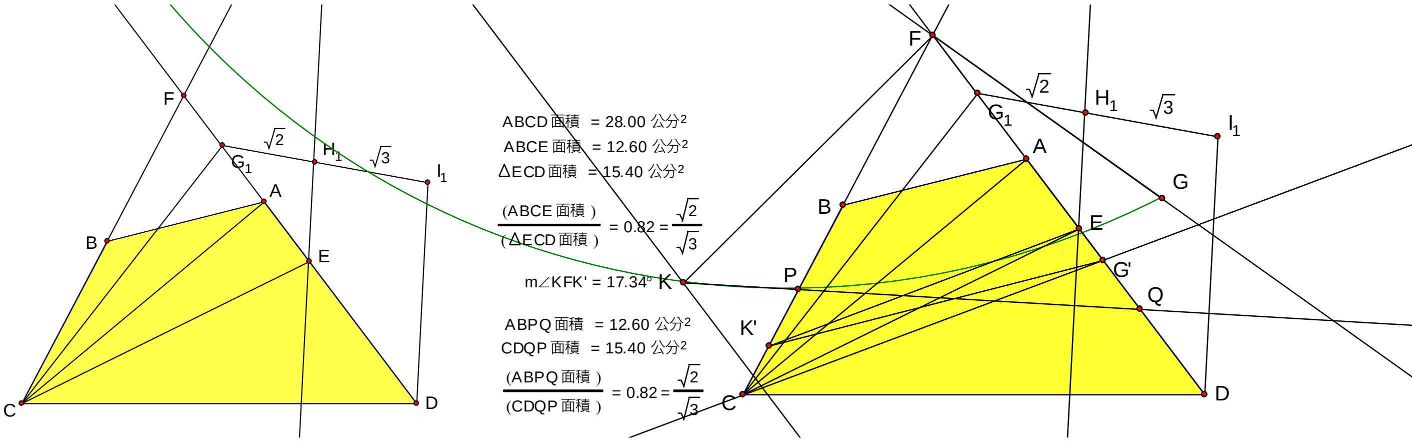
情況一：m、n 為有理數(以 3：4 為例)

1. 作$\overline{CE}$，使得 $ABCE：CDE=3：4$。
2. 作$\overline{CG'}//\overline{K'E}$，$\Delta FCE=\Delta FK'G'$
3. 同四邊形外一點作圖，以F為共角，作出$\Delta FPQ=\Delta FK'G'=\Delta FCE$。
4. 可得$ABPQ=ABCE$。

故$\overline{KQ}$使 $ABPQ：CDQP=$ 3：4。



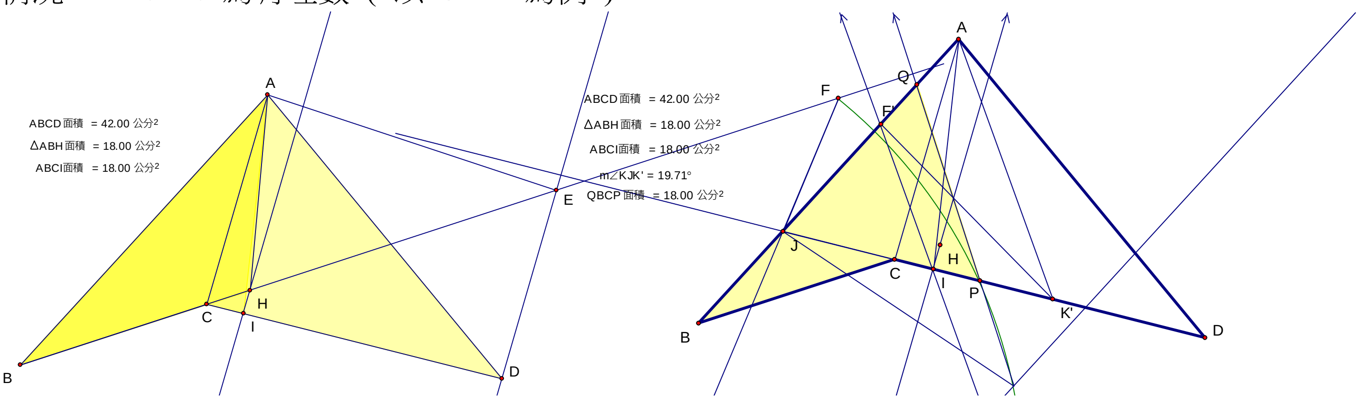
情況二：m、n 為無理數 （ 不含超越數，以 $\sqrt{2}:\sqrt{3}$ 為例 ）



1. 將$ABCD$ 變形CDG_1，且利用比例線段，使得$\overline{G_1E}:\overline{ED}=\sqrt{2}:\sqrt{3}$
2. 延長$\overline{BC}$、$\overline{AD}$交於F，$\overline{FC}$取$\overline{FK'}=\overline{FK}$。並將$ABCE$變形為$ABK'G'$。
3. 同四邊形外一點作圖，以F為共角，作出$\Delta FPQ=\Delta FK'G'=\Delta FCE$。
4. 故$\overline{KQ}$使 $ABPQ:CDQP=\sqrt{2}:\sqrt{3}$。

(四) 凹四邊形外部一點 K 作面積 $m:n$ 比例切割之一次性作圖與簡述證明

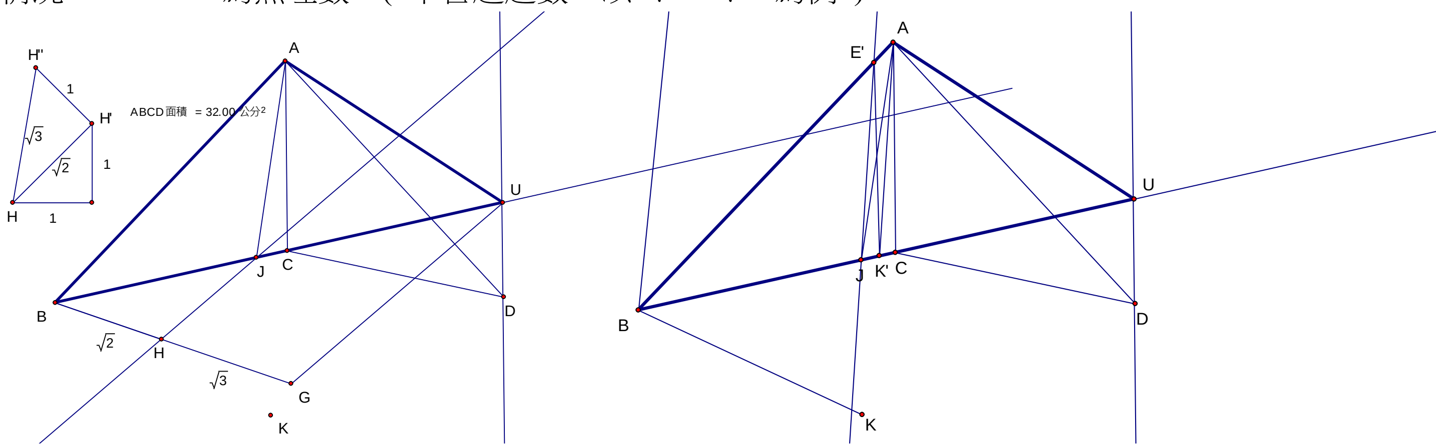
情況一：m、n 為有理數（ 以 3：4 為例 ）



1. 將$ABCD$ 變形ABE，取$\overline{BH}:\overline{HE}=3:4$；並將$\Delta ACH$變形$\Delta ACI$。延長$\overline{CI}$交$\overline{AB}$於$J$。
2. 將ΔAIJ利用共角定理變形為ΔPQJ，且$\overleftrightarrow{PQ}$過K。

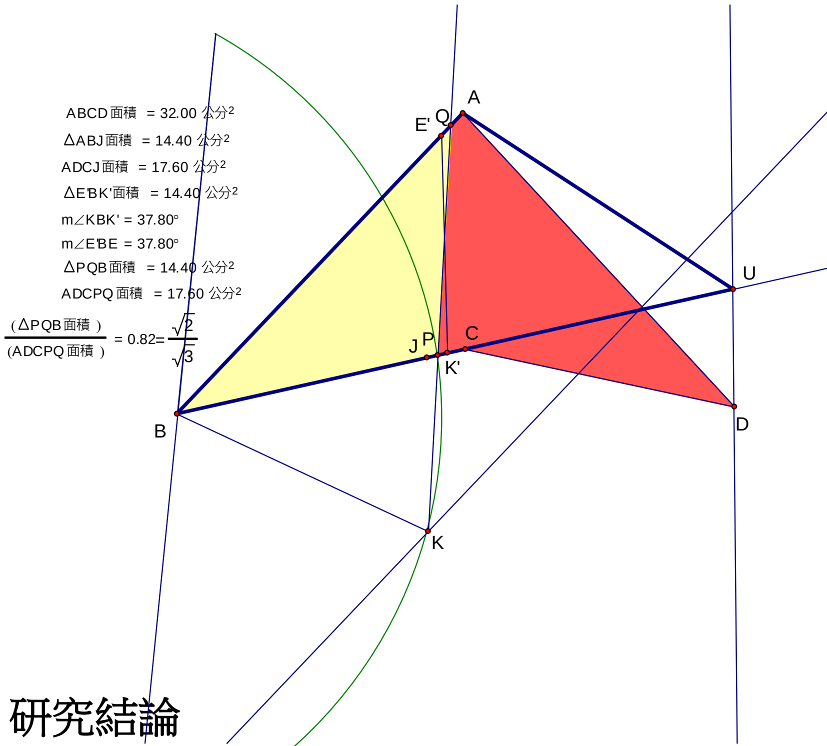
故 $\overline{KQ}$ 使 $QBCP:PDAQ$面積$=3:4$。

情況二：m、n 為無理數 （ 不含超越數，以 $\sqrt{2}:\sqrt{3}$ 為例 ）



1. 將$ABCD$ 變形ABU，且利用比例線段，使得$\overline{BJ}:\overline{JU}=\sqrt{2}:\sqrt{3}$
2. $\overline{BU}$上取K'，使得$\Delta ABJ=\Delta K'E'B$
3. 利用共角定理，將$\Delta K'E'B$變形為等積的ΔPQB，且$\overleftrightarrow{PQ}$過K。

故 $\overline{KQ}$ 使 BPQ：$PCDAQ$面積$=\sqrt{2}$：$\sqrt{3}$。



陸、 研究結論

一、 「求過頂點或邊上一點，作多邊形面積 n 等分線」，我們與之前的文獻完全不同！原本需要退化成三邊形的想法，我們在四邊形時就可開始進行分割；不須再退化成三邊形，一來一往節省更多時間，也將作法更簡單化；且我們將作圖實際呈現，並加以證明，而非只是『想法』罷了。

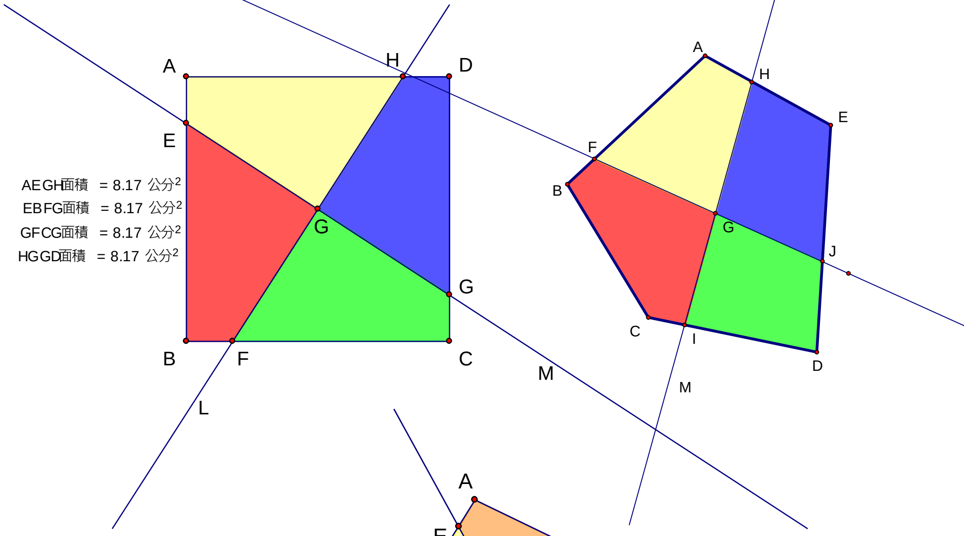
二、 「求過頂點或邊上一點，作多邊形面積 n 等分線」能一般性作圖，而非各情況各有一種不同的作法。因此，能有系統化地達成我們所要的切割形式，不用一一查詢各作圖方法。

三、 以往文獻只探討凸多邊形，對於凹多邊形並沒多加以研究；我們發現凹多邊形依舊可以進行變形與切割，雖稍有不同，但方法其實大同小異。

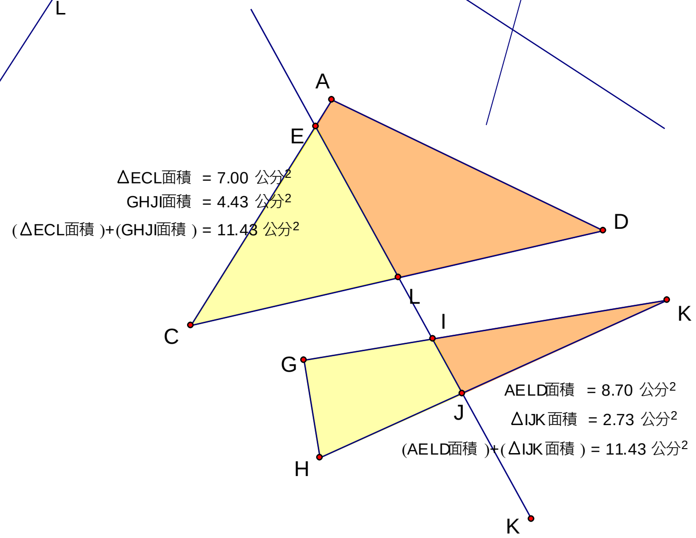
四、 多邊形外一點之面積平分線也做了大改變，我們利用等分、變形、共角定理的觀念成功將圖形多等分切割，不再侷限於凸多邊形二等分，而是凹凸多邊形均可多等分切割。

柒、　未來展望

一、　利用文獻與我們的研究，可求出周邊上、圖形外一點作 n 等分之作圖；但圖形內一點我們尚未完成，雖有架構，但局限於某些特殊多邊形而已，因此未加詳述，是未來研究方向之一。



二、　如右圖所示，圖形外一點 K 對『數個』多邊形作面積等分線，此時割線兩側面積的和相同，割線是如何作圖的。



捌、　參考資料及其他

一、　莊焜安、許威德、黃浚柏、董晏均。面積平分線知多少。中華民國第二十三屆中小學科學展覽會。

二、　劉任昌。從用直線平分凸五邊形的面積談起 (2001)。數學傳播 25 卷四期。

三、　張至皓、何玉婉、何知一、張城豪。怎樣分才公平三角形面積兩等分的尺規作圖 (2006)。中華民國第四十六屆科學展覽。

四、　華祥志、吳祐德、蔡承儒。求過任意點作多邊形面積平分線 (2008)。中華民國第四十八屆科學展覽。

【評語】030417

探討過一點Ｐ，作多邊形ｎ等分切割線的作圖方式。針對所給的點是多邊形頂點、邊上一點或多邊形外一點的各種情況，給出了解答。這個問題在歷屆科展出現過許多次，但討論的內容大概都是針對所給的點是多邊形頂點、邊上一點或多邊形外一點其中一種情況來分析。作者們透過簡單的處理手法，針對給定的點落在不同位置的作圖方式給出了論述，想法值得嘉許，數學研究精神佳，可惜問題的深度不夠。凹邊形是創意的部分，著墨應可以更多。此外對於無解的定義與說明易造成混淆，可再釐清。

作品海報

研究動機

平分是生活中常見的問題，對數學來說更是不可缺少的。我們在國二時遇到了幾何圖形，讓我們把平分與熟悉的幾何圖形搭起了一座橋梁，而我們也觀察到許多人以多邊形切割為主題進行研究，但大多僅限於將圖形變形成為三邊形後，進行 n 等分切割，其中不包刮凹多邊形的切割，因此許多疑惑便產生了！一定要將多邊形變形成為三邊形才可進行嗎？如何將三邊形外一點 n 等分？為什麼大家對凹多邊形切割總是避而不談？為了解決這些心中的問題，我們毅然決然選擇凹凸多邊形為主題進行研究。

研究目的

以下各研究目的均以「尺規作圖」為前提之研究：

一、 過頂點切割凸多邊形 n 等分之一般性作法、推論與證明
二、 過頂點切割凹多邊形 n 等分之一般性作法、推論與證明
三、 過周邊上一點切割凸多邊形 n 等分之作法、推論與證明
四、 過周邊上一點切割凹多邊形 n 等分之作法、推論與證明
五、 多凹多邊形周邊一點 n 等分切割之作法
六、 外部一點對三邊形做面積平分線與 n 等分切割線
七、 外部一點對凸、凹四邊形做面積之 n 等分切割線
八、 多邊形面積 $m:n$ 比例切割之一次性作圖

研究設備及器材

筆、紙、電腦、Gsp 繪圖程式

文獻探討

一、 文獻二「從用直線平分凸五邊形的面積談起」裡有詳述凸多邊形 n 等分之想法與證明，其中面積還原的想法 (劉任昌 [2]，問題 4)對於我們此篇研究有非常大的幫助。

二、 文獻四「求過任意點作多邊形面積平分線」參考文獻中，只探討凸多邊形面積「兩等分」之面積平分線，且必須退化成三邊形才可進行作圖；另外，文獻中所提之面積修正，只用想法帶過，無實際作法，故是否可行有待商榷。而我們雖然一樣利用平形線交換面積的方法，卻發現退化成四邊形就可進行分割，不用退化成三邊形，節省相當多的步驟進行切割與還原。

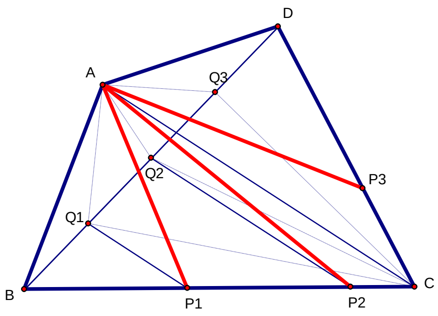
研究過程及方法

一、 過頂點切割凸多邊形之一般性作法、推論與證明

(一) 凸四邊形過頂點 A 之切割 (四等分為例)：

作法：

1. 連接$\overline{AC}$，$\overline{BD}$
2. 在$\overline{BD}$上取四等分點Q_1、Q_2、Q_3
3. 分別過Q_1、Q_2、Q_3作$\overline{AC}$之平行線交$\overline{BC}$或$\overline{CD}$於P_1、P_2、P_3
4. 連接$\overline{AP_1}$、$\overline{AP_2}$、$\overline{AP_3}$



則$\Delta ABP_1 = \Delta AP_1P_2 = AP_2CP_3 = \Delta AP_3D$

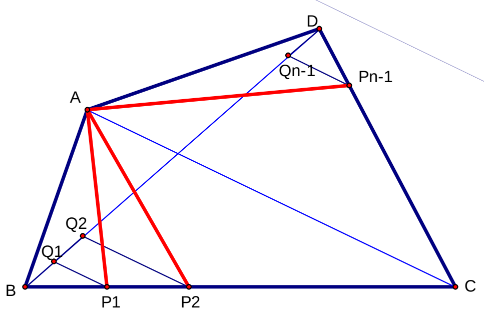
證明：

1. 連接$\overline{AQ_1}$、$\overline{AQ_2}$、$\overline{AQ_3}$、$\overline{CQ_1}$、$\overline{CQ_2}$、$\overline{CQ_3}$
2. 因為Q_1、Q_2、Q_3為$\overline{BD}$的四等分點。所以$\Delta ABQ_1 = \frac{1}{4}\Delta ABD$，$\Delta CBQ_1 = \frac{1}{4}\Delta CBD$，故$\Delta ABQ_1 + \Delta CBQ_1 = \frac{1}{4}ABCD$
3. 因為$\overline{P_1Q_1}//\overline{AC}$，所以$\Delta AP_1Q_1 = \Delta CP_1Q_1$。故$ABCQ_1 = \Delta ABP_1$。

同理，整理可得$\Delta ABP_1 = \Delta AP_1P_2 = AP_2CP_3 = \Delta AP_3D = \frac{1}{4}ABCD$

一般性推論：

如右圖，連$\overline{AC}$，$\overline{BD}$，作$\overline{BD}$之 n 等分點Q_1、Q_2、⋯、Q_{n-1}，過Q_1、Q_2、⋯Q_{n-1}作$\overline{AC}$的平行線交$\overline{BC}$或$\overline{CD}$於P_1、P_2⋯、P_{n-1}，連$\overline{AP_1}$、$\overline{AP_2}$、⋯、$\overline{AP_{n-1}}$，則$\overline{AP_1}$、$\overline{AP_2}$、⋯、$\overline{AP_{n-1}}$過頂點 A 將四邊形$ABCD$ n 等分。

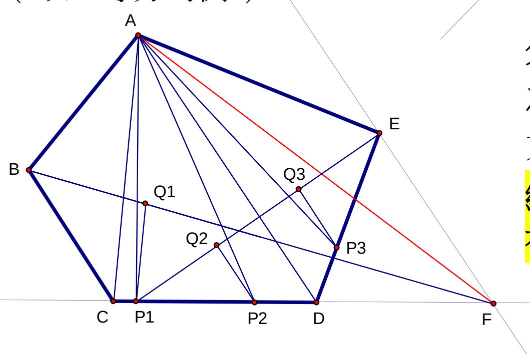


結論：任意凸四邊形，過任意頂點可以尺規作圖將之 n 等分

(二) 凸五邊形過頂點 A 之切割：(以四等分為例)

作法：

1. 連接$\overline{AD}$，過 E 作$\overline{AD}$之平行線$\overline{EF}$交$\overleftrightarrow{CD}$於 F。連接$\overline{AF}$、$\overline{BF}$、$\overline{AC}$。
2. 在$\overline{BF}$上取$\overline{BQ_1} = \frac{1}{4}\overline{BF}$，過$Q_1$作$\overline{AC}$之平行線交$\overline{CD}$於$P_1$，連接$\overline{AP_1}$、$\overline{P_1E}$
3. 在$\overline{P_1E}$上取Q_2、Q_3三等分點；過Q_2、Q_3作$\overline{AD}$之平行線交$\overline{CD}$或$\overline{DE}$於P_2、P_3，連接$\overline{AP_2}$、$\overline{AP_3}$



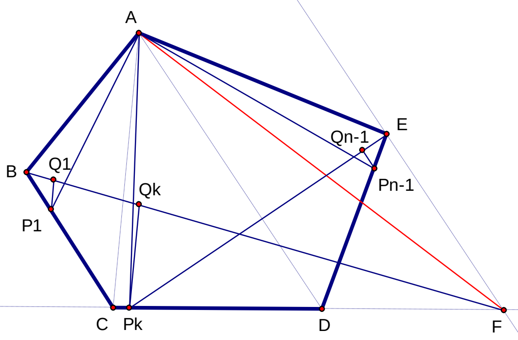
可得$ABCP_1 = \Delta AP_1P_2 = \Delta AP_2DP_3 = \Delta AP_3E$

證明：

1. 因為$\overline{AD}//\overline{EF}$，所以$\Delta ADE = \Delta ADF$，故$ABCDE = ABCF$
2. 由四邊形的推論可知，$ABCP_1 = \frac{1}{4}ABCF = \frac{1}{4}ABCDE$，而$AP_1DE = \frac{3}{4}ABCDE$。同理，$\Delta AP_1P_2 = AP_2DP_3 = \Delta AP_3E = \frac{1}{3}AP_1DE = \frac{1}{4}ABCDE$

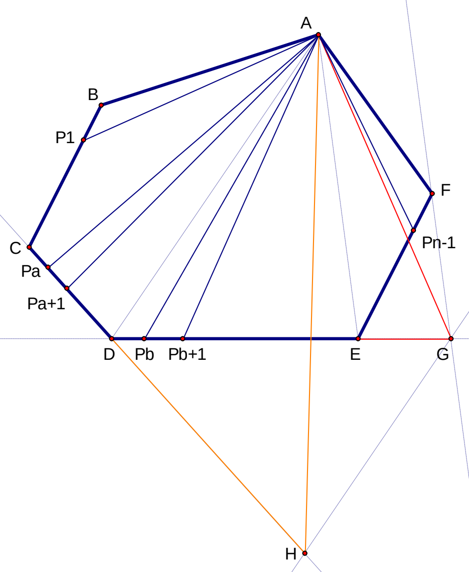
一般性推論：

1. 連接$\overline{AD}$，過E作$\overline{AD}$的平行線交$\overleftrightarrow{CD}$於F，則將五邊形$ABCDE$等積變形為四邊形$ABCF$。
2. 過A依照四邊形的分法，當分到k等分時，$\overline{AP_k}$第一次通過$\overline{AC}$，則還原剩餘的圖形為四邊形AP_kDE，再過A將AP_kDE圖形$(n-k)$等分



(三) 凸 n 邊形過頂點A切割之推論：($n \geq 6$)

1. 如圖，將六邊形$ABCDEF$逐漸變形為等積的$ABCDG$、$ABCH$。
2. 仿四邊形的分法，當分到a等份時，$\overline{AP_a}$第一次通過$\overline{AC}$，還原圖形為AP_aDG，繼續利用四邊形的方法切割。
3. 當分到b等份時，$\overline{AP_b}$第一次通過$\overline{AD}$，再還原圖形為四邊形AP_bEF。
4. 以四邊形的方法再切$(n-b)$次即可。



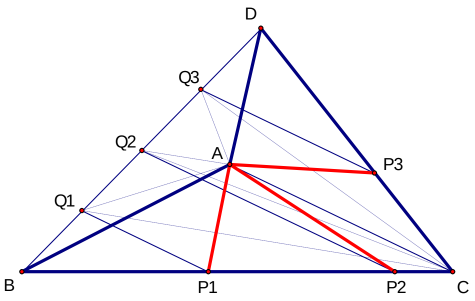
結論：任意凸多邊形，過任意頂點可以尺規作圖將之 n 等分

二、 過頂點切割凹多邊形之一般性作法、推論與證明

(一) 凹四邊形過頂點之切割〔凹點A切割四等分為例〕：

作法：

1. 連接$\overline{AC}$、$\overline{BD}$，在$\overline{BD}$上取四等分點Q_1、Q_2、Q_3
2. 分別過Q_1、Q_2、Q_3作$\overline{AC}$之平行線交$\overline{BC}$或$\overline{CD}$於P_1、P_2、P_3，連$\overline{AP_1}$、$\overline{AP_2}$、$\overline{AP_3}$



故$\overline{AP_1}$、$\overline{AP_2}$、$\overline{AP_3}$過頂點A四等分$ABCD$

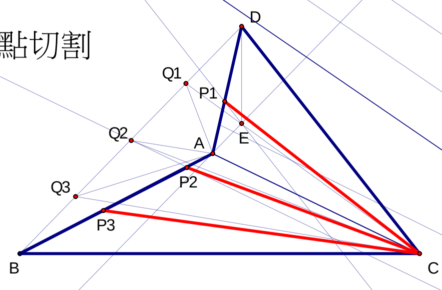
證明：

1. 連接$\overline{AQ_1}$、$\overline{AQ_2}$、$\overline{AQ_3}$、$\overline{CQ_1}$、$\overline{CQ_2}$、$\overline{CQ_3}$
2. 因為Q_1、Q_2、Q_3為$\overline{BD}$的四等分點，所以$\Delta ABQ_1 = \frac{1}{4}\Delta ABD$，$\Delta CBQ_1 = \frac{1}{4}\Delta CBD$，故$\Delta CBQ_1 - \Delta ABQ_1 = \frac{1}{4}ABCD$。
3. 因為$\overline{P_1Q_1} // \overline{AC}$，所以$\Delta AP_1Q_1 = \Delta CP_1Q_1$。故$\Delta CBQ_1 - \Delta ABQ_1 = AP_1BQ_1 - \Delta ABQ_1 = \Delta ABP_1$。即$\Delta ABP_1 = \frac{1}{4}ABCD$

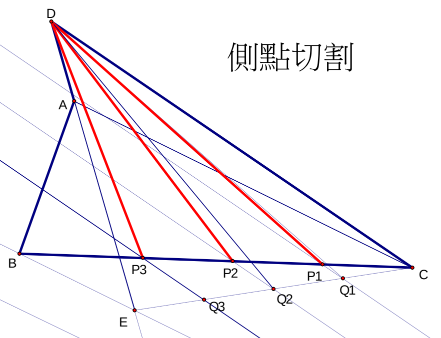
經整理可得$\Delta ABP_1 = \Delta AP_1P_2 = AP_2CP_3 = \Delta AP_3D = \frac{1}{4}ABCD$

註：凸點切割、側點切割也成立 (作法與證明請參考文獻)

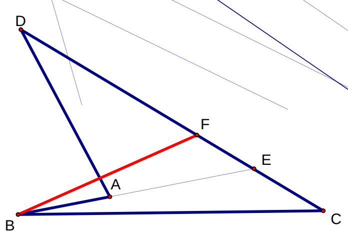
凸點切割



側點切割



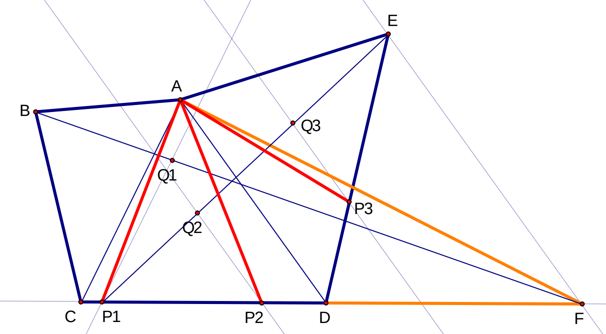
但若以B為分割點欲將$ABCD$兩等份，延長$\overline{AB}$交$\overline{CD}$於E，此時$\Delta BCE < \frac{1}{2}ABCD$，會發生切割線$\overline{BF}$有部分線段在圖形外的情況，我們將之定義為無解。因此，需在有解的情況之下，方能討論側點切割的情況。



結論：凹四邊形過頂點 n 等分切割只能由A、C兩點〔凹點〕與有解情形下的側點切割。

(二) 凹五邊形過頂點A切割之作法：〔凹點A切割四等分為例〕

1. 連$\overline{AD}$，過 E 作$\overline{AD}$平行線交$\overline{CD}$延長線於F，連$\overline{AF}$、$\overline{AC}$、$\overline{BF}$。
2. 在$\overline{BF}$上取$\overline{BQ_1}=\frac{1}{4}\overline{BF}$；過$Q_1$作$\overline{AC}$平行線交$\overline{CD}$於$P_1$，連接$\overline{AP_1}$。
3. 連$\overline{P_1E}$，取三等分點Q_2、Q_3。並過Q_2、Q_3作$\overline{AD}$的平行線交$\overline{CD}$或$\overline{DE}$於P_2、P_3；連接$\overline{AP_2}$、$\overline{AP_3}$。



則$\overline{AP_1}$、$\overline{AP_2}$、$\overline{AP_3}$四等分$ABCDE$

證明：

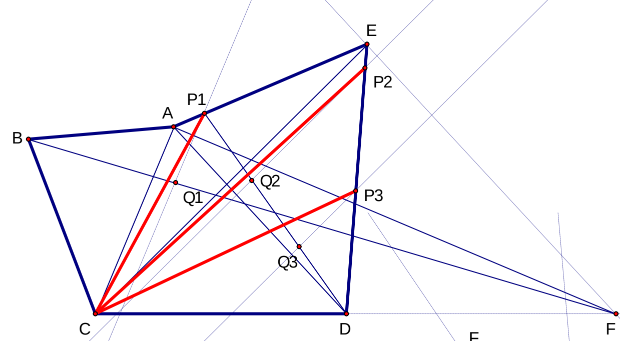
1. 因為$\overline{EF}\,//\,\overline{AD}$，所以

   $ABCDE=ABCF$。且$\overline{BQ_1}=\frac{1}{4}\overline{BF}$，$\overline{P_1Q_1}\,//\,\overline{AC}$，故$ABCQ_1=ABCP_1=\frac{1}{4}ABCF=\frac{1}{4}ABCDE$。
2. 連接$\overline{AQ_2}$、$\overline{Q_2D}$，$AP_1DQ_2=\Delta AP_1P_2=\frac{1}{3}AP_1DE=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}ABCDE=\frac{1}{4}ABCDE$。

   同理，$AP_2DP_3=\Delta AP_3E=\frac{1}{4}ABCDE$。

故$ABCP_1=\Delta AP_1P_2=AP_2DP_3=\Delta AP_3E=\frac{1}{4}ABCDE$

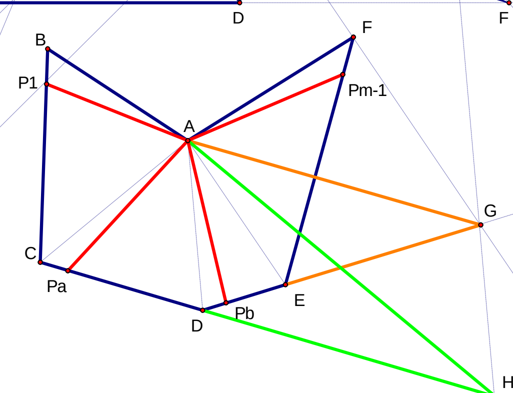
如右圖，由 C 或 D 分割，亦是如此。故凹五邊形 n 等分可依照凸五邊形作法。當凹五邊形變形為等積四邊形時，可能為凸四邊形、凹四邊形、甚至三角形（B、A、F共線），但作法仍相同。



(三) 凹 n 邊形過凹點 A 切割之一般性推論：($n\geq 6$)

將凹六邊形$ABCDEF$逐漸變形為等積$ABCDG$、$ABCH$後，仿四邊形過頂點作法分之。若切割過$\overline{AC}$後，還原成四邊形AP_aDG分割；過$\overline{AD}$後，再還原AP_bEF分割。

同理，便能將凹 n 邊形過 A ，m等份。

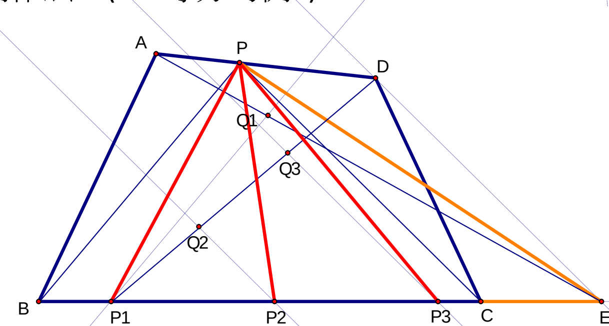


結論：任意凹 n 邊形，過頂點（有解情況下）可以尺規作圖將之 m 等分

三、 過周邊上一點 P 切割凸多邊形之作法、推論與證明

(一) 凸四邊形過周邊一點 P 之切割作法：(四等分為例)

1. 連$\overline{PC}$，過D作$\overline{PC}$平行線交$\overline{BC}$於E，連接$\overline{PE}$、$\overline{AE}$、$\overline{PB}$
2. 作$\overline{AQ_1}=\frac{1}{4}\overline{AE}$，且過$Q_1$作$\overline{PB}$平行線交$\overline{BE}$於$P_1$；連接$\overline{PP_1}$、$\overline{P_1D}$。
3. 作$\overline{P_1D}$之三等分點Q_2、Q_3；過Q_2、Q_3作$\overline{PC}$之平行線交$\overline{BC}$或$\overline{CD}$於P_2、P_3，連接$\overline{PP_2}$、$\overline{PP_3}$。



則$PABP_1=\Delta PP_1P_2=\Delta PP_2P_3=PP_3CD=\frac{1}{4}ABCD$

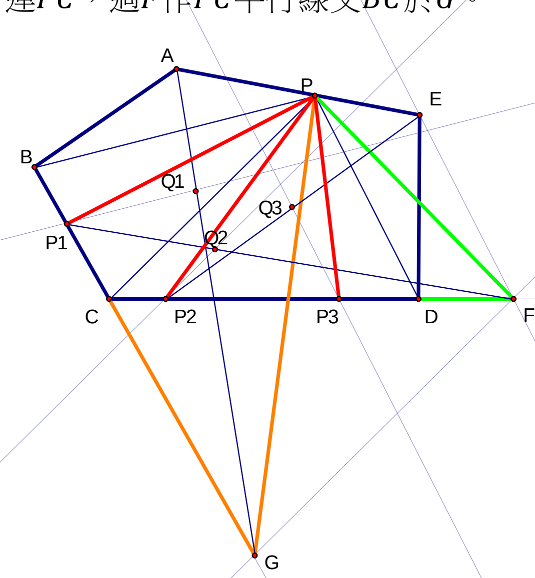
證明：

1. 因為$\overline{PC}\,//\,\overline{DE}$，所以$\Delta PDC=\Delta PEC$，則$ABCD=ABEP$。由四邊形的推論可知：$ABP_1P=\frac{1}{4}ABEP=\frac{1}{4}ABCD$；$\Delta PP_1P_2=\Delta PP_2P_3=PP_3CD=\frac{1}{3}PP_1CD=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}ABCD=\frac{1}{4}ABCD$

結論：任意凸四邊形，可過邊上任一點將之 n 等分。

(二) 凸五邊形過周邊 P 一點之切割作法：(四等分為例)

1. 連$\overline{PD}$，過E作$\overline{PD}$平行線交$\overline{CD}$於F；連$\overline{PC}$，過F作$\overline{PC}$平行線交$\overline{BC}$於G。
2. $\overline{AG}$上作$\overline{AQ_1}=\frac{1}{4}\overline{AG}$；連$\overline{BP}$，過$Q_1$作$\overline{BP}$平行線交$\overline{BC}$於$P_1$，連接$\overline{PP_1}$。
3. 連接$\overline{P_1F}$，作$\overline{P_1Q_2}=\frac{1}{3}\overline{P_1F}$，過$Q_2$作$\overline{PC}$平行線交$\overline{CD}$於$P_2$，連接$\overline{PP_2}$。
4. 連$\overline{P_2E}$，取$\overline{P_2E}$中點Q_3，過Q_3作$\overline{PD}$之平行線交$\overline{CD}$於P_3，連接$\overline{PP_3}$



故$PABP_1=PP_1CP_2=\Delta PP_2P_3=PP_3DE=\frac{1}{4}ABCDE$

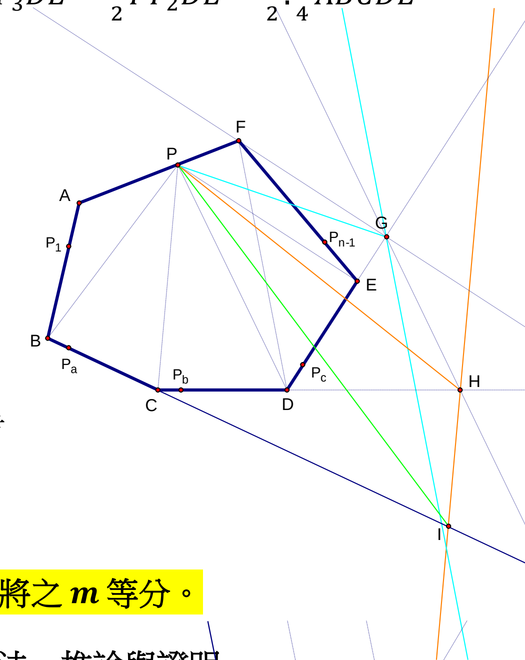
證明：

1. 因為$\overline{DP}\,//\,\overline{EF}$、$\overline{CP}\,//\,\overline{FG}$，所以$\Delta DPE=\Delta DPF$，$\Delta CPF=\Delta CPG$。即 $ABCDE=ABCFP=ABGP$
2. 根據四邊形的推論得$PABP_1=\frac{1}{4}ABGP=\frac{1}{4}ABCDE$，$PP_1CP_2=\frac{1}{3}PP_1CF=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}ABCDE=\frac{1}{4}ABCDE$，$\Delta PP_2P_3=PP_3DE=\frac{1}{2}PP_2DE=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4}ABCDE=\frac{1}{4}ABCDE$，得證。

由此，可推論得知任意凸五邊形，可過邊上任一點將之 n 等分。

(三) 凸 n 邊形推論($n\geq 6$)：

如右圖，以六邊形$ABCDEF$為例。將六邊形逐步變形為$PABCDG$、$PABCH$、$PABI$後，再仿四邊形過頂點的作法，逐步進行切割與還原成四邊形。便能將一凸 n 邊形，過邊上任一點將之 m 等分。

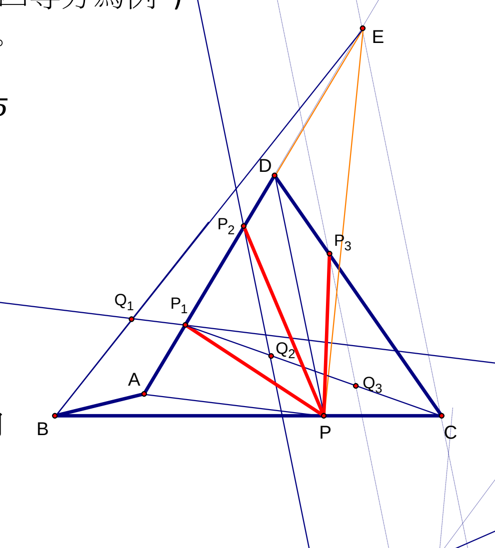


結論：任意凸 n 邊形，可過周邊上任一點將之 m 等分。

四、 過周邊上一點 P 切割凹多邊形之作法、推論與證明

(一) 凹四邊形過周邊一點 P 之切割作法：(四等分為例)

1. 連$\overline{PD}$，過C作$\overline{PD}$平行線交$\overline{AD}$於E，連$\overline{PE}$。
2. 連$\overline{PA}$、$\overline{BE}$，作$\overline{BQ_1}=\frac{1}{4}\overline{BE}$，作$\overline{Q_1P_1}//\,\overline{AP}$交$\overline{AD}$於$P_1$，連$\overline{CP_1}$、$\overline{PP_1}$。
3. 在$\overline{CP_1}$上取三等分點Q_2、Q_3，且過Q_2、Q_3，作$\overline{PD}$之平行線交$\overline{AD}$、$\overline{CD}$於P_2、P_3，連$\overline{PP_2}$、$\overline{PP_3}$。



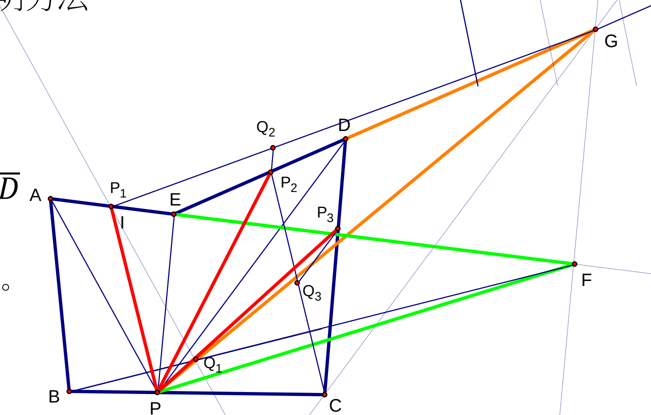
證明：

1. 因為$\overline{PD}//\,\overline{CE}$，所以$\Delta PDE=\Delta CDP$；即 $ABCD=ABPE$。
2. 以下同凹四邊形過頂點之證明方法。

(二) 凹五邊形過周邊一點 P 之切割作法：(四等分為例)

1. 連接$\overline{PA}$、$\overline{PE}$、$\overline{PD}$；過C作$\overline{PD}$之平行線交$\overline{ED}$於G。
2. 過G作$\overline{PE}$之平行線交$\overline{AE}$於F。
3. 依照四邊形過頂點的作法使

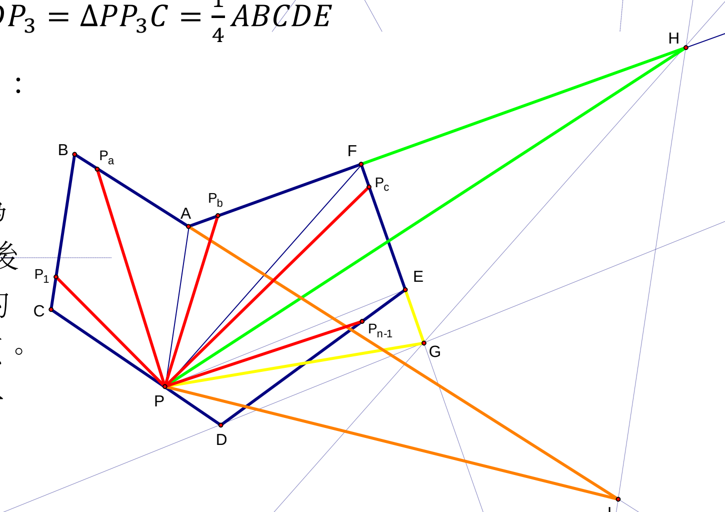
   $ABPP_1=\frac{1}{4}ABPF$，$PP_1EP_2=\frac{1}{3}PP_1EG$，再將$PP_2DC$二等分



故$PP_1AB=PP_1EP_2=PP_2DP_3=\Delta PP_3C=\frac{1}{4}ABCDE$

(三) 凹 n 邊形推論($n\geq 6$)：

以六邊形$ABCDEF$為例。如右圖，將六邊形逐步變形為$PGFABC$、$PHABC$、$PIBC$後，再依照四邊形過頂點 P 的作法，逐步進行切割與還原。便能將一凹 n 邊形過邊上一點將之 m 等分。

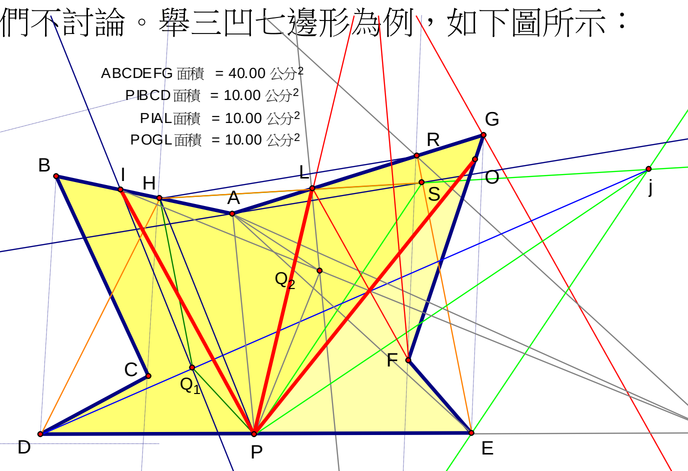


結論：任意凹 n 邊形，有解情況下可過周邊上任一點將之 m 等分。

五、 多凹多邊形周邊一點 P 之切割

若遇到多凹多邊形作面積平分問題，我們採取相同想法將之變成等積凸多邊形，再進行切割；作圖過程雖較為繁瑣，但依舊可行。又因為過頂點容易有無解的情況發生，因此我們不討論。舉三凹七邊形為例，如下圖所示：

1. 先將$ABCDEFG$逐漸變形為$HDEFGA$、$HDERA$、$HDES$、$PjHD$後，利用凸四邊形周邊一點 P 做切割，可得$PQ_1HD=PQ_1HBCD=PIBCD=\frac{1}{4}ABCDEFG$。

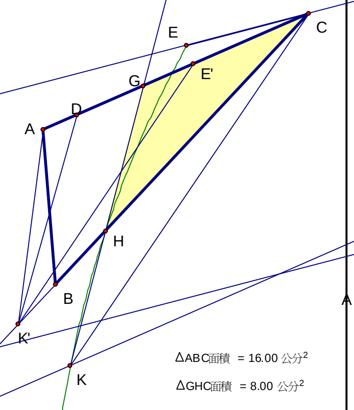


2. 圖形右部分還原成$AIPEFG$，再變形為等積$AIPER$、$AIPS$，利用凸四邊形頂過點切割，可得$PQ_2AI=PLAI=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}ABCDEFG=\frac{1}{4}ABCDEFG$。
3. 最後利用凹五邊形$LPEFG$過頂點 P 切割兩等分，可得$POGL=PEFO=\frac{1}{4}ABCDEFG$。即$\overline{PI}$、$\overline{PL}$、$\overline{PO}$過周邊一點 P將$ABCDEFG$四等分。

證明：同上述各研究目的之想法與證明，故省略。

六、 外部一點 K 對三邊形做面積平分線與 n 等分平分線

因外部一點對三邊形作面積平分線在文獻有詳細作法與證明(華祥志[4]，問題 4)，故在此不多做說明；但有部分情況須加以變形再進行切割。



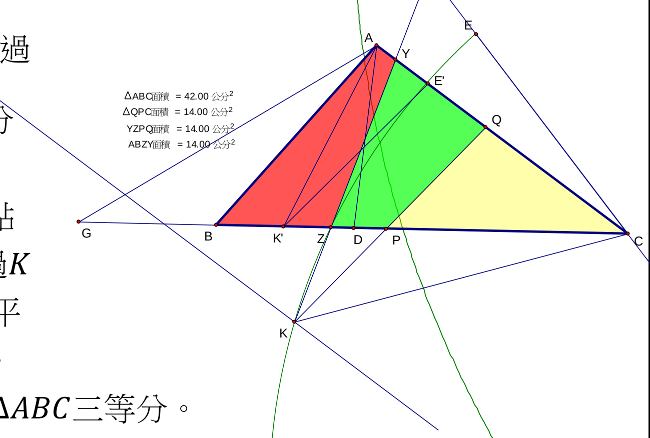
我們的想法是採取變形的模式。由右圖先觀察可知，切割線會以$\overline{KG}$的形式呈現，利用共角定理的想法，我們應該以角C為共角，而不能改變；且我們又需將$\overline{KC}$複製於$\overline{BC}$邊上。因此，我們將原本的角A進行變形。作法如下：

1. 延長$\overline{CB}$，作$\overline{CK'} = \overline{CK}$；連$\overline{AK'}$，過$B$作$\overline{AK'}$平行線交$\overline{AC}$於$D$。
2. 過K作$CK'D$之面積平分線$\overline{KG}$。

故$\overline{KG}$過圖形外一點K，將$\Delta CK'D$（ΔABC） 兩等分。

證明：同三角形外部一點作切割，故省略。

(一) 外部一點 K 對三邊形做面積 n 等分平分線做法：(三等分為例)



1. $\overline{BC}$取$\overline{CD} = \frac{2}{3}\overline{BC}$；過$K$作$\Delta ACD$面積平分線$\overline{KQ}$交$\overline{BC}$於$P$。
2. 在$\overline{BC}$延長線取一點G，且$\overline{DC} = \overline{DG}$；過$K$點作$\Delta AGC$之面積平分線$\overline{KY}$交$\overline{BC}$於$Z$。

故$\overline{KQ}$、$\overline{KY}$兩線段將ΔABC三等分。

證明：

因為$\Delta ADC = \frac{2}{3}\Delta ABC$，且$\overline{KQ}$平分$\Delta ADC$；所以$\Delta PQC = \frac{1}{2}\Delta ADC = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\Delta ABC = \frac{1}{3}\Delta ABC$。又$\overline{DC} = \overline{DG}$，故$\Delta AGC = 2\Delta ADC = \frac{4}{3}\Delta ABC$；

且$\overline{KY}$平分ΔAGC，所以$\Delta YZC = \frac{1}{2}\Delta AGC = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\Delta ABC = \frac{2}{3}\Delta ABC$。

故$YZPQ = \frac{1}{3}\Delta ABC$，整理可得$ABZY = \frac{1}{3}\Delta ABC$。

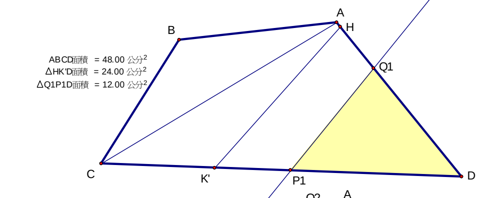
故$\overline{KQ}$、$\overline{KY}$兩線段過ΔABC外一點K將ΔABC三等分。

結論：能利用此模式，達成外部一點 K 對三角形做面積 n 等分。

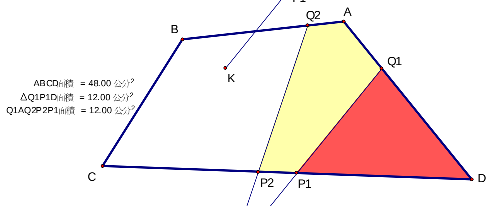
七、 外部一點 K 對凸、凹四邊形做面積之 n 等分平分線

(一) 外部一點K對凸四邊形做面積 n 等分平分線做法：(四等分為例)

1. $\overline{CD}$上取K'，且$\overline{K'D} = \overline{KD}$，過$K'$作$ABCD$面積平分線$\overline{K'H}$。過$K$作$\Delta K'DH$之面積平分線$\overline{KQ_1}$交$\overline{CD}$於$P_1$。

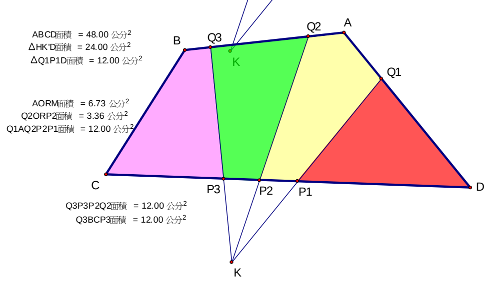


2. 利用四邊形外一點作面積平分線作出$\overline{KQ_2}$交$\overline{CD}$於P_2。(華祥志[4]，問題 8)



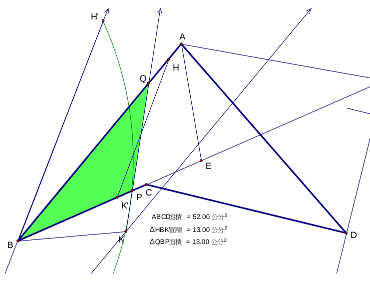
3. 過K作四邊形BCP_2Q_2之面積平分線$\overline{KQ_3}$交$\overline{CD}$於P_3。

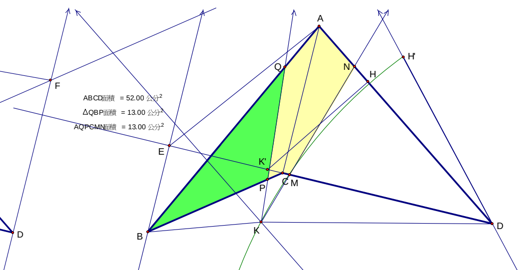
(詳細證明與作法請參考文章)



(二) 外部一點K對凹四邊形做面積 n 等分平分線做法：(四等分為例)

1. 如左下圖，連$\overline{AC}$，過D作$\overline{AC}$平行線交$\overline{BC}$於F；作$\overline{BF}$中點E，連$\overline{AE}$，過K作ΔABE的面積平分線$\overline{KQ}$交$\overline{BE}$於P。
2. 如右下圖，將四邊形$ABCD$變形為ΔAED。過ΔAED外一點K，作ΔAED之面積平分線$\overline{KN}$交$\overline{CD}$於M。

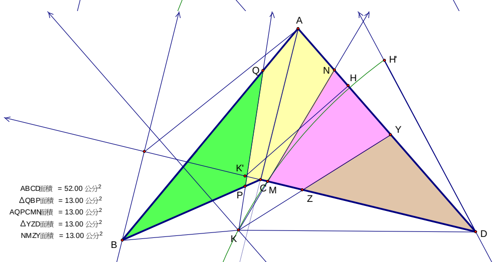




3. 如右圖，過ΔDMN外一點K，作ΔDMN之面積平分線$\overline{KY}$交$\overline{ND}$於Y。

則$\overline{KQ}$、$\overline{KN}$、$\overline{KY}$過外部一點K將凹四邊形$ABCD$四等分。

(詳細證明與作法請參考文章)

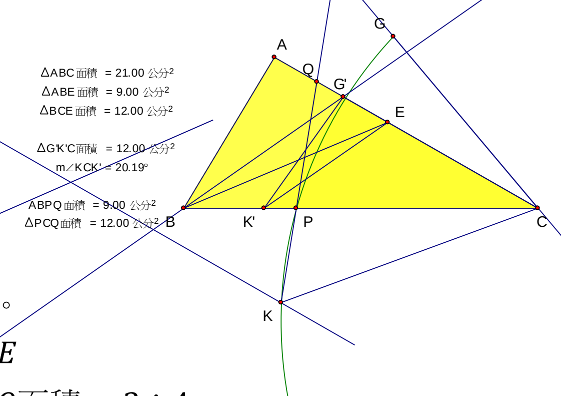


結論：能利用三邊形、四邊形外一點作面積平分線的作法，達成外部一點 K 對凸、凹四邊形做面積 n 等分之作法。

八、 多邊形外部一點 K 作面積 $m:n$ 比例切割之一次性作圖

我們利用三邊形、四邊形外一點 K 做面積平分線的概念為基礎，成功將多邊形 $m:n$ 面積比例切割進行一次性作圖。m、n 不在局限於整數，而是所有實數均可。

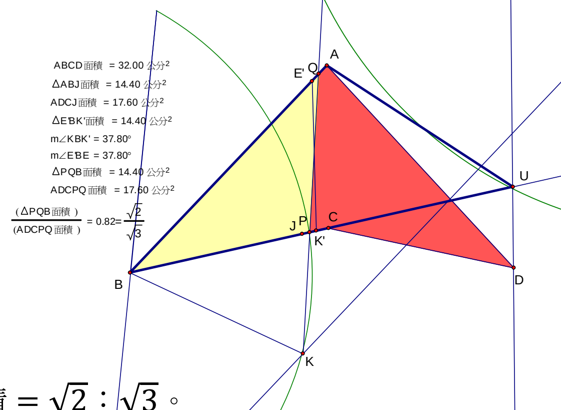
(一) 三邊形外部一點作面積 3：4 比例切割之一次性作圖



1. 取$\overline{AE} : \overline{CE} = 3:4$；使得$\Delta ABE : \Delta BCE = 3:4$。
2. 作$\overline{BG'} // \overline{K'E}$，$\Delta K'CG' = \Delta BCE$
3. 仿多邊形外一點切割方法，以C為共角，作出$\Delta PCQ = \Delta K'CG' = \Delta BCE$。
4. 故$\Delta PCQ = \Delta K'CG' = \Delta BCE$

可得 $\overline{KQ}$ 使 $ABPQ$面積：PCQ面積 = 3：4。

(二) 凹四邊形外部一點作面積 $\sqrt{2}:\sqrt{3}$ 比例切割之一次性作圖



1. 將$ABCD$ 變形ABU，且利用比例線段，使得$\overline{BJ} : \overline{JU} = \sqrt{2}:\sqrt{3}$
2. $\overline{BU}$上取K'，使得$\Delta ABJ = \Delta K'E'B$
3. 利用共角定理，將$\Delta K'E'B$變形為等積的ΔPQB，且$\overline{PQ}$過K。

故 $\overline{KQ}$ 使 $BPQ : PCDAQ$面積 $= \sqrt{2}:\sqrt{3}$。

備註：因資料繁多，只舉此二例為例，詳細證明與作法請參考文章。

研究結論

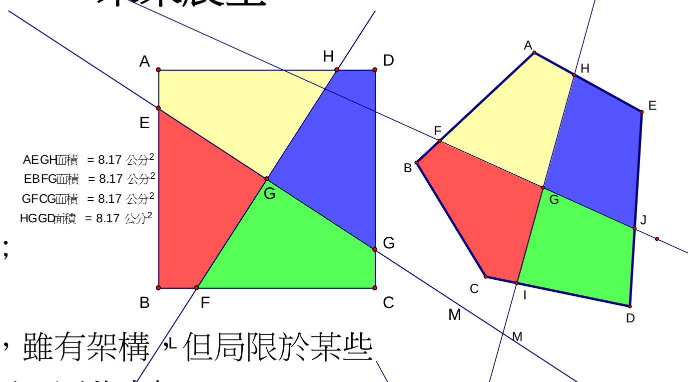
一、「求過頂點或邊上一點，作多邊形面積 n 等分線」，我們與之前的文獻完全不同！原本需要退化成三邊形的想法，我們在四邊形時就可開始進行分割；不須再退化成三邊形，一來一往節省更多時間，也將作法更簡單化；且我們將作圖實際呈現，並加以證明，而非只是『想法』罷了。

二、「求過頂點或邊上一點，作多邊形面積 n 等分線」能一般性作圖，而非各情況各有一種不同的作法。因此，能有系統化地達成我們所要的切割形式，不用一一查詢各作圖方法。

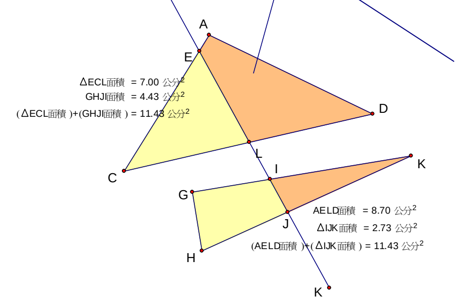
三、以往文獻只探討凸多邊形，對於凹多邊形並沒多加以研究；我們發現凹多邊形依舊可以進行變形與切割，雖稍有不同，但方法其實大同小異。

四、多邊形外一點之面積平分線也做了大改變，我們利用等分、變形、共角定理的觀念成功將圖形多等分切割，不再侷限於凸多邊形二等分，而是凹凸多邊形均可多等分切割。

未來展望



一、利用文獻與我們的研究，可求出周邊上、圖形外一點作 n 等分之作圖；但圖形內一點我們尚未完成，雖有架構，但局限於某些特殊多邊形而已，因此未加詳述，是未來研究方向之一。



二、如右圖所示，圖形外一點 K 對『數個』多邊形作面積等分線，此時割線兩側面積的和相同，割線是如何作圖的。

參考資料及其他

一、莊焜安、許威德、黃浚柏、董晏均。面積平分線知多少。中華民國第二十三屆中小學科學展覽會。

二、劉任昌。從用直線平分凸五邊形的面積談起 (2001)。數學傳播 25 卷四期。

三、張至皓、何玉婉、何知一、張城豪。怎樣分才公平三角形面積兩等分的尺規作圖 (2006)。中華民國第四十六屆科學展覽。

四、華祥志、吳祐德、蔡承儒。求過任意點作多邊形面積平分線(2008)。中華民國第四十八屆科學展覽。